UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci32fran

7330

1

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

J. TANNERY.

E. PICARD.

P. APPELL.

A. GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

40943 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

B
3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXII. — ANNÉE 1908.

(XLIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179876
24/4/23.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

QA
1
B8
v.43

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FOUËT (E.-A.). — Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Deuxième édition, entièrement refondue. Tome I : Des fonctions en général. 1 volume in-8°, XIII-112 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition de ces *Leçons élémentaires;* le succès de la première édition, rapidement épuisée, est certainement justifié. Il a permis à l'auteur de reprendre son œuvre, en la perfectionnant et en la complétant. L'Introduction primitive, en particulier, a été assez développée pour qu'il soit convenable de la séparer du reste de l'Ouvrage, dont, sous sa forme nouvelle, elle constitue le premier Volume : telle qu'elle est, c'est une Introduction à la théorie générale des fonctions, traitée largement et dans un esprit philosophique; l'auteur ne s'astreint pas toujours à cet ordre strictement didactique, où l'on ne s'appuie jamais que sur ce qui a été démontré; tantôt il se contente d'une vue et se borne à affirmer tel théorème qui sera démontré plus tard ou dont, tout au moins, le lecteur doit connaître l'énoncé; tantôt, lorsqu'il s'agit de propositions particulièrement importantes et dont la démonstration est d'une nature élémentaire,

il insiste sur cette démonstration. Il insiste toujours avec le plus grand soin sur les définitions.

Cette Introduction se compose de deux Chapitres, dont le plus long est intitulé : *Des fonctions en général*. L'auteur y traite des ensembles, des limites, des fonctions en général, de la classification des fonctions; il ne craint pas d'introduire parfois les recherches les plus récentes et d'initier son lecteur aux problèmes actuels. Le second Chapitre est consacré à la définition des fonctions analytiques.

De nombreuses notes contiennent des indications bibliographiques, des citations, des exemples, parfois quelques développements théoriques. J. T.

WUNSCHMANN (K.). — Ueber Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen. Inaugural-Dissertation. 35 pages in-8. Leipzig, Teubner, 1905.

Une équation différentielle ordinaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \omega\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

définit un faisceau de ∞^n courbes; l'auteur s'est proposé de chercher dans quels cas les conditions d'un contact du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre entre deux courbes infiniment voisines se réduisaient à des équations de Monge du second degré entre les constantes d'intégration, entre les données initiales, par exemple. C'est un problème que l'on peut aborder, sans connaître les équations intégrales, grâce à une méthode que l'on doit à M. Engel [1]. L'auteur le traite explicitement pour les cas de $n = 3, 4, 5$. Les conditions cherchées s'expriment par des équations aux dérivées partielles et l'on obtient explicitement les équations de Monge. J. T.

[1] *Leipziger Berichte* 1905.

KNOPP (K.). — GRENZWERTE VON REIHEN BEI DER ANNÄHERUNG AN DIE KONVERGENZE GRENZE. Inaugural-Dissertation. 50 pages in-8. Göttingen, Kästner, 1907.

L'auteur résume d'abord les diverses propositions connues sur la façon dont se comporte une série entière en x, quand x s'approche d'un point du cercle de convergence, dont on peut, si l'on veut, supposer que le rayon est égal à 1. Le point de départ de la plupart de ces théorèmes est dans le théorème d'Abel, dans une généralisation due à M. Frobenius, qui ne suppose plus la série convergente pour $x = 1$, et en vertu de laquelle on a

$$\lim_{x=1} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = \lim_{m=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_m}{m+1},$$

en posant $s_p = \sum_{n=0}^{n=p} a_n$, en supposant que le second membre ait un sens, et que le point x s'approche du point 1 par le rayon qui aboutit en ce point, dans une remarque due à M. Appell et d'après laquelle on a

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

en supposant que les nombres $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$ sont positifs, que les deux séries entières sont convergentes pour $|x| < 1$, que les deux séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ soient divergentes, enfin que le second membre de l'égalité précédente a un sens.

Le théorème d'Abel a été généralisé par M. Stolz; il subsiste lorsque x s'approche du point 1 en restant dans un triangle intérieur au cercle de convergence et ayant l'un de ses sommets au point 1. Le théorème de M. Appell est susceptible d'une généralisation analogue.

De ces diverses propositions on a tiré un très grand nombre de propriétés particulières.

M. Knopp s'occupe ensuite des séries de la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n},$$

qui se réduisent à la série de Lambert quand b_n est égal à 1; ces séries, lorsque la série $\sum b_n$ est convergente, convergent pour toutes les valeurs de x, donc la valeur absolue est différente de 1; lorsque $\sum b_n$ est divergente et que la série $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence ρ différent de 0, la série (1) converge sous la condition $|x| < \rho$. Sur ces séries, M. Knopp établit la proposition suivante :

Supposons convergente la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left| \frac{b_n}{n} \right|$$

et soit x_0 une racine primitive de l'équation $x^p = 1$, on aura

$$\lim_{x=x_0} \left[\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n} \right] = \sum{}' \frac{b_n}{n},$$

où, dans le second membre, la sommation est étendue à toutes les valeurs de n qui sont divisibles par p; le point x doit s'approcher du point x_0 en restant dans un triangle intérieur au cercle de rayon qui a l'un de ses sommets en x_0.

Cette proposition ne s'applique pas à la série de Lambert; mais l'auteur donne pour cette série une proposition du même genre, comme aussi pour la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

où n parcourt non plus la suite des nombres naturels, mais bien la suite des nombres premiers. Il étudie encore la façon dont se comportent les séries

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} n^a \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} n^a \log \frac{1}{1-x^n},$$

quand x s'approche de 1.

Les séries, dites *de Dirichlet*,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

donnent lieu à des propositions analogues à celles qui concernent les séries entières; voici quelques-uns des théorèmes qu'établit M. Knopp, et qui se rapportent à des séries

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n^x}, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{n^x}$$

qui satisfont aux conditions suivantes :

Elles sont convergentes quand la partie réelle de x est supérieure au nombre positif λ; la seconde a tous ses coefficients positifs et diverge pour $x = \lambda$.

On a, en supposant que ρ tende vers o par valeurs positives,

$$\lim_{\rho = +0} \psi(\lambda + \rho) = 0.$$

En supposant

$$\lim_{n = \infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

on a

$$\lim_{\rho = +0} \frac{\varphi(\lambda + \rho)}{\psi(\lambda + \rho)} = k.$$

En supposant

$$\lim_{n = \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = k,$$

on a encore

$$\lim_{\rho = +0} \frac{\varphi(\lambda + \rho)}{\psi(\lambda + \rho)} = k.$$

J. T.

HESSE (O.). — Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Vierte Auflage revidiert und ergänzt von *S. Gundelfinger*. 1 volume in-8, 251 pages. Leipzig, Teubner, 1906.

La première édition de ces quinze leçons remonte à 1865. Ceux qui les ont lues alors ont sans doute été frappés par ce qu'elles avaient de nouveau. Elles n'ont pas vieilli et la publication de cette quatrième édition est pleinement justifiée; les additions que

M. Gundelfinger a apportées soit dans le texte, soit dans les dernières pages, conservent le caractère du Livre, en l'accentuant et en augmentant sa clarté. L'Ouvrage est élémentaire par son sujet, d'une part et, de l'autre, par le peu de connaissances qu'il exige de celui qui veut l'étudier; mais il est élevé par les tendances, par le soin que l'auteur met à préparer l'étude des théories ultérieures et à accroître les connaissances algébriques du lecteur, à propos des questions géométriques qu'il étudie. C'est ce dont on se convaincra en lisant, par exemple, les leçons consacrées à l'involution, aux substitutions orthogonales, aux hexagones de Pascal et de Brianchon. J. T.

BOPP (K.) — Die Kegelschnitte des Gregorius A. St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, etc., begründet von M. Cantor, XX. Heft, 2. Stück). 1 vol. in-8, 314 pages, 329 figures. Leipzig, Teubner, 1907.

Le Livre de M. Karl Bopp sera lu avec intérêt, non seulement par ceux qui s'adonnent à l'histoire des Mathématiques, mais encore par ceux qui sont heureux de se renseigner à l'occasion sur cette histoire, sans se donner trop de mal. Les coniques de Grégoire de Saint-Vincent font partie de son *Opus geometricum;* elles y tiennent plus de 800 pages, sans compter les prolégomènes. Quel mathématicien, qui n'est pas un professionnel de l'histoire, s'avisera de les lire, si même il peut disposer d'une bibliothèque où se trouve l'*Opus geometricum?* Et pourtant elles sont dignes d'être connues, comme le montre l'analyse complète qu'en donne M. Bopp, avec laquelle on peut très bien se rendre compte de l'ordre suivi par l'auteur, de ses méthodes, de la nature de ses démonstrations. Des publications de cette nature rendent évidemment les meilleurs services.

Grâce aux publications récentes du P. Bosmans, la biographie de Grégoire de Saint-Vincent est suffisamment connue; M. Bopp la résume rapidement.

Grégoire de Saint-Vincent est né à Bruges en 1584; il entra dans l'ordre des jésuites, à Rome, en 1605, et resta au collège

romain jusqu'en 1612. On le suit à Louvain, à Bruxelles, à Bois-le-Duc, à Courtrai, à Anvers, de nouveau à Louvain, où il enseigne les Mathématiques de 1621 à 1624, à Rome, à Prague, où, dans le sac de la ville, par les Suédois, en 1631, il perd presque tous ses manuscrits, à Vienne; enfin, à Gand, où il passe les dernières années de sa vie, de 1633 à 1667.

L'*Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni decem libris comprehensum* a été publié à Anvers, en 1647. La théorie des coniques, proprement dites, se trouve dans les Livres IV, V et VI. Grégoire de Saint-Vincent se propose d'écrire un Ouvrage dont la lecture soit plus aisée que celle des coniques d'Apollonius. D'Apollonius, d'ailleurs, il ne connaît que les quatre premiers Livres, publiés en 1566, par Commandin.

Dans ses prolégomènes aux sections du cône, il étudie avec soin l'intersection du cône par un plan passant par le sommet; puis, dans les trois Livres énumérés plus haut, il traite successivement de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole. M. Bopp suit pas à pas son auteur en comparant soigneusement ses méthodes avec celles d'Apollonius. Il insiste comme il convient sur son talent de géomètre.

Dans le Livre V, figurent ces propriétés focales de la parabole dont l'absence, chez Apollonius, constitue une énigme, que M. Zeuthen explique en supposant que ces propriétés étaient développées dans un autre Ouvrage. Grégoire de Saint-Vincent donne la construction de la parabole au moyen des deux suites projectives qu'une tangente mobile détermine sur deux tangentes fixes. Il s'occupe des coniques comme *lieux géométriques,* sujet qu'Apollonius avait négligé. Il traite du cercle osculateur à l'ellipse. Son nom doit rester attaché à l'évaluation de l'aire de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes.

M. Bopp, dans les dernières pages de son travail, insiste sur le parti que Grégoire de Saint-Vincent a tiré de la méthode de transformation que voici :

Considérons une conique pour laquelle l'axe des abscisses est un axe de symétrie, et un point fixe O de cet axe; à chaque point M de la conique on fait correspondre un point M′ de même abscisse et dont l'ordonnée est égale à OM. Le lieu du point M′ est en général une conique. Celle-ci se réduit à deux droites si le

point O est un foyer de la proposée. M. Bopp propose de désigner cette transformation sous le nom de transformation *per subtensas*. J. T.

ENCYKLOPÄDIE DER ELEMENTAR-MATHEMATIK, ein Handbuch für Lehrer und Studierende, von *Heinrich Weber* und *Joseph Wellstein*, in drei Bänden. — Dritter Band : ANGEWANDTE ELEMENTAR-MATHEMATIK, bearbeitet von *H. Weber, J. Wellstein* und *R.-H. Weber*. 1 volume in-8°, XIII-666 pages. Leipzig, Teubner, 1907.

Ce Volume nouveau, qui termine l'*Encyclopédie* de MM. Weber et Wellstein, surprendra peut-être quelque peu ceux qui ont pris l'habitude de limiter d'une manière étroite et précise l'enseignement des applications des Mathématiques élémentaires.

Il comprend bien, en effet, toutes les matières qui, dans nos établissements d'instruction secondaire, font partie du premier cycle de notre enseignement scientifique; mais les auteurs nous donnent sur bien d'autres sujets des exposés assez étendus qu'on n'a pas l'habitude d'y ajouter ou qu'on rattache à la Physique.

Le Volume commence par un premier Livre consacré à la Mécanique élémentaire. Le premier Chapitre, rédigé par M. Wellstein, traite de la théorie des vecteurs. Il se termine par une étude assez approfondie relative aux axiomes sur lesquels on peut faire reposer les lois de leur composition. Le second et le troisième Chapitre, relatifs à la Statique analytique et à la Dynamique, ont été écrits par M. R.-H. Weber. Aux applications qui sont traitées d'habitude dans nos cours français, le mouvement des projectiles, le plan incliné, le pendule, la loi de Newton, le rédacteur a joint quelques notions sommaires sur le principe de la conservation de l'énergie et sur la Thermodynamique. Il termine, en particulier, par la considération des cycles de Carnot.

Le second Livre, rédigé par le même auteur, est tout entier consacré à l'Électricité et au Magnétisme. Le premier Chapitre débute par une théorie élémentaire des lignes de force de Faraday; le second est consacré à l'Électromagnétisme. Il y a là près de 130 pages qui ne constituent pas une théorie complète, mais dans lesquelles sont données toutes les notions essentielles.

C'est à M. H. Weber qu'est dû le troisième Livre, de la faible étendue de 36 pages. Il traite des maxima et des minima. Le premier Chapitre est consacré à ces problèmes traités suivant la méthode géométrique. M. H. Weber y fait connaître les belles démonstrations de Steiner ; mais il ne dissimule pas les objections qu'on peut leur adresser dans les cas les plus essentiels. Il donne aussi les méthodes analytiques qui permettent d'aborder ces belles questions et consacre tout un Chapitre aux applications : stabilité de l'équilibre, capillarité.

Dans le quatrième Livre, M. H. Weber nous donne un exposé assez complet des éléments du Calcul des probabilités. Il en expose les principes en se plaçant à un point de vue nouveau, qui lui est personnel. Il en fait connaître les théorèmes fondamentaux et, en particulier, celui de J. Bernoulli. Il termine par un Chapitre consacré aux erreurs d'observation.

Le cinquième Livre, qui est le plus étendu, car il comprend 250 pages environ, traite de la Géométrie descriptive, des diverses espèces de projections, et enfin de la Statique graphique avec ses applications les plus importantes.

L'Ouvrage se termine enfin par quelques additions au Tome I, relatives à la théorie des ensembles.

Ce court exposé, comme ceux que nous avons consacrés aux deux Volumes précédents, suffira à montrer que la nouvelle *Encyclopédie des Mathématiques élémentaires* est un Ouvrage vraiment original, s'écartant beaucoup des sentiers les plus ordinairement battus. A ceux même qui ne seraient pas en situation de suivre le plan adopté par ses auteurs, il permettra de faire des réflexions profitables sur les points les plus essentiels et d'améliorer leur enseignement. Car les auteurs ont attaché une importance toute particulière à l'exposé et à la critique des principes et des notions axiomatiques. J. G.

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES.

PAR M. E. BOUNITZKY.

1. Nous nous proposons de résoudre l'équation intégrale de la forme

$$\varphi(s) - \sum_{i=0}^{i=m} \int_a^b k_i(s, t)\, \varphi^{(i)}(t)\, dt = f(s), \tag{1}$$

où $k_i(s, t)$ et $f(s)$ sont des fonctions données, $\varphi(s)$ est une fonction cherchée; $\varphi^{(0)}(t)$ et $\varphi^{(i)}(t)$ sont écrits au lieu de $\varphi(t)$ et $\frac{d^i\varphi(t)}{dt^i}$. Il est admis que la fonction donnée $f(s)$ ainsi que la fonction cherchée $\varphi(s)$ ont m dérivées successives dans l'intervalle (a, b), dont la dernière est continue dans cet intervalle.

Nous supposons de plus que les fonctions $k_i(s, t)$ sont continues dans l'intervalle $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ et qu'elles ont m dérivées $\frac{\partial^\lambda k_i(s, t)}{\partial s^\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, m)$ continues dans le même intervalle.

2. Si le déterminant D_k d'une équation intégrale de Frédholm

$$\varphi(s) - \int_a^b k(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

s'annule, la fonction cherchée $\varphi(s)$ s'exprime par la formule

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t)\, f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s), \tag{2}$$

suivie par les équations de condition

$$(3)\qquad \int_a^b f(s)\,\mu_\nu(s)\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ces formules $K(s, t)$ est une fonction bien déterminée qu'on peut toujours former au moyen de la fonction donnée $k(s, t)$ [1], les quantités a_ν sont des constantes arbitraires, $\chi_\nu(s)$ et $\mu_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont respectivement les n solutions linéairement indépendantes des équations intégrales homogènes

$$\chi_\nu(s) - \int_a^b k(s, t)\,\chi_\nu(t)\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \mu_\nu(t) - \int_a^b k(s, t)\,\mu_\nu(s)\,ds = 0.$$

Si l'on convient de poser $K(s, t) = \Gamma(s, t)$, où $\Gamma(s, t)$ est une *fonction résolvante* du noyau $k(s, t)$, $n = 1$, $a_1 = \chi_1(s) = \mu_1(s) = 0$ dans le cas où le déterminant D_k n'est pas nul, on obtient de (2) la formule connue

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b \Gamma(s, t)\,f(t)\,dt,$$

les conditions (3) étant identiquement remplies. On peut donc exprimer la solution de l'équation de Fredholm toujours par les formules (2) et (3) qui restent aussi vraies pour $f(s) = 0$, en ayant toujours égard aux conventions faites plus haut.

3. Si la somme $\sum_{i=0}^{i=m}$ n'a qu'un terme, l'équation (1) prend la forme

$$\varphi(s) - \int_a^b k_\lambda(s, t)\,\varphi^{(\lambda)}(t)\,dt = f(s) \qquad (\lambda \leqq m).$$

Pour résoudre cette équation, différentions-la λ fois. On aura

$$\varphi^{(\lambda)}(s) - \int_a^b \frac{\partial^\lambda k_\lambda(s, t)}{\partial s^\lambda}\,\varphi^{(\lambda)}(t)\,dt = f^{(\lambda)}(s),$$

d'où suit, par les formules de M. Fredholm,

$$(4)\qquad \varphi^{(\lambda)}(s) = f^{(\lambda)}(s) + \int_a^b Q(s, t)\,f^{(\lambda)}(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s)$$

[1] La fonction $K(s, t)$ correspond dans le cas considéré, suivant les notations de M. Fredholm, à une substitution *pseudo inverse*.

avec les équations de condition

$$(5)\qquad \int_a^b f^{(\lambda)}(s)\,\mu_\nu(s)\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

les fonctions $Q(s, t)$, $\gamma_\nu(s)$, $\mu_\nu(s)$, les quantités a_ν et le nombre n étant définis toujours au moyen du noyau $\frac{\partial^\lambda k(s, t)}{\partial s^\lambda}$ conformément aux conventions du n° 2. En désignant le second membre de la formule (4) par $v(s)$ et en substituant dans l'équation proposée $v(t)$ au lieu de $\varphi^{(\lambda)}(t)$, on aura

$$(6)\qquad \varphi(s) = f(s) + \int_a^b k_\lambda(s, t)\,v(t)\,dt.$$

Réciproquement, si les conditions (5) sont remplies, le second membre de l'équation (6) satisfait à l'équation proposée. En effet, dans ce cas la fonction $v(s)$ satisfait à l'équation

$$v(s) - \int_a^b \frac{\partial^\lambda k_\lambda(s, t)}{\partial s^\lambda}\,v(t)\,dt = f^{(\lambda)}(s).$$

On a donc, en différentiant λ fois l'équation (6),

$$\varphi^{(\lambda)}(s) = f^{(\lambda)}(s) + \int_a^b \frac{\partial^\lambda k(s, t)}{\partial s^\lambda}\,v(t)\,dt = v(s),$$

d'où suit

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b k_\lambda(s, t)\,v(t)\,dt = f(s) + \int_a^b k_\lambda(s, t)\,\varphi^{(\lambda)}(t)\,dt.$$

4. Théorème. — *Si le nombre des termes dans la somme* $\sum_{i=0}^{i=m}$ *surpasse un, la solution de l'équation*

$$\varphi(s) - \sum_{i=0}^{i=m} \int_a^b k_i(s, t)\,\varphi^{(i)}(t)\,dt = f(s)$$

s'exprime par la formule

$$(7)\qquad \varphi(s) = L_1(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b q_i(s, t)\,\varphi^{(i-1)}(t)\,dt,$$

où $\varphi_1(s)$ satisfait à l'équation

$$(8)\qquad \varphi_1(s) - \sum_{i=0}^{i=m_1} \int_a^b k_{1i}(s,t)\,\varphi_1^{(i)}(t)\,dt = l_1(s)$$

avec l'indice $m_1 < m$ et de plus aux équations

$$(9)\qquad \int_a^b \left[f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s,t)\,\varphi_1^{(i-1)}(t)\,dt \right] \mu_\nu(s)\,ds = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $q_i(s, t)$ et $k_{1i}(s, t)$ sont parfaitement définies par les fonctions données $k_i(s, t)$. La fonction $L_1(s)$ est en général de la forme

$$L_1(s) = f(s) + \int_a^b K_0(s,t)\,f(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \gamma_\nu(s),$$

où $K_0(s, t)$, le nombre n et $\gamma_\nu(s)$ sont aussi définis au moyen des fonctions données $k_i(s, t)$ et les valeurs de a_ν sont des constantes. La fonction $l_1(s)$ est une dérivée d'un ordre déterminé de $L_1(s)$, et par cette raison elle est linéaire en a_ν.

Réciproquement, si $\varphi_1(s)$ est, pour certaines valeurs de a_ν, une solution de l'équation (8) qui satisfait aux conditions (9), la formule (7) donne une solution de l'équation (1).

Supposons d'abord que les fonctions $k_0(s, t)$, $k_1(s, t)$, ..., $k_{\alpha-1}(s, t)$ s'annulent identiquement, mais la fonction $k_\alpha(s, t)$ n'est pas identiquement nulle. Écrivons dans ce cas l'équation (1) dans la forme

$$(10)\qquad \varphi(s) - \sum_{i=0}^{i=m-\alpha} \int_a^b k_{\alpha+i}(s,t)\,\varphi^{(\alpha+i)}(t)\,dt = f(s).$$

Désignant $\varphi^{(\alpha)}(s)$ par $\varphi_1(s)$ et dérivant l'équation (10) α fois par rapport à s, on a

$$\varphi^{(\alpha)}(s) - \sum_{i=0}^{i=m-\alpha} \int_a^b \frac{\partial^\alpha k_{\alpha+i}(s,t)}{\partial s^\alpha}\,\varphi^{(\alpha+i)}(t)\,dt = f^{(\alpha)}(s)$$

ou

$$(11)\qquad \varphi_1(s) - \sum_{i=0}^{i=m-\alpha} \int_a^b \frac{\partial^\alpha k_{\alpha+i}(s,t)}{\partial s^\alpha}\,\varphi_1^{(i)}(t)\,dt = f^{(\alpha)}(s)$$

et

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(s) &= f(s) + \sum_{i=0}^{i=m-\alpha} \int_a^b k_{\alpha+i}(s,t)\,\varphi_1^{(i)}(t)\,dt \\ &= f(s) + \sum_{i=1}^{i=m-\alpha+1} \int_a^b k_{\alpha+i-1}(s,t)\,\varphi_1^{(i-1)}(t)\,dt. \end{aligned}\right.$$

La solution de l'équation (10) est donc exprimée par la formule (12), où $\varphi_1(s)$ est une solution de l'équation (11). Réciproquement, si l'on substitue dans le second membre de l'équation (12) au lieu de $\varphi_1(s)$ une solution de l'équation (11), la fonction $\varphi(s)$ ainsi définie satisfait à l'équation (10). En effet, différentiant l'équation (12) α fois par rapport à s, on a, en tenant compte de l'équation (11),

$$\varphi^{(\alpha)}(s) = \sum_0^{m-\alpha} \int_a^b \frac{\partial k_{\alpha+i}(s,t)}{\partial s^\alpha}\,\varphi_1^{(i)}(t)\,dt + f^{(\alpha)}(s) = \varphi_1(s),$$

d'où suit, conformément à l'équation (12),

$$\varphi(s) - \sum_{i=0}^{i=m-\alpha} \int_a^b k_{\alpha+i}(s,t)\,\varphi^{(\alpha+i)}(t)\,dt = f(s).$$

Si l'on pose dans l'énoncé du théorème $L_1(s) = f(s)$, $\frac{d^\alpha L_1(s)}{ds^\alpha} = f^{(\alpha)}(s) = l_1(s)$, $k_{1i}(s,t) = \frac{\partial^\alpha k_{\alpha+i}(s,t)}{\partial s^\alpha}$, $m_1 = m - \alpha$, $n = 1$, $K_0(s,t) = a_1 = \chi_1(s) = \mu_1(s) = 0$, $q_i(s,t) = k_{\alpha+i-1}(s,t)$ pour $i = 1, 2, \ldots, m - \alpha + 1$, et si $\alpha > 1$, $q_i(s,t) = 0$ pour $i = m - \alpha + 2, \ldots, m$, on retrouve les formules (12) et (11), les équations de condition (9) étant identiquement remplies. Le théorème est donc vrai dans le cas considéré.

Supposons maintenant que le noyau $k_0(s,t)$ ne s'annule pas identiquement. En écrivant l'équation (1) dans la forme

$$(13)\qquad \varphi(s) - \int_a^b k_0(s,t)\,\varphi(t)\,dt = w(s),$$

où

$$(14)\qquad w(s) = f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s,t)\,\varphi^{(i)}(t)\,dt,$$

on a

$$(15)\qquad \varphi(s) = w(s) - \int_a^b K_0(s, t)\, w(t)\, dt - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s)$$

avec les équations de condition

$$(16)\qquad \int_a^b w(s)\, \mu_\nu(s)\, ds = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $K_0(s, t)$, $\chi_\nu(s)$, $\mu_\nu(s)$ et le nombre n sont définis au moyen du noyau $k_0(s, t)$ conformément aux conventions du n° 2, et a_ν sont des constantes. De (15) et (14) on trouve

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s, t)\, \varphi^{(i)}(t)\, dt$$
$$+ \int_a^b K_0(s, t) \left[f(t) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(t, r)\, \varphi^{(i)}(r)\, dr \right] dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s)$$

ou, en permutant les lettres t et r dans l'intégrale double,

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(s) = f(s) &+ \int_a^b K_0(s, t) f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b \left[k_i(s, t) + \int_a^b K_0(s, r)\, k_i(r, t)\, dr \right] \varphi^{(i)}(t)\, dt. \end{aligned} \right.$$

Posant, pour abréger,

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} & k_i(s, t) + \int_a^b K_0(s, t)\, k_i(r, t)\, dr = q_i(s, t), \\ & f(s) + \int_a^b K_0(s, t)\, f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s) = L_1(s), \end{aligned} \right.$$

on peut écrire l'équation (17) dans la forme

$$(19)\qquad \varphi(s) = L_1(s) - \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b q_i(s, t)\, \varphi^{(i)}(t)\, dt.$$

En introduisant les désignations $\varphi'(s) = \varphi_1(s)$, $\frac{\partial q_i(s, t)}{\partial s} = k_{1,i-1}(s, t)$, $L'_1(s) = l_1(s)$ et différentiant l'équation (19) par rapport à s, on

aura

$$(20)\qquad \varphi(s) = L_1(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b q_i(s,t)\,\varphi_1^{(i-1)}(t)\,dt$$

et

$$(21)\qquad \varphi_1(s) - \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_a^b k_{1,i}(s,t)\,\varphi_1^{(i)}(t)\,dt = l_1(s),$$

où la fonction $\varphi_1(s)$ satisfait de plus aux équations

$$(22)\qquad \int_a^b \left[f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s,t)\,\varphi_1^{(i-1)}(t)\,dt \right] \mu_\nu(s)\,ds = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

que l'on déduit de (16), en tenant compte de l'équation (14) et en remplaçant $\varphi^{(i)}(t)$ par $\varphi_1^{(i-1)}(t)$. Réciproquement, si, pour certaines valeurs des constantes a_ν qui sont contenues linéairement dans la fonction $l_1(s) = \frac{dL_1(s)}{ds}$, on trouve une solution $\varphi_1(s)$ de l'équation (21) qui satisfait aux conditions (22) et si l'on substitue cette valeur de $\varphi_1(s)$ dans le second membre de la formule (20), on obtient une solution de l'équation (1). En effet, différentiant l'équation (20), il vient en vertu de (21)

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= L_1'(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b \frac{\partial q_i(s,t)}{\partial s}\,\varphi_1^{(i-1)}(t)\,dt \\ &= l_1(s) + \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_a^b k_{1i}(s,t)\,\varphi_1^{(i)}(t)\,dt = \varphi_1(s). \end{aligned}$$

On peut donc écrire les équations (20) et (22) dans la forme

$$(23)\qquad \varphi(s) = L_1(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b q_i(s,t)\,\varphi^{(i)}(t)\,dt$$

et

$$(24)\qquad \int_a^b \left[f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s,t)\,\varphi^{(i)}(t)\,dt \right] \mu_\nu(s)\,ds = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Les formules (24), (14), (23) et (18) donnent

$$\int_a^b w(s)\,\mu_\nu(s)\,ds = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b K_0(s,t) f(t)\,dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b \left[k_i(s,t) - \int_a^b K_0(s,r) k_i(r,t)\,dr \right] \varphi^i(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s)$$

ou, en permutant les lettres r et t dans l'intégrale double,

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s,t) \varphi^i(t)\,dt$$
$$- \int_a^b K_0(s,t) \left[f(t) - \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(t,r) \varphi^i(r)\,dr \right] dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s)$$
$$= w(s) + \int_a^b K_0(s,t) w(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s).$$

On voit donc que les équations (20), (21), (22) entraînent les équations (15) et (16), la fonction $w(s)$ étant définie par la formule (14). Or, des équations (15) et (16) on tire, conformément à la théorie de l'équation de Fredholm,

$$\varphi(s) - \int_a^b k_0(s,t) \varphi(t)\,dt = w(s) = f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s,t) \varphi^i(t)\,dt.$$

Le théorème est donc démontré dans le cas où $k_0(s,t)$ ne s'annule pas identiquement, m_1 prenant, d'après l'équation (21), la valeur $m - 1$.

5. Pour résoudre l'équation (1) dans le cas général, on n'a qu'à appliquer de nouveau les formules du théorème démontré à l'équation (8). On aura

$$\varphi_1(s) = L_2(s) + \sum_{i=1}^{i=m_1} \int_a^b q_{1,i}(s,t) \varphi_2^{i-1}(t)\,dt,$$

$$\varphi_2(s) - \sum_{i=0}^{i=m_2} \int_a^b k_{2,i}(s,t) \varphi_2^i(t)\,dt = l_2(s), \qquad \text{où} \qquad m_2 < m_1,$$

$$\int_a^b \left[l_1(s) + \sum_{i=1}^{i=m_1} \int_a^b k_{1,i}(s,t) \varphi_2^{i-1}(t)\,dt \right] \mu_{1,\nu}(s)\,ds = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n_1).$$

Dans ces formules, les fonctions $L_2(s)$, $q_{1,i}(s,t)$, $l_2(s)$, $k_{2,i}(s,t)$ sont formées au moyen des fonctions $l_1(s)$ et $k_{1,i}(s,t)$ par la même méthode qu'on employait pour former les fonctions $L_1(s)$, $q_i(s,t)$, $l_1(s)$ et $k_{1,i}(s,t)$ au moyen des fonctions $f(s)$ et $k_i(s,t)$. On aura donc, par une formule analogue à la seconde des équations (18),

$$L_2(s) = l_1(s) + \int_a^b K_{10}(s,t)\, l_1(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n_1} a_{1\nu}\chi_{1\nu}(s),$$

et, par suite, $l_1(s)$ étant linéaire en $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la fonction $L_2(s)$ est linéaire par rapport à deux groupes de constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1,n_1}$. La fonction $l_2(s)$ est une dérivée d'un rang déterminé de la fonction $L_1(s)$; elle est donc aussi linéaire en $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1,n_1}$. Les fonctions $K_{10}(s,t)$, $\chi_{1\nu}(s,t)$, $\mu_{1\nu}(s)$ et le nombre n_1 sont définis par la nature du noyau $k_{10}(s,t)$, en tenant compte des conventions du paragraphe 2. Ainsi, $\chi_{1\nu}(s)$ et $\mu_{1\nu}(s)$ sont les n_1 solutions linéairement indépendantes des équations intégrales homogènes

$$\chi_{1\nu}(s) - \int_a^b k_{10}(s,t)\chi_{1\nu}(t)\, dt = 0 \quad \text{et} \quad \mu_{1\nu}(t) - \int_a^b k_{10}(s,t)\mu_{1\nu}(s)\, ds = 0,$$

si le noyau $k_{10}(s,t)$ est différent de zéro et si le déterminant correspondant $D_{k_{10}}$ s'annule identiquement; dans tous les autres cas, on a $n_1 = 1$, $\mu_{11}(s) = \chi_{11}(s) = a_{11} = 0$.

En appliquant les formules du paragraphe 4 à l'équation

$$\varphi_2(s) - \sum_{i=0}^{i=m_2} \int_a^b k_{2,i}(s,t)\, \varphi_2^{(i)}(t)\, dt = l_2(s),$$

et en continuant de les appliquer aux équations analogues qui en résultent successivement, on aura trois groupes d'équations

$$(25)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(s) - \displaystyle\sum_{i=0}^{i=m_1} \int_a^b k_{1,i}(s,t)\, \varphi_1^{(i)}(t)\, dt = l_1(s), \\[2ex] \varphi_2(s) - \displaystyle\sum_{i=0}^{i=m_2} \int_a^b k_{2,i}(s,t)\, \varphi_2^{(i)}(t)\, dt = l_2(s), \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex] \varphi_p(s) - \displaystyle\sum_{i=0}^{i=m_p} \int_a^b k_{p,i}(s,t)\, \varphi_p^{(i)}(t)\, dt = l_p(s), \end{array} \right.$$

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi(s) = L_1(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b q_i(s, t)\, \varphi_1^{(i-1)}(t)\, dt, \\ \varphi_1(s) = L_2(s) + \sum_{i=1}^{i=m_1} \int_a^b q_{1,i}(s, t)\, \varphi_2^{(i-1)}(t)\, dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_{p-1}(s) = L_p(s) + \sum_{i=1}^{i=m_{p-1}} \int_a^b q_{p-1}(s, t)\, \varphi_p^{(i-1)}(t)\, dt \end{cases}$$

et

$$(27)\quad \begin{cases} \int_a^b \left[f(s) + \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s, t)\, \varphi_1^{(i-1)}(t)\, dt \right] \mu_\nu(s)\, ds = 0 \\ \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n), \\ \int_a^b \left[l_1(s) + \sum_{i=1}^{i=m_1} \int_a^b k_{1,i}(s, t)\, \varphi_2^{(i-1)}(t)\, dt \right] \mu_{1\nu}(s)\, ds = 0 \\ \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \int_a^b \left[l_{p-1}(s) + \sum_{i=1}^{i=m_{p-1}} \int_a^b k_{p-1,i}(s, t)\, \varphi_p^{(i-1)}(t)\, dt \right] \mu_{p-1,\nu}(s)\, ds \\ \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n_{p-1}). \end{cases}$$

Les nombres $m_1, m_2, \dots, m_p$ vont dans les formules (25) en diminuant et, de plus, quelques-unes des fonctions $k_{j,i}(s, t)$ peuvent, en général, s'annuler; on arrivera donc certainement à une formule d'un rang déterminé, par exemple, p, où la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m_p} \int_a^b k_{p,i}(s, t)\, \varphi_p^{(i)}(t)\, dt$$

se réduit à un seul terme de la forme $\int_a^b k_{p,\lambda}(s, t)\, \varphi_p^{(\lambda)}(t)\, dt$ ou, peut-être, s'annule identiquement.

Supposons d'abord que la somme $\sum_{i=0}^{i=m_p}$ ne contient qu'un terme

$$\int_a^b k_{p,\lambda}(s, t)\, \varphi_p^{(\lambda)}(t)\, dt.$$

En appliquant dans ce cas les formules du paragraphe 3 (ou immédiatement les formules de M. Fredholm, si $\lambda = 0$), on aura

$$\varphi_p(s) = l_p^{(\lambda)}(s) + \int_a^b Q(s, t)\, l_p^{(\lambda)}(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n_p} a_{p\nu}\chi_{p\nu}(s)\, ds = l_{p+1}(s)$$

avec les équations de condition

$$\int_a^b l_p^{(\lambda)}(s)\, \mu_{p\nu}(s)\, ds = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n_p), \tag{28}$$

où les fonctions $Q(s, t)$, $\chi_{p\nu}(s)$, $\mu_{p\nu}(s)$ et le nombre n_p sont parfaitement définis par la nature de la fonction $k_{p,\lambda}(s, t)$. La fonction $l_{p+1}(s)$ est linéaire par rapport aux constantes

$$\begin{cases} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, \\ a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n_1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ a_{p-1,1}, & a_{p-1,2}, & \ldots, & a_{p-1,n_{p-1}}, \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & \ldots, & a_{p,n_p}. \end{cases} \tag{29}$$

En substituant $l_{p+1}(s)$ au lieu de $\varphi_p(s)$ dans la dernière des équations (26), puis la valeur trouvée de $\varphi_{p-1}(s)$ dans l'équation précédente et ainsi de suite, on exprime toutes les fonctions auxiliaires $\varphi_p(s)$, $\varphi_{p-1}(s)$, ..., $\varphi_1(s)$ et enfin $\varphi(s)$ dans la forme des expressions linéaires par rapport aux constantes (29), les coefficients de ces constantes étant toujours des fonctions de s parfaitement déterminées. Si les conditions (28) et (27) sont remplies, l'expression trouvée plus haut pour $\varphi(s)$ satisfait effectivement à l'équation (1), ce qu'on démontre en s'appuyant sur les formules du paragraphe 3 et en appliquant p fois la partie inverse du théorème du paragraphe 4. En substituant les expressions trouvées pour $\varphi_p(s)$, $\varphi_{p-1}(s)$, ..., $\varphi_1(s)$ dans les équations (27), l'ensemble des formules (27) et (28) forme un système de $n + n_1 + \ldots + n_{p-1} + n_p$ équations linéaires par rapport aux constantes (29) avec les coefficients numériques définis par les quadratures [1]. En tirant de ce système toutes les valeurs pos-

[1] Le nombre des équations et des inconnues diminue, si quelques-uns des

sibles de $n + n_1 + \ldots + n_{p-1} + n_p$ constantes (29) et en les substituant dans l'expression trouvée plus haut pour $\varphi(s)$, on obtient une solution complète de l'équation (1). Si le système d'équations (27) et (28) est incompatible, l'équation (1) n'est pas résoluble. Dans le cas contraire, $\varphi(s)$ peut être une fonction parfaitement déterminée ou peut contenir linéairement des constantes arbitraires, suivant la nature du système d'équations (27) et (28).

Dans le cas où la somme $\sum_{i=0}^{i=m_p}$ s'annule identiquement, la $p^{\text{ième}}$ des équations (25) donne une solution évidente $\varphi_p(s) = l_p(s)$ pour $\varphi_p(s)$, la fonction $l_p(s)$ étant linéaire par rapport à $n + n_1 + \ldots + n_{p-1}$ constantes des $p - 1$ premières lignes du Tableau (29).

Il ne reste donc qu'à opérer sur les équations (26) et (27) d'une façon analogue au cas précédent.

6. On peut simplifier les calculs chaque fois que l'une des fonctions $k_i(s, t)$ dans l'équation (1) ou l'une des fonctions $k_{ji}(s, t)$ dans les formules (25) se réduit à une constante ou à une fonction d'une seule variable s ou t.

Supposons donc que l'équation (1) ou l'une des formules (25) est de la forme

$$\varphi(s) - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\rho} \int_a^b k_{p_\alpha} \varphi^{(p_\alpha)}(t)\, dt - \sum_{\beta=1}^{\beta=\rho_1} \int_a^b k_{p'_\beta}(t)\, \varphi^{(p'_\beta)}(t)\, dt$$
$$- \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\rho_2} \int_a^b k_{p''_\gamma}(s)\, \varphi^{(p''_\gamma)}(t)\, dt - \sum_{\delta=1}^{\delta=\rho_3} \int_a^b k_{p'''_\delta}(s, t)\, \varphi^{(p'''_\delta)}(t)\, dt = l(s).$$

Les indices p_α, p'_β, p''_γ, p'''_δ sont des nombres entiers non négatifs différents, et k_{p_α} sont des constantes données [pour abréger, les indices inférieurs de $\varphi(s)$ et $l(s)$ sont omis].

---

noyaux $k_{j0}(s, t)$ s'annulent identiquement ou si, pour certaines valeurs de l'indice j, $k_{j0}(s, t)$ et le déterminant D_{j0} sont simultanément différents de zéro. Dans ces cas, on peut supprimer une ou plusieurs des lignes du Tableau (29) et et omettre les groupes d'équations (27) correspondants.

Posons dans ce cas

$$(30)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\rho}\int_a^b k_{p_\alpha}\varphi^{(p_\alpha)}(t)\,dt + \sum_{\beta=1}^{\beta=\rho_1}\int_a^b k_{p'_\beta}(t)\,\varphi^{(p'_\beta)}(t)\,dt = c, \\ \displaystyle\int_a^b \varphi^{(p''_\gamma)}(t)\,dt = c_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, \rho_2), \end{cases}$$

d'où

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\rho_2}\int_a^b k_{p''_\gamma}(s)\,\varphi^{(p''_\gamma)}(t)\,dt = c_1 k_{p''_1}(s) + c_2 k_{p''_2}(s) + \ldots + c_{\rho_2} k_{p''_{\rho_2}}(s),$$

$c, c_1, c_2, \ldots, c_{\rho_2}$ étant des constantes. En traitant ces constantes comme des quantités connues, on poursuit la solution jusqu'à obtenir les fonctions $\varphi_p(s)$, $\varphi_{p-1}(s)$, ..., $\varphi_1(s)$ et $\varphi(s)$ dans la forme des expressions linéaires par rapport aux constantes (29) et $c, c_1, \ldots, c_{\rho_2}$. On ramène donc la résolution de l'équation (1) à la discussion d'un système de $n + n_1 + \ldots + n_p + \rho_2 + 1$ (éventuellement, $n + n_1 + \ldots + n_{p-1} + \rho_2 + 1$) équations linéaires par rapport aux constantes (29) et $c, c_1, \ldots, c_2$, qui est fourni par les formules (27), (28) et (30) [ou (27) et (30)]. Le raisonnement ne change pas, si l'on applique la méthode indiquée plusieurs fois pendant la résolution.

7. On peut donner une autre méthode pour résoudre l'équation intégrale (1), si l'on admet que les fonctions $k_i(s, t)$ ont des dérivées $\frac{\partial^{\alpha+\beta} k_i(s, t)}{\partial s^\alpha \partial t^\beta}$ continues dans l'intervalle $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$, les indices α et β étant soumis aux conditions $\alpha \leqq m$, $\beta \leqq m$; de plus, on suppose, comme auparavant, que la fonction $f(s)$ et la fonction cherchée $\varphi(s)$ ont m dérivées successives, dont la dernière est aussi continue dans l'intervalle (a, b). Cette seconde méthode donne aussi que la première, la fonction cherchée, dans la forme d'une expression linéaire par rapport aux certaines constantes qui doivent satisfaire à un système d'équations linéaires.

En écrivant l'équation (1) dans la forme

$$(31)\quad \varphi(s) - \int_a^b k_0(s, t)\,\varphi(t)\,dt - \sum_{i=1}^{i=m}\int_a^b k_i(s, t)\,\varphi^{(i)}(t)\,dt = f(s),$$

et en intégrant le terme $\int_a^b k_i(s, t)\varphi^{(i)}(t)\,dt$, i fois parties, on aura, pour $(i = 1, 2, \ldots, m)$,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
\int_a^b k_1(s, t)\varphi'(t)\,dt &= \Big/_{t=a}^{t=b} k_1\varphi(t) - \int_a^b \frac{\partial k_1}{\partial t}\varphi(t)\,dt,\\
\int_a^b k_2(s, t)\varphi''(t)\,dt &= \Big/_{t=a}^{t=b}\left[k_2\varphi'(t) - \frac{\partial k_2}{\partial t}\varphi(t)\right] + \int_a^b \frac{\partial^2 k_2}{\partial t^2}\varphi(t)\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\int_a^b k_m(s, t)\varphi^{(m)}(t)\,dt &= \Big/_{t=a}^{t=b}\Big[k_m\varphi^{(m-1)}(t)\\
&\qquad - \frac{\partial k_m}{\partial t}\varphi^{(m-2)}(t) - \frac{\partial^2 k_m}{\partial t^2}\varphi^{(m-3)}(t) - \ldots\\
&\qquad + (-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1} k_m}{\partial t^{m-1}}\varphi(t)\Big]\\
&\qquad - (-1)^m \int_a^b \frac{\partial^m k_m}{\partial t^m}\varphi(t)\,dt,
\end{aligned}\right.$$

où, pour abréger, les arguments s et t sont omis dans les seconds membres.

En substituant ces valeurs des termes $\int_a^b k_i(s, t)\varphi^{(i)}(t)\,dt$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ dans l'équation (31) et en introduisant les désignations

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
p(s, t) &= k_0 - \frac{\partial k_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 k_2}{\partial t^2} - \ldots + (-1)^m \frac{\partial^m k_m}{\partial t^m},\\
p_1(s, t) &= k_1 - \frac{\partial k_2}{\partial t} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1} k_m}{\partial t^{m-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p_\lambda(s, t) &= k_\lambda - \frac{\partial k_{\lambda+1}}{\partial t} + \ldots + (-1)^{m-\lambda}\frac{\partial^{m-\lambda} k_m}{\partial t^{m-\lambda}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p_m(s, t) &= k_m,
\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(34)\quad \varphi(s) - \int_a^b p(s, t)\varphi(t)\,dt = \Big/_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(s, r)\varphi^{(i-1)}(r) + f(s),$$

d'où suit, par les formules de M. Fredholm,

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi(s) &= f(s) + \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(s, r)\, \varphi^{(i-1)}(r) + \int_a^b \mathrm{P}(s, t) \\
&\qquad \times \left[f(t) + \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(t, r)\, \varphi^{(i-1)}(r) \right] dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s) \\
&= f(s) + \int_a^b \mathrm{P}(s, t) f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s) \\
&\qquad + \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} \left[p_i(s, r) + \int_a^b \mathrm{P}(s, t)\, p_i(t, r)\, dt \right] \varphi^{(i-1)}(r)
\end{aligned}
\right.
$$

avec les équations de condition

$$
(36)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_a^b \left[f(s) + \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(s, r)\, \varphi^{(i-1)}(r) \right] \mu_\nu(s)\, ds = 0 \\
&\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans les formules (35) et (36), $\mathrm{P}(s, t)$, n, a_ν, $\chi_\nu(s)$, $\mu_\nu(s)$ sont définis conformément aux conventions du paragraphe 2. En posant

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
&f(s) + \int_a^b \mathrm{P}(s, t) f(t)\, dt + \sum_{i=1}^{i=n} a_\nu \chi_\nu(s) = l(s), \\
&p_i(s, r) + \int_a^b \mathrm{P}(s, t)\, p_i(t, r)\, dt = q_i(s, r),
\end{aligned}
\right.
$$

l'équation (35) s'écrit

$$
(38)\quad \varphi(s) = l(s) - \sum_{i=1}^{i=m} [q_i(s, b)\, \varphi^{(i-1)}(b) - q_i(s, a)\, \varphi^{(i-1)}(a)] \quad (^1).
$$

Introduisons les désignations

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi(a) = \mathrm{A}_0, \quad \varphi'(a) = \mathrm{A}_1, \quad \ldots, \quad \varphi^{(m-1)}(a) = \mathrm{A}_{m-1}, \\
&\varphi(b) = \mathrm{B}_0, \quad \varphi'(b) = \mathrm{B}_1, \quad \ldots, \quad \varphi^{(m-1)}(b) = \mathrm{B}_{m-1},
\end{aligned}
\right.
$$

---

(1) Dans le cas où $p(s, t)$ s'annule identiquement, on remplace la formule (38) par l'équation (34). Ce cas rentre dans les formules générales, en posant

$$
\mathrm{P}(s, t) = a_1 = \chi_1(s) = \mu_1(s) = 0 \qquad (n = 1).
$$

différentions l'équation (38) $m-1$ fois, et posons dans l'équation (38) et dans chacune des équations dérivées, successivement, $s=a$ et $s=b$. On aura un système de $2m$ équations

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_0 &= l(a) + \sum_{i=1}^{i=m} [q_i(a,b) B_{i-1} - q_i(a,\alpha) A_{i-1}],\\
A_1 &= l'(a) + \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{\partial q_i(a,b)}{\partial a} B_{i-1} - \Big/_{\alpha=a} \frac{\partial q_i(a,\alpha)}{\partial a} A_{i-1}\right],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_\lambda &= l^{(\lambda)}(a) + \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{\partial^\lambda q_i(a,b)}{\partial a^\lambda} B_{i-1} - \Big/_{\alpha=a} \frac{\partial^\lambda q_i(a,\alpha)}{\partial a^\lambda} A_{i-1}\right],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{m-1} &= l^{(m-1)}(a) + \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{\partial^{m-1} q_i(a,b)}{\partial a^{m-1}} B_{i-1} - \Big/_{\alpha=a} \frac{\partial^{m-1} q_i(a,\alpha)}{\partial a^{m-1}} A_{i-1}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
B_0 &= l(b) + \sum_{i=1}^{i=m} [q_i(b,b) B_{i-1} - q_i(b,a) A_{i-1}],\\
B_1 &= l'(b) + \sum_{i=1}^{i=m} \left[\Big/_{\beta=b} \frac{\partial q_i(b,\beta)}{\partial b} B_{i-1} - \frac{\partial q_i(b,a)}{\partial b} A_{i-1}\right],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_{m-1} &= l^{(m-1)}(b) + \sum_{i=1}^{i=m} \left[\Big/_{\beta=b} \frac{\partial^{m-1} q_i(b,\beta)}{\partial b^{m-1}} B_{i-1} - \frac{\partial^{m-1} q_i(b,a)}{\partial b^{m-1}} A_{i-1}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (40) et (41) contiennent $2m$ coefficients inconnus $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$; $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ et de plus les n constantes a_1, $a_2, \ldots, a_n$ qui entrent linéairement dans les fonctions $l(a)$ et $l(b)$ et dans leurs dérivées successives. En écrivant les équations (36) dans la forme

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_a^b f(s)\,\mu_\nu(s)\,ds + \sum_{i=1}^{i=m} \Big[B_{i-1} \int_a^b p_i(s,b)\,\mu_\nu(s)\,ds\\
&\qquad - A_{i-1} \int_a^b p_i(s,a)\,\mu_\nu(s)\,ds \Big] = 0\\
&\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}
\right.
$$

on voit que les formules (40), (41), (42) forment un système de

$2m+n$ équations linéaires avec le même nombre des inconnues $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$; $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$; $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Ce système doit être compatible, s'il existe une solution de l'équation (31). La fonction cherchée $\varphi(s)$ est donnée, conformément aux équations (38) et (39), par la formule

$$(43) \qquad \varphi(s) = l(s) + \sum_{i=1}^{i=m} [q_i(s, b) B_{i-1} - q_i(s, a) A_{i-1}],$$

où les constantes $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$; $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfont aux équations (40), (41), (42). Réciproquement, si les équations (40), (41), (42) sont compatibles, en les résolvant par rapport aux constantes $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$; $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et en substituant les valeurs de ces constantes dans le second membre de la formule (43), on obtient une solution de l'équation (31). En effet, en posant dans l'équation (43) $s = a$, en différentiant la même équation (43) λ fois par rapport à s et en posant de nouveau $s = a$, on aura, en tenant compte des équations (41),

$$\varphi(a) = l(a) + \sum_{i=1}^{i=m} [q_i(a, b) B_{i-1} - q_i(a, \alpha) A_{i-1}] = A_0,$$

$$\varphi^{(\lambda)}(a) = l^{(\lambda)}(a) + \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{\partial^\lambda q_i(a, b)}{\partial a^\lambda} B_{i-1} - \Big/_{\alpha=a} \frac{\partial^\lambda q_i(a, \alpha)}{\partial a^\lambda} \right] = A_\lambda$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m-1).$$

On trouve de même

$$\varphi^{(\lambda)}(B) = B_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Il en résulte que la fonction $\varphi(s)$, définie par la formule (43), les conditions (40), (41), (42) étant remplies, satisfait aux équations (39).

En s'appuyant sur les formules (39) et (37), on peut donc écrire les équations (42) et (43) dans la forme

$$\int_a^b f(s) \mu_\nu(s)\, ds + \sum_{i=1}^{i=m} [p_i(s, b) \varphi^{(i-1)}(b) - p_i(s, a) \varphi^{(i-1)}(a)] \mu_\nu(s)\, ds$$

$$= \int_a^b \left[f(s) + \Big/_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(s, r) \varphi^{(i-1)}(r) \right] \mu_\nu(s)\, ds = 0$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

et

$$\varphi(s) = l(s) + \sum_{i=1}^{i=m} [q_i(s, b)\varphi^{(i-1)}(b) - q_i(s, a)\varphi^{(i-1)}(a)]$$

$$= l(s) + \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} q_i(s, r)\varphi^{(i-1)}(r)$$

$$= f(s) + \int_a^b \mathrm{P}(s, t) f(t)\, dt - \sum_{\nu=1}^{i=n} a_\nu \chi_\nu(s)$$

$$+ \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} \left[p_i(s, r) + \int_a^b \mathrm{P}(s, t) p_i(t, r)\, dt \right] \varphi^{(i-1)}(r)$$

$$= f(s) + \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(s, r)\varphi^{(i-1)}(r)$$

$$+ \int_a^b \mathrm{P}(s, t) \left[f(t) + \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(t, r)\varphi^{(i-1)}(r) \right] dt + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \chi_\nu(s).$$

La fonction $\varphi(s)$ satisfait donc aux équations (35) et (36), qui entraînent, conformément à la théorie de l'équation de Fredholm, l'équation (34). En écrivant l'équation (34) dans la forme

$$\varphi(s) - \int_a^b p(s, t)\varphi(t)\, dt - \int_{r=a}^{r=b} \sum_{i=1}^{i=m} p_i(s, r)\varphi^{(i-1)}(r) = f(s),$$

on a, en vertu de (33) et (32),

$$\varphi(s) - \int_a^b k_0(s, t)\varphi(t)\, dt - \sum_{i=1}^{i=m} \int_a^b k_i(s, t)\varphi(t)\, dt = f(s).$$

Pour trouver toutes les solutions possibles de l'équation (31), il suffit donc de substituer dans le second membre de la formule (43) toutes les valeurs possibles des constantes $a_1, \ldots, a_n$; $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$; $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$, tirées de l'ensemble d'équations (40), (41), (42).

Si la fonction $p(s, t)$ se réduit à une constante ou à une fonction d'une seule variable s ou t, on simplifie les calculs par la méthode du paragraphe 6.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

HORACE LAMB. — *Lehrbuch der Hydrodynamik.* Deutsche Ausgabe von *Joh. Friedel.* XIV-788 p. av. 79 fig. (*Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* N° 36.) Leipzig, Teubner. Relié, 20 m.

APPELL (P.) et CHAPPUIS (J.). — *Leçons de Mécanique élémentaire.* 2e édit. 2 vol. in-16, av. fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

BRILLOUIN (M.). — *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz.* 2e PARTIE : *Viscosité des gaz. Caractères généraux des théories moléculaires.* In-8°, 146 p. av. fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

THOMSON (J.-J.). — *The corpuscular theory of matter.* In-8°, 180 p. London, Constable. 7 sh. 6 d.

Annales de l'Observatoire d'Astronomie physique de Paris, publiées par J. JANSSEN. T. III, 2e fasc. In-4°, avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

BACHMANN (Paul). — *Grundlehren der neueren Zahlentheorie.* In-8°, XI-271 p. Leipzig, Göschen. (Sammlung Schubert, LIII.). Relié, 6 m. 50 pf.

BRYANT (W.-W.). — *A history of Astronomy.* In-8°. London, Methuen. 7 sh. 6 d.

CHARLIER (Carl-Ludw.). — *Die Mechanik des Himmels.* Vorlesungen. II. Bd. 2. Abt. Gr. in-8°. Leipzig, Veit et C°. 6 m.

DOKULIL (Theod.). — *Anleitung für die Herstellung u. Justierung geodätischer Instrumente.* 1. Tl. In-8, VIII-252 p., avec fig. Berlin, Administration des *Mechaniker.* 5 m. 50 pf.; relié, 6 m. 50 pf.

HEIBERG (J.-L.) u. ZEUTHEN (H.-G.). — *Eine neue Schrift des Archimedes.* (Sonderdr.) In-8°, avec fig. Leipzig, Teubner. 1 m. 60 pf.

ROUSE BALL (W.-W.). — *Histoire des Mathématiques.* Trad. sur la 3e édit. anglaise par *L. Freund.* T. II. In-8°, 278 p. Paris, Hermann.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ELLIPSOGRAPHE CARONNET, construit par MM. Coppin frères, 78, rue de la Verrerie, Paris, 1907. Prix : 32fr.

On sait que le dessin de l'ellipse présente de sérieuses difficultés qui ont déterminé les constructeurs et les architectes à la remplacer le plus souvent par des combinaisons d'arcs de cercle ou à ne l'employer que lorsqu'ils ne peuvent faire autrement. Aussi a-t-on essayé de construire des ellipsographes, c'est-à-dire des appareils pouvant jouer dans la description de l'ellipse le même rôle que le compas dans le tracé d'un arc de cercle.

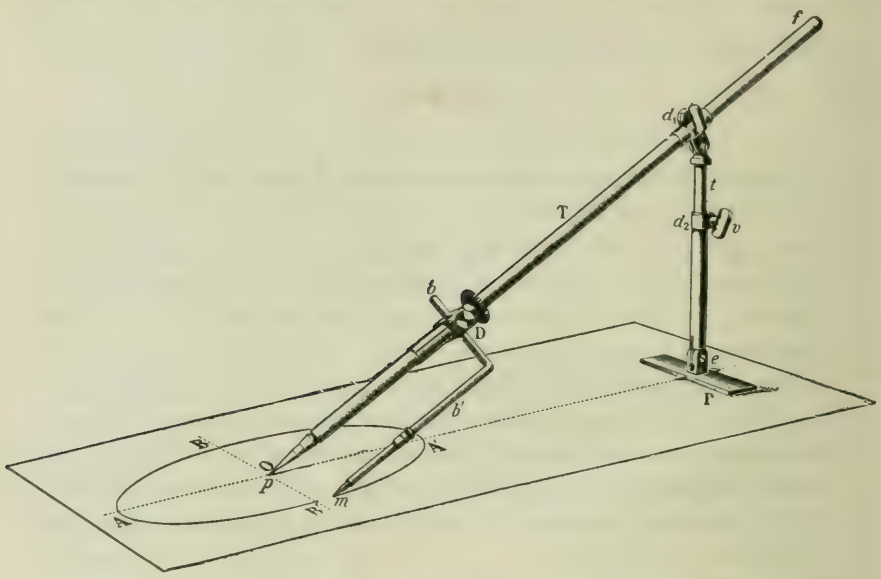
Tous les principes possibles ont été employés pour la construction de ces instruments. Celui que nous présentons à nos lecteurs et qui a été imaginé par M. Caronnet n'est donc pas essentiellement nouveau ; mais il a paru commode et pratique à plusieurs de ceux qui l'ont employé. C'est pour cela que nous croyons utile de le faire connaître ici.

Il se compose d'une tige cylindrique T qui repose sur le papier par sa pointe p et qui est maintenue à son autre extrémité au moyen d'une douille d_1 articulée à une tige t; cette tige peut coulisser dans la douille d_2 et y être fixée au moyen d'une vis de serrage v; à l'extrémité e s'articule un patin P qui s'applique sur la feuille de papier. Sur la tige T coulisse à frottement doux et sans jeu une douille D portant une partie saillante dans laquelle peut glisser et à laquelle peut être fixée la branche b d'une tige coudée dont l'autre branche b' porte la pointe traçante m qui glisse sur le papier.

Dans le déplacement de la douille D, la pointe m reste à une distance constante de l'axe de T ; elle se déplace donc sur la surface d'un cylindre de révolution autour de cet axe, et, quand elle glisse sur la feuille de papier, elle décrit une section plane de ce cylindre, c'est-à-dire une ellipse.

Supposons qu'on veuille tracer une ellipse donnée par ses deux axes AA′, BB′.

On place l'appareil de façon que la pointe p soit au centre O de l'ellipse et que les deux repères du patin soient sur le prolongement du grand axe ; ensuite, on amène la pointe traçante m sur la droite qui porte le petit axe, et, en faisant glisser la branche b



ou en faisant tourner la branche b' autour de b, on fait coïncider cette pointe avec l'un des sommets B ou B′; on fixe alors b au moyen de la vis de serrage.

Quelle que soit l'inclinaison de T, toutes les ellipses qu'on pourra tracer avec l'appareil, ayant subi ce premier réglage, auront même grandeur de petit axe.

Pour obtenir celle de ces ellipses qui a pour grand axe AA′, il suffit, au moyen de la douille d_1 et du support à tirage te, de donner à T une inclinaison telle que la pointe traçante m occupe sur la droite AA′ l'une des positions A ou A′.

Ceci fait, pour tracer la courbe, on se place derrière le support à tirage de façon à avoir l'appareil de profil, on tient de la main gauche l'extrémité f de la tige T et avec la main droite on dirige la douille D de façon que la pointe traçante glisse sur la feuille de papier.

Pour les ellipses très allongées, il est bon de tracer d'abord les deux arcs latéraux ; on obtient ensuite les arcs voisins des sommets du grand axe, en tournant lentement la douille D et en laissant cette douille effectuer elle-même son mouvement de descente ou d'ascension.

Les ellipses qui ne sont pas très allongées (les plus difficiles à tracer par points) se décrivent en une seule fois, comme les circonférences à l'aide du compas de cercle.

OSGOOD (W.-F.). — A FIRST COURSE IN THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS. 1 volume in-8, XV-423 pages. New-York, Macmillan, 1907.

Il n'est pas malaisé de distinguer, dans les diverses publications de M. Osgood, le souci de la meilleure forme à donner à l'enseignement, souci bien digne d'un savant qui souhaite que la science à laquelle il s'est adonné continue de progresser et que les jeunes gens qui se sentent attirés vers cette science, dont le développement même risque de les effrayer, aient plus de temps à consacrer aux problèmes qu'elle pose, parce qu'ils auront acquis plus rapidement et plus facilement des connaissances solides et étendues. C'est à ce désir que répond la publication du premier Volume de ce *Lehrbuch der Funktionentheorie* dont le *Bulletin* a rendu compte récemment.

L'Ouvrage que nous annonçons aujourd'hui s'adresse à un tout autre public : il est écrit pour les jeunes gens qui commencent à étudier le Calcul différentiel et intégral. Il correspond, à très peu près, à ces cours de Mathématiques générales, qui se sont organisés dans presque toutes nos Facultés des Sciences, parce que les mêmes besoins se font sentir partout. L'auteur ne se propose pas ici de présenter les choses sous la forme la plus générale, la plus logique, la plus arithmétique, mais bien sous une forme simple, pratique, accessible aux débutants : les exemples, les exercices faciles abondent. M. Osgood a recherché les applications qui se rapportent à la Physique, à la Mécanique, à la vie ordinaire. Ces applications seront précieuses, non seulement aux étudiants, mais à tous ceux qui ont à enseigner les sujets que traite M. Osgood.

Quant au texte, il m'a paru aussi clair qu'on peut le souhaiter. L'auteur, tout en s'attachant à donner aux démonstrations un caractère intuitif, a pris grand soin d'éviter les formes de langage qui prêtent à de fausses interprétations, et même de prévenir le lecteur contre les erreurs possibles, contre celles en particulier dont l'expérience montre qu'elles sont fréquentes chez les étudiants.

Il ne serait pas sans intérêt de distinguer celles de ces erreurs qui résultent de la nature même de l'esprit humain et celles qui proviennent d'un mauvais enseignement antérieur. Cette distinction, toutefois, n'est peut-être pas bien précise, car il y a sans doute des raisons psychologiques aux mauvaises habitudes, dans l'enseignement. Ce n'est pas avec M. Osgood que les étudiants risquent de prendre de pareils défauts, et quelques-uns, sans doute, en suivant un cours plus élevé, reconnaîtront la valeur des habitudes qu'ils auront prises avec lui. J. T.

BOCHER (M.). — Introduction to higher Algebra, prepared for publication with the cooperation of *E.-P.-R. Duval*. 1 volume in-8°, XI-321 pages. New-York, Macmillan, 1907.

Voici un Livre d'une lecture facile et agréable qu'on peut recommander sans crainte aux étudiants en Mathématiques. L'auteur l'a écrit pour répondre aux besoins des étudiants américains; mais ces besoins sont les mêmes, sans doute, dans tous les pays. La nécessité d'amener rapidement les étudiants à une connaissance suffisante de l'Analyse oblige à restreindre les programmes des cours, à laisser de côté ou à écourter bien des théories qui valent par elles-mêmes et qui sont indispensables pour ceux qui veulent pousser un peu loin leurs études mathématiques. Ces théories, à cause de leurs développements considérables, effraient souvent plus que de raison les commençants qui ne savent comment les aborder. Il faut les *introduire* dans ces théories, les familiariser avec les définitions, les idées essentielles, leur en montrer la portée. Chez nous, par exemple, plusieurs des sujets que traite M. Bôcher, comme la théorie des équations linéaires, des formes

quadratiques, des invariants, ont figuré ou figurent encore, en partie du moins, dans les programmes de la classe de Mathématiques spéciales : les jeunes gens qui sortent de cette classe, qui entrent dans les grandes Écoles ou dans les Universités, seraient parfaitement préparés à lire son Livre. Ceux qui voudront prendre ce plaisir s'émerveilleront de la quantité de choses qu'ils ne savaient qu'à moitié, de l'importance des idées nouvelles qu'ils acquerront, de l'ordre et de la clarté que ces idées apportent dans les faits qu'ils connaissaient déjà ou qu'ils apprennent ; quelques-uns peut-être, oubliant tout ce qu'ils avaient à apprendre, s'indigneront de ce qu'on ne leur ait rien dit de tout cela, ou de n'avoir pas même eu sous la main un Livre où ils auraient pu acquérir ces connaissances. S'ils poursuivent leurs études, ils seront reconnaissants à M. Bôcher de la facilité qu'ils trouveront à lire tel Mémoire ou tel Traité que, faute d'une préparation suffisante, ils auraient laissé de côté comme exigeant trop d'efforts.

C'est bien une *Introduction* qu'a écrite M. Bôcher. S'il avait voulu se borner à résumer, d'une façon sèche, les faits algébriques, d'ailleurs très importants, qu'il avait en vue, il aurait pu réduire de beaucoup son Livre ; mais, ces faits, il a voulu vraiment les expliquer, en montrer le sens, l'origine et la portée : il ne craindra pas, au besoin, de reprendre une question à ses débuts, dans ce qu'elle a de plus élémentaire : c'est ce qu'il fait, par exemple, pour la théorie du plus grand commun diviseur, qu'il reprend dans son origine arithmétique, qu'il développe successivement dans le cas des polynomes à une, deux, trois, ... variables, de manière à bien faire comprendre ce qu'est un polynome irréductible (dans un corps numérique quelconque), ce qu'est la décomposition d'un polynome en facteurs irréductibles, la décomposition d'une courbe algébrique en plusieurs autres, l'intersection de deux courbes algébriques, de manière à préparer la théorie de l'élimination et à pouvoir montrer, quelques pages plus loin, que les facteurs irréductibles d'un invariant sont des invariants. De même, les propositions élémentaires sur le calcul des matrices donnent l'occasion d'introduire le lecteur dans l'idée de groupe. C'est, chez l'auteur, une préoccupation constante que de montrer d'où viennent les idées et où elles conduisent.

L'Algèbre est si vaste qu'il y faut, sans doute, plusieurs *intro-*

ductions; M. Bôcher a laissé entièrement de côté la théorie des équations algébriques, la théorie de Galois, en particulier ; on ne peut, assurément, le lui reprocher, tout au plus pourrait-on souhaiter qu'il écrivît aussi une introduction à cette théorie. Quoi qu'il en soit, les sujets qu'il a traités, importants en eux-mêmes, sont indispensables à une étude un peu approfondie de la Géométrie analytique, et c'est là, au moins en partie, ce qui a dû déterminer le choix de l'auteur. Celui-ci reste dans l'Algèbre, mais il indique ou développe les applications à la Géométrie analytique et insiste, s'il y a lieu, sur l'origine géométrique des théories algébriques qu'il expose. En fait, il suppose chez son lecteur plus de connaissances en Géométrie analytique qu'en Algèbre, où il ne lui demande, en dehors des connaissances tout à fait élémentaires, que quelque habitude des déterminants.

On remarquera l'importance des exercices rassemblés à la fin, ou disséminés à l'intérieur des Chapitres, qui, suivant l'habitude ordinaire des *text-books* américains, sont très courts et représentent la valeur d'une petite leçon. Quelques-uns de ces exercices sont de simples applications ; la plupart sont théoriques : ils tendent à provoquer la réflexion de l'étudiant sur ce qu'il vient de lire et à le conduire un peu plus loin, plutôt qu'à lui faire étudier ou découvrir un fait particulier, sans grande importance. Le lecteur, qui poursuivra ses études, ne manquera pas de reconnaître le bénéfice qu'il aura tiré de ses propres réflexions sur ces exercices et des *suggestions* que lui propose parfois M. Bôcher.

Après avoir rappelé quelques définitions et propositions fondamentales concernant les polynomes, l'auteur donne quelques développements sur les déterminants (règle de Laplace, multiplication, déterminants adjoints, etc.); il expose, de la façon la plus simple et la plus claire, la théorie de la dépendance linéaire et des équations linéaires ainsi que les propositions fondamentales concernant le calcul des matrices; il introduit ensuite la notion d'invariant, absolu ou relatif.

Quelques indications indispensables sur les formes bilinéaires précèdent la théorie des formes quadratiques, que l'auteur introduit en partant de leur signification géométrique, de façon à permettre l'interprétation des notions essentielles (rang, décomposition en carrés, invariants, ...). L'auteur traite successivement

du système d'une forme quadratique et d'une ou plusieurs formes linéaires, puis du système de deux formes quadratiques : la réduction simultanée à des sommes de carrés est traitée dans le cas où l'équation en λ a toutes ses racines simples et dans le cas où l'une des formes est définie ; la question de la réduction simultanée à des formes normales sera reprise à la fin de l'Ouvrage.

J'ai déjà eu l'occasion de dire plus haut un mot de la façon dont l'auteur développe la théorie du plus grand commun diviseur et les théories connexes. Il traite ensuite des fonctions symétriques de n variables, ou de n couples de variables.

Enfin, les derniers Chapitres du Livre sont consacrés à l'étude des matrices carrées dont les éléments sont des polynomes en λ et aux applications de cette théorie. La définition de l'équivalence de deux pareilles matrices conduit sans peine à une forme normale, à laquelle peut être ramenée toute matrice et d'où ressortent aisément la définition et les propriétés des *diviseurs élémentaires*. Le cas où les éléments de la matrice sont des fonctions du premier degré en λ s'impose dans l'étude des faisceaux de formes bilinéaires ou quadratiques, et l'étude de ce cas conduit à la notion de couples équivalents de telles formes, ainsi qu'à leur classification.

J. T.

AMODEO (F.). — Lezioni di Geometria projettiva dettate nella R. Università di Napoli. 3e édition. 1 volume in-8, xiv-456 pages. Naples, Pierro, 1905.

Ces leçons sont le résultat d'un enseignement qui s'est continué pendant plus de vingt ans, et sur les matières duquel l'auteur n'a pas cessé de réfléchir. Il n'a cru devoir les imprimer qu'après leur avoir donné une forme définitive ; mais deux éditions lithographiées avaient précédé la présente édition imprimée.

Elles ont un caractère élémentaire, en ce sens qu'elles ne supposent chez le lecteur que très peu de connaissances géométriques. Encore ce *connu* que l'on suppose n'est-il pas logiquement nécessaire pour l'intelligence de l'Ouvrage, dans ce qu'il a d'essentiel,

mais seulement pour l'intelligence des applications à la Géométrie euclidienne. Elles sont encore élémentaires, en ce sens que l'auteur donne toutes les explications désirables pour la parfaite clarté. Elles sont d'ordre élevé, en ce qu'elles supposent chez le lecteur cette habitude de l'abstraction et des idées générales, qu'on ne peut avoir acquise que par une forte éducation mathématique antérieure. Elles le sont encore, parce que l'auteur s'efforce précisément de présenter toujours les idées sous leur forme la plus abstraite et la plus générale; c'est aussi la plus simple, celle où l'enchaînement logique apparaît le mieux, pour le lecteur qui est capable de saisir les choses en elles-mêmes et non pas seulement sur des exemples particuliers; lorsqu'il s'est vraiment rendu compte de cet enchaînement logique, il a en puissance tous les exemples particuliers; il passe très aisément de l'un à l'autre, il a conscience de l'unité d'une méthode qui s'applique à des figures très différentes.

M. Amodeo a, d'ailleurs, le souci de familiariser son lecteur avec les applications diverses, soit par les exemples indiqués brièvement en note, soit par les développements relatifs à la Géométrie euclidienne, regardée comme cas particulier de la Géométrie projective, soit par les nombreux exercices placés à la fin de chaque Chapitre.

Le système de postulats qu'il adopte, et qu'il avait communiqué à l'Académie des sciences de Turin [1], est simple et naturel. Il est développé dans une intéressante Introduction, où la richesse des conclusions qui résultent de l'indétermination des concepts auxquels ces postulats s'appliquent est bien mise en évidence.

L'Ouvrage est divisé en deux Parties; on traite, dans l'une, des formes du premier ordre; dans l'autre, des formes du second ordre.

Les groupes harmoniques sont définis graphiquement au moyen du quadrilatère. Cette définition permet ensuite, comme on sait, de définir les rapports anharmoniques entiers et rationnels, d'établir enfin une correspondance entre les nombres réels et les points d'une droite. Les points imaginaires sont définis et séparés par le procédé que l'on doit à von Standt; ce sujet n'est pas sans diffi-

---

[1] *Atti del Accademia delle Scienze di Torino*, mars 1891.

culté; l'exposition qu'en donne M. Amodeo m'a paru très lumineuse.

Le Livre de M. Amodeo a un caractère nettement géométrique; toutefois, les quelques mots qui précèdent suffisent à montrer que l'auteur n'est pas de ceux auxquels répugne l'introduction du nombre dans la Géométrie projective, considérée comme « la branche des sciences mathématiques qui étudie les propriétés des formes, appartenant à un espace à un nombre quelconque de dimensions, qui ne sont pas altérées par les transformations projectives ». Ceux qui acceptent ainsi la fusion de la Géométrie projective et de la Géométrie analytique restent d'ailleurs libres de se placer de préférence soit à un point de vue, soit à l'autre.

J. T.

CASTELNUOVO (G.). — Lezioni di Geometria analitica e projettiva. Volume II : Geometria analitica delle spazio. Superficie di secondo ordine. 1 volume in-8, 252 pages. Rome, Albrighi, 1905.

Nous avons eu l'occasion [1], à propos du premier Volume des *Leçons de Géométrie analytique et projective* de M. Castelnuovo, de dire quels étaient le caractère et le mérite de cet Ouvrage. Il est sans doute très inutile de louer à nouveau des qualités que tout le monde s'attendait à trouver dans un Livre de l'éminent géomètre. Je me borne à rappeler qu'il est surtout écrit pour des étudiants qui se destinent à être ingénieurs; tous trouveront dans le texte une excellente exposition, et dans les exercices, qui sont très copieux, le moyen, d'une part, de s'assurer qu'ils sont capables d'appliquer les théories et, d'autre part, de développer leurs connaissances.

Il n'y a pas lieu, dans ce Volume, qui traite du plan, de la droite, des surfaces du second degré, de signaler des différences notables avec les habitudes françaises. Un élève de la classe de Mathématiques spéciales, entre les mains duquel on mettrait le Livre de M. Castelnuovo, ne se sentirait nullement dépaysé. Peut-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVIII, 1904, p. 67.

être le sujet développé dans le cinquième Chapitre, la projectivité de deux espaces, n'est-il pas, chez nous, traité par tous les professeurs; mais il est exposé d'une façon très sage et très modérée; l'auteur se borne à des indications essentielles, et qui trouvent de fréquentes applications.

Les figures sont faites avec grand soin; il est impossible qu'elles ne se gravent pas dans l'esprit des étudiants. J. T.

AMES (L.-D.). — ARITHMETIC TREATMENT OF SOME PROBLEMS IN ANALYSIS SITUS. A dissertation submitted to the Faculty of arts and sciences of Harvard University in satisfaction of the requirement of a thesis for the degree of doctor of Philosophy. 38 pages, in-4°. Baltimore, 1905.

Une *courbe de Jordan* est, comme l'on sait, l'ensemble des points (x, y) définis par des formules telles que

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1),$$

où $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle (t_0, t_1), telles que les équations en t', t''

$$\varphi(t') = \varphi(t''), \qquad \psi(t') = \psi(t'')$$

soient vérifiées en prenant l'une des inconnues égale à t_0, l'autre à t_1, et n'admettent pas dans l'intervalle (t_0, t_1) d'autres solutions où les inconnues soient distinctes. M. Jordan a montré [1] qu'une pareille courbe sépare le plan en deux continuums, dont la courbe constitue la frontière commune; tout point du plan qui n'appartient pas à la courbe appartient à l'un ou à l'autre de ces deux continuums, dont l'un, qui contient les points très éloignés du plan, est dit *extérieur*, l'autre est *intérieur*. On ne peut joindre un point de l'un des continuums à un point de l'autre par une courbe continue qui n'ait aucun point commun avec la courbe séparatrice. Cette proposition, qui semble à peu près évidente quand on pense à un de ces contours fermés auxquels nous sommes habitués, est très difficile à démontrer.

---

[1] *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. I, 1893, p. 90.

La démonstration de M. Jordan, fondée sur la vérité de la proposition dans le cas d'un polygone, a un caractère géométrique. M. Schœnflies a appelé l'attention sur la nécessité de démontrer d'une façon arithmétique ce théorème, dont l'importance, pour la théorie des fonctions, est capitale, et il a donné une démonstration ([1]) qui a bien, en général, le caractère arithmétique, mais qui a besoin d'être complétée sur quelques points. La démonstration de M. Ames, dont il va être question, a été communiquée en décembre 1903 à la Société mathématique américaine, et publiée en 1904 dans le *Bulletin* de cette Société ([2]). La même année, dans le même Recueil, M. G. A. Bliss ([3]) a donné une autre démonstration. M. O. Veblen ([4]) a donné une démonstration géométrique, fondée sur un système d'axiomes qu'il a développé dans le même Mémoire, et à laquelle il est aisé de donner le caractère arithmétique ([5]). Enfin, il convient de signaler encore, avec M. Ames, l'esquisse qu'a donnée M. de la Vallée-Poussin, dans son *Cours d'Analyse infinitésimale*, qu'il serait d'autant plus intéressant de compléter que l'auteur ne particularise en rien les courbes de Jordan.

Le Mémoire de M. Ames que nous signalons comprend deux Parties, dont la première, qui se rapporte surtout à la question qu'on vient de rappeler, est traitée avec tous les détails que peut désirer un mathématicien qui veut, sans se donner aucune peine, être bien convaincu du caractère purement analytique de la démonstration. La seconde Partie, traitée plus largement, est consacrée au théorème analogue dans l'espace et s'appuie sur les mêmes principes que la première.

La démonstration que donne M. Ames du théorème de M. Jordan, sur un contour fermé, est extrêmement simple. L'auteur commence par définir d'une façon purement analytique ce que je demanderai la permission, pour abréger, d'appeler l'*angle sous lequel on voit une courbe fermée d'un point donné, non situé*

([1]) *Göttingen Nachrichten*, 1896, p. 79.

([2]) *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2e série, t. X, p. 301.

([3]) *Ibid.*, p. 396.

([4]) *Transactions Amer. Math. Soc.*, t. V, 1904.

([5]) Ces renseignements bibliographiques sont empruntés à une Note du *Lehrbuch der Funktionentheorie*, de M. W.-F. Osgood, t. I, p. 131. M. Osgood a reproduit, dans son *Lehrbuch*, la démonstration de M. Ames.

sur la courbe. Cette notion ne suppose pas que la courbe fermée soit une courbe de Jordan (qu'elle n'ait pas de point double). En divisant cet angle par 2π, on obtient un nombre entier que M. Ames appelle l'*ordre* du point, par rapport à la courbe fermée. On reconnaît tout de suite que cet ordre reste le même pour tous les points d'un continuum qui ne contient aucun point du contour, et dont on peut ainsi supposer que la frontière est le contour lui-même, ou une partie de ce contour. On voit aussi aisément que l'ordre d'un point très éloigné est nul. S'il y a deux points dont les ordres diffèrent, ces points appartiennent sûrement à deux continuums tels qu'on ne puisse passer d'un point du premier à un point du second par une courbe qui n'ait aucun point commun avec le contour.

Le lecteur ne peut manquer d'observer que l'introduction de la notion *d'ordre* est très naturelle ici d'autant qu'elle est indispensable ailleurs.

Considérons maintenant une courbe fermée définie par les équations (1); elle peut être, ou non, une courbe de Jordan. Convenons de dire qu'un vecteur *traverse* la courbe en un point A, distinct du point de la courbe qui correspond aux valeurs t_0 ou t_1 du paramètre, si les conditions suivantes sont vérifiées : il existe un nombre θ, intérieur à l'intervalle (t_0, t_1), et un seul, tel que $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ soient les coordonnées du point A; il existe un nombre positif α, tel que les points de la courbe qui correspondent aux valeurs de t pour lesquelles on a $\theta - \alpha \leqq t < \theta$ soient d'un côté du vecteur, et les points de la courbe pour lesquels on a $\theta < t \leqq \theta + \alpha$, de l'autre côté. Dans ces conditions, il est aisé de montrer que les ordres de deux points du vecteur, comprenant le point A, et assez voisins de lui pour qu'il n'y ait entre eux aucun autre point de la courbe, diffèrent d'une unité. Par conséquent, s'il y a quelque vecteur qui traverse la courbe fermée, au sens qu'on vient de dire, cette courbe partage le plan au moins en deux continuums.

Lorsqu'une partie de la courbe fermée peut être définie par des formules telles que

$$y = f(x) \qquad (a \leqq x \leqq b), \tag{2}$$

où $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b), il est

manifeste qu'une parallèle à l'axe des x, $x = \alpha$, pour laquelle on a $a < \alpha < b$, traverse la courbe au point dont les coordonnées sont α et $f(\alpha)$, pourvu que ce point ne soit pas un point double. Une conclusion analogue s'appliquerait si l'on avait affaire à une partie de courbe fermée, définie par des formules telles que

$$(3) \qquad x = f(y) \qquad (a \leq y \leq b),$$

$f(y)$ étant alors une fonction continue dans l'intervalle (a, b).

M. Ames se borne à considérer des courbes de Jordan qui peuvent être fractionnées en un nombre fini de parties qui puissent être définies par les formules (2) ou par les formules (3); d'après ce qu'on vient de dire, une courbe de Jordan, de cette nature, sépare le plan en deux continuums, au moins.

Il établit ensuite, très simplement, la proposition suivante :

Soit (C) *un continuum quelconque; considérons une courbe* (X) *appartenant à l'un des types* (2) *et* (3), *au premier par exemple, et située tout entière à l'intérieur du continuum* (C), *sauf peut-être son origine ou son extrémité qui peuvent appartenir à la frontière de* (C). *L'ensemble* (C') *des points qui appartiennent à* (C), *mais non à* (X), *constitue au plus deux continuums et n'en constitue qu'un seul si l'origine et l'extrémité de* (X) *n'appartiennent pas à la frontière de* (C).

Convenons en effet de dire d'un point de coordonnées α, β, appartenant à (C), qu'il est *au-dessus* de (X) si les conditions suivantes sont vérifiées : le nombre α appartient à l'intervalle (a, b), il est toutefois distinct de a, ou de b, si l'origine, ou l'extrémité, de (X) est sur la frontière de (C); on a $\beta > f(\alpha)$; tous les points dont l'abscisse est α et dont l'ordonnée y satisfait aux inégalités

$$f(\alpha) \leq y \leq \beta$$

appartiennent à (C). On définira de la même façon les points de (C) situés *au-dessous* de (X).

On voit aisément qu'on peut, au moyen d'une courbe dont tous les points appartiennent à (C'), réunir deux points situés au-dessus de (X), ou deux points situés au-dessous, et, dans le cas où l'ori-

gine et l'extrémité de (X) n'appartiennent pas toutes deux à la frontière de (C), deux points dont l'un est au-dessus de (X), l'autre au-dessous. Enfin, si l'on considère un point quelconque de (C′), il peut être relié, ou bien à un point situé au-dessus de (X), ou bien à un point situé au-dessous, au moyen d'une courbe dont tous les points appartiennent à (C′). La proposition énoncée plus haut résulte de là.

Considérons maintenant une courbe de Jordan formée de courbes partielles (X_1), (X_2), ..., (X_n) appartenant au type (2) ou au type (3), et placées bout à bout. On applique la proposition précédente en prenant le plan tout entier pour le continuum (C). En supprimant du plan les points de (X_1), on obtient un continuum (C_1), dont (X_1) est la frontière; en supprimant de (C_1) les points de (X_2) on obtient un continuum (C_2) dont la frontière est formée des courbes partielles (X_1), (X_2); on continue de la même façon jusqu'au continuum (C_{n-1}); si, de ce continuum, on supprime la courbe (X_n) dont l'origine et l'extrémité appartiennent à la frontière de (C_{n-1}), on peut obtenir deux continuums, mais non davantage; mais on a vu plus haut que la courbe fermée séparait le plan au moins en deux continuums; le théorème est donc entièrement démontré.

M. Ames en déduit très facilement les propositions élémentaires relatives à la connexion, à l'orientation, etc.

Dans la seconde Partie de sa Thèse, M. Ames étend à l'espace et aux surfaces closes des considérations de la même nature. Pour cette extension, il est maintenant obligé de supposer l'existence et la continuité des dérivées partielles des fonctions qui figurent dans la représentation paramétrique des surfaces qu'il considère; la distinction entre les surfaces bilatérales et unilatérales est donnée sous une forme purement analytique. L'angle solide sous lequel on voit une surface close, d'un point non situé sur cette surface, est défini au moyen d'une intégrale. C'est cet angle, divisé par 4π, qui est maintenant l'ordre du point. J. T.

MÉLANGES.

CORRESPONDANCE ENTRE LIOUVILLE ET DIRICHLET (1) :

PUBLIÉE PAR M. J. TANNERY.

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Paris, 5 février 1840.

MON CHER MONSIEUR DIRICHLET,

Permettez-moi de vous exprimer d'abord tout le plaisir que j'ai éprouvé en recevant le diplôme de l'Académie de Berlin : je suis fier d'être deux fois votre collègue. Présentez, je vous prie, à

(1) Mme de Blignières, à qui le *Bulletin* doit déjà d'avoir publié les inédits de Galois, a bien voulu me confier dix lettres de Lejeune-Dirichlet, dont sept à Liouville et trois à Mme Liouville ; elle a retrouvé avec ces lettres plusieurs brouillons de la main de son père, qui correspondent en partie aux lettres de Dirichlet.

Tous ceux qui ont connu Liouville savent qu'il était très droit et très vif ; l'âge n'a jamais éteint chez lui la chaleur de ses sentiments. Il écrivait avec la même vivacité qu'il sentait : on s'en apercevra assez aux lettres que nous publions ; j'ai cru toutefois devoir supprimer quelques lignes et quelques noms propres ; sans doute, ces lettres, ou ces brouillons, appartiennent à l'Histoire, mais il ne s'est pas écoulé beaucoup plus de 50 ans depuis que les dernières ont été écrites. D'ailleurs, c'est à un ami très cher qu'il écrivait, et Liouville, bien qu'il ne craignît pas de dire aux gens leurs vérités en face, n'aurait sans doute pas voulu que ses appréciations fussent rendues publiques.

Les lettres de Dirichlet à Mme Liouville n'intéressent pas la Science ; elles contribueront à faire connaître celui qui les a écrites et la nature des relations, évidemment très affectueuses, qui existaient entre lui et la famille Liouville.

Des longues conversations de son père avec Dirichlet, Mme de Blignières a conservé un souvenir amusant : tous les deux étaient fort loquaces ; ils avaient sans doute beaucoup de choses à dire. Liouville ne pouvait pas souffrir les lampes ; il s'éclairait avec deux bougies et deux chandelles ; pour mesurer le temps aux deux interlocuteurs, on avait recours non à une pendule, ni à un sablier, mais à une vieille méthode que je crois qui remonte au moyen âge : on fichait, à des intervalles réguliers, un certain nombre d'épingles dans une des chandelles ; entre

l'Académie l'expression de ma bien sincère et bien vive reconnaissance. J'ajouterai que votre lettre m'a fait autant de plaisir au moins que le diplôme : il n'y a pas de géomètre que j'aie estimé et aimé autant que vous, avant même de vous connaître personnellement, et depuis que je vous connais, je n'ai pas assurément changé d'avis. Jugez avec quel empressement j'accepte votre idée d'une correspondance mathématique. Il est vrai que mon empressement pourra passer quelque peu pour de l'égoïsme, car c'est moi qui ai tout à gagner à une telle correspondance.

Je dois maintenant vous expliquer pourquoi j'ai tant tardé à vous répondre.

Le bien-être moral ne guérissant pas le mal physique, j'ai été malade pendant une huitaine de jours. J'ai eu une fièvre assez forte; j'ai été obligé de garder le lit et de renoncer à tout travail quelconque. Première cause de retard.

Ayant communiqué à diverses personnes les détails mathématiques contenus dans votre lettre, toutes en ont été enchantées et m'ont dit qu'il fallait absolument en présenter un extrait destiné à être imprimé dans le compte rendu ; j'ai résisté, j'ai répondu que je n'avais pas votre autorisation ; on n'a pas voulu entendre mes raisons : on m'a dit que votre lettre était si bien faite que vous n'auriez rien à y changer dans le cas où vous auriez désiré qu'elle fût rendue publique, etc., etc. Bref, on a tant insisté que j'ai été obligé de céder, en sorte qu'un extrait de votre lettre se trouve dans le compte rendu de la séance du 27 février ([1]) et dans

---

deux épingles, celui qui parlait avait le droit de ne pas être interrompu. Quand la dernière épingle tombait, les deux géomètres allaient dormir. J. T.

A la remarque de M. Tannery j'ajouterai la suivante : Liouville, que j'ai eu l'honneur de suppléer dans son cours de Mécanique rationnelle à la Sorbonne, de 1872 à 1878, m'a répété plus d'une fois que Humboldt, ayant fait à Paris la connaissance de Dirichlet, l'avait fait nommer à Berlin *pour avoir le plaisir de causer avec lui.* Liouville ajoutait : « Si, à cette époque, Dirichlet avait pu obtenir une petite place à Paris, nous l'aurions sans doute gardé parmi nous. »

G. D.

([1]) *Comptes rendus,* t. X, p. 285; *Œuvres de Dirichlet,* t. I, p. 621. Il s'agit surtout de la proposition suivante :

« Si l'équation

$$s^n + as^{n-1} + \ldots + gs + h = 0,$$

à coefficients entiers, n'a pas de diviseur rationnel, et si parmi ses racines

$$\alpha, \beta, \ldots, \omega$$

le cahier de février seulement de mon *Journal* (¹), lequel cahier paraîtra demain seulement. Peut-être ai-je eu tort, peut-être ai-je commis une indiscrétion ; si cela est, il faudra me le dire, afin que je ne recommence pas. Et même désormais peut-être feriez-vous bien de m'indiquer ce qui peut se montrer ou se publier et ce qui doit rester entre nous. Quoi qu'il en soit, si j'ai commis ici une faute, pardonnez-la-moi, je vous en prie, en faveur des circonstances atténuantes et considérez qu'après tout vous êtes le premier coupable, car si vous n'aviez pas rendu votre lettre si intéressante, personne n'en aurait demandé la publication.

Cette publication a été une seconde cause du retard pour la réponse que je vous devais, voici comment :

M. Libri ne s'est-il pas avisé [*Compte rendu* du 24 février (²)] de présenter sans la lire une Note renfermant des remarques critiques sur votre lettre : j'ai dû attendre que la Note fût imprimée pour en prendre connaissance et y répondre, ce que j'ai fait lundi dernier : désirant, d'ailleurs, vous donner des détails complets sur cette affaire, j'ai cru devoir reculer encore de quelques jours le plaisir de causer avec vous.

Voici les points principaux de la Note de M. Libri :

1° Vous aviez avancé que deux conditions *suffisantes* étant remplies (savoir que l'équation $s^n + as^{n-1} + \ldots + gs + h = 0$ ait au moins une racine réelle et n'ait pas de diviseurs rationnels), l'équation indéterminée $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega) = 1$ a une infinité de solutions en nombres entiers. M. Libri dit que l'on pourrait peut-être croire que vous regardez ces conditions comme *nécessaires*. J'ai répondu que je ne voyais pas pourquoi, lorsque vous avez raison dans tout ce que vous dites, on irait supposer que

---

il y en a au moins une qui soit réelle, je dis que l'équation indéterminée

$$F(x, y, \ldots, z) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega) = 1,$$

où l'on a posé pour abréger

$$\varphi(\alpha) = x + \alpha y + \ldots + \alpha^{n-1} z,$$

a toujours une infinité de solutions entières. »

(¹) T. V, p. 72.

(²) *Note de M. Libri sur un théorème de M. Dirichlet* (*Comptes rendus*, t. X, p. 311).

vous avez des idées fausses sur les choses dont vous ne parlez pas. Dans une lettre de trois pages qui n'était pas même consacrée tout entière aux Mathématiques, était-il naturel (ai-je ajouté), était-il possible de descendre aux détails minutieux que demande M. Libri?

N'ayant eu la Note à ma disposition que le dimanche matin, ce n'est que mardi (par conséquent après ma réponse faite) que j'ai vu qu'il aurait été possible de rendre cette réponse bien plus piquante. En effet, M. Libri avance et croit démontrer que l'équation $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega)=1$ a toujours une infinité de solutions dès que le dernier terme h de l'équation

$$s^n + as^{n-1} + \ldots + gs + h = 0$$

est égal à ± 1, et cela quelle que soit la nature des racines $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ et malgré les diviseurs rationnels que l'équation en s pourrait avoir. Or, ce théorème de M. Libri est, par exemple, inexact lorsque l'équation en s se réduit à $s^2+1=0$, car on en conclurait que l'équation

$$(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1}) = x^2+y^2=1$$

a une infinité de solutions, ce qui est absurde. Toutefois, il est juste de dire que dans le cas de l'équation $s^2+2s+1=0$, dont le premier membre est décomposable en deux facteurs rationnels, on arrive à l'équation indéterminée $(x-y)^2=1$ qui a, en effet, une infinité de solutions. Mais en quoi cela contredit-il ce que vous avez avancé? Quelle rage a M. Libri de présenter à propos d'une lettre très concise des remarques qui seraient encore ridicules lors même qu'il s'agirait d'un Mémoire détaillé. Surtout, il n'aurait pas dû avancer un théorème faux. N'est-ce pas le cas de dire qu'en voulant mettre des points sur les i de votre lettre, le sot critique les a mis à côté?

Au reste, je présenterai sans doute lundi prochain [1] une addition à ma Note, et je relèverai le théorème inexact de M. Libri.

2° Il a aussi essayé de répondre à votre ancienne remarque sur

---

[1] *Sur un théorème d'Analyse indéterminée ou additions aux observations sur une Note de M. Libri insérée dans le dernier compte rendu* (*Comptes rendus*, t. X, p. 381).

les formules de Gauss et la détermination du signe du radical carré. Il déclare n'avoir jamais compris le sens ou le but de votre observation. Je crois, dans ma réponse, l'avoir bien fait comprendre sinon à lui, du moins au public. Croiriez-vous que, dans sa réplique, il a été jusqu'à vous citer vous-même comme une autorité en sa faveur et qu'il a rapporté (en l'altérant passablement) ce que vous lui avez dit un jour à ce sujet en présence de M. Cournot. Voyez pourtant à quel rôle stupide on s'expose quand on veut régner par le charlatanisme.

Voilà une bien longue lettre et pourtant une lettre bien vide. Excusez-moi ; ce n'est pas tout à fait ma faute. Il faut même que j'ajoute encore deux mots. A propos de votre théorème sur les formes quadratiques qui renferment une infinité de nombres premiers, M. Libri *croit qu'il serait peut-être possible* de le déduire d'un théorème connu par Euler dès l'année 1770 : il n'a pas même dit quel est ce théorème d'Euler. J'ai beaucoup ri de cette phrase, mais j'ai eu soin de déclarer que je n'avais rien à répondre à une assertion si prudente et si vague.

Vous trouverez aussi dans son factum un pompeux éloge de ses propres méthodes pour la résolution des équations indéterminées. Ce sera à vous de voir si vous daignez oui ou non répondre à toutes ces pauvretés.

Permettez-moi de ne pas compter cette lettre comme une réponse suffisante à la vôtre et de vous écrire de nouveau d'ici à une quinzaine de jours. Je tâcherai de trouver un sujet plus intéressant que celui d'aujourd'hui [1].

Vale et me ama.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Monsieur et très cher Ami,

L'amitié que vous voulez bien avoir pour moi et dont vous m'avez donné récemment de nouvelles preuves qui m'ont vivement pé-

[1] En tête de sa lettre, Liouville a bien écrit 5 février; d'après le contenu, il est clair que la lettre a été écrite dans la semaine qui précédait le lundi 9 mars. C'est sans doute 5 *mars* qu'il faut lire.

nétré, me font espérer que vous excuserez mon long silence et que vous ne l'attribuerez qu'à des occupations indispensables et qui ne souffraient aucun retard. Sans ces occupations, je n'aurais pas attendu jusqu'à présent pour vous remercier de l'accueil indulgent que vous avez bien voulu faire aux communications mathématiques contenues dans ma dernière lettre. En vous parlant de ces premiers essais sur une matière encore neuve, j'étais loin de penser que vous les jugeriez assez favorablement pour les croire dignes des honneurs du compte rendu. Mais comme en définitive dans ce que j'ai avancé, il n'y a rien qui ne soit littéralement exact, je ne vois d'autre mal à la publicité que ces essais ont reçue, que l'ennui que vous avez eu de faire justice des sottes attaques de M. Libri. Permettez-moi de vous exprimer toute ma reconnaissance pour le service de véritable amitié que vous m'avez rendu par votre excellente réponse et de vous assurer que l'obligation que je vous en dois est d'autant plus grande que je sens bien que vous m'avez beaucoup mieux défendu et pour le fond et pour la forme que je n'aurais pu le faire moi-même.

En voyant le dédain avec lequel M. Libri parle des fonctions homogènes que Lagrange a le premier considérées et qui ont le malheur de n'être pas les plus générales de leur degré, je n'ai pas pu m'empêcher de rire. Il faut avoir un esprit aussi superficiel que l'est celui de M. Libri pour mesurer l'importance d'une expression analytique sur le nombre plus ou moins grand des indéterminées qu'elle renferme. Pour juger ainsi, il faudrait donc dire aussi que la congruence binome $x^n - a \equiv 0 \pmod{k}$, qui dès que $n > 2$ n'est plus la plus générale de son degré, ne présente aucun intérêt et cependant il n'y [a] personne qui ne sache, et M. Libri lui-même devrait le savoir, à combien de difficultés et à combien de résultats intéressants la théorie de cette congruence particulière (théorie qui ne s'étend, même jusqu'à présent, malgré les travaux de plusieurs géomètres, qu'aux cas où $n = 3$ et $n = 4$) donne lieu. Si M. Libri s'était livré à une étude approfondie et laborieuse du sujet, il aurait reconnu que les fonctions homogènes décomposées en facteurs linéaires (plus générales que celles de Lagrange en ce seul point qu'on ne suppose aucun de leurs coefficients égal à l'unité) présentent, malgré leur forme particulière ou plutôt en vertu de cette forme, le plus grand intérêt et sont aussi étendues

que les formes quadratiques auxquelles elles se réduisent dans le cas du second degré. Je crois pouvoir assurer, d'après les recherches suivies que j'ai faites sur cette matière depuis plus de six mois, qu'il y a peu de sujets plus féconds et que les propriétés de ces expressions répandent une vive lumière non seulement sur la science des nombres, mais encore sur le calcul intégral et particulièrement sur les transcendantes abéliennes avec lesquelles le sujet a des rapports très intimes et très nombreux et je puis ajouter que la théorie de ces fonctions se lie aussi à une branche d'analyse encore très peu cultivée et qui se réduit presque dans son état actuel au théorème si célèbre de Lambert sur l'irrationnalité de π et de son carré. Les résultats que j'ai déjà obtenus et ceux que j'entrevois d'une manière assez distincte pour être sûr d'y parvenir dans un temps donné, sont déjà assez nombreux pour fournir matière à un ouvrage d'une certaine étendue et j'ai lieu d'espérer qu'à mesure que j'avancerai dans mon travail, le sujet s'étendra de plus en plus. Lorsque j'aurai réuni un certain nombre de résultats sous une forme que je pourrai croire définitive, je vous demanderai la permission de vous les communiquer, et votre approbation, si je suis assez heureux pour l'obtenir, sera pour moi un encouragement à entreprendre la rédaction d'un Traité étendu sur la matière.

Je viens de voir avec le plus vif intérêt l'extension que vous avez donnée à vos recherches sur les fonctions elliptiques [1] et que vous êtes parvenu à prouver que ces transcendantes, considérées comme fonctions de leur module, ne sauraient s'exprimer sous forme finie. J'espère que votre travail ne tardera pas à paraître dans votre journal à moins que vous ne l'ayez destiné pour la collection de l'Académie. Dans ce dernier cas, je vous prierai de m'en faire parvenir un exemplaire particulier dès que l'impression en sera achevée.

Quoique depuis l'été dernier, où j'ai vu M. Poisson n'étant déjà plus que l'ombre de lui-même, je fusse préparé à sa mort, la nouvelle de cet événement m'a vivement affecté. La perte que la Science a faite sera longtemps et vivement ressentie; elle est malheureusement déjà assez grande pour qu'il ne soit pas nécessaire

---

(1) Mémoire *Sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module* (*Comptes rendus*, t. X, p. 2; *Journal de Liouville*, t. V, p. 44).

de l'exagérer en disant avec M. Cousin que nous avons perdu le premier de nos géomètres. Pourquoi faut-il qu'aux regrets universels qu'inspire le mort illustre se mêle le souvenir des nombreuses injustices dont s'est rendu coupable l'homme au pouvoir? Parmi ces injustices, il n'y en a pas de plus grandes et qui exigent une réparation plus prompte que celle qui a été commise envers notre ingénieux ami Sturm qui a été laissé dans une position subalterne et qui s'est vu préférer des charlatans adroits pour qui la Science n'est qu'un moyen de parvenir. Espérons que M. Poinsot s'empressera de faire à notre ami une position digne de lui et qui lui permette d'ajouter de nouvelles découvertes à celles dont la Science lui est déjà redevable : quoique j'aie écrit à M. Sturm, il y a près de six mois, comme il est correspondant encore plus paresseux que moi-même, je n'espère guère avoir de ses nouvelles directes; veuillez donc me dire ce qui a été fait ou ce qui sera fait pour lui.

Me permettrez-vous de vous charger d'une petite commission? Voici de quoi il s'agit : M. de Humboldt vient de publier dans le *Journal de Crelle* (1), ainsi que dans celui de Schumacher, la première lettre que Lagrange, encore à Berlin, a écrite à Laplace, et de laquelle résulte ce fait très curieux et entièrement inconnu que Laplace, qui venait seulement de débuter, a eu le désir de s'établir à Berlin et a été sur le point d'y être nommé comme Membre de l'Académie. Il paraît que le succès de la négociation a été empêché par la nomination de Laplace à l'Académie des Sciences de Paris, et pour éclaircir entièrement ce point historique qui a beaucoup d'intérêt pour M. de Humboldt, il désirerait connaître l'époque précise de cette nomination. Si vous pouviez me fournir ce renseignement qui doit résulter de l'inspection des plumitifs (2) pour 1773 et 1774, vous rendriez un véritable service à M. de Humboldt qui paraît y attacher le plus grand prix.

Adieu, cher ami, et ne manquez pas de me donner promptement de vos nouvelles. Je sais bien que mon long silence ne me donne

---

(1) *Ein früherer Brief Lagrange's an Laplace* (*Journal de Crelle*, t. 20, p. 309).

(2) Peut-être n'est-il pas inutile de dire que Dirichlet emploie ce mot dans son vrai sens : « Papier original sur lequel on écrit les sommaires des jugements d'un tribunal, les délibérations d'une compagnie » (LITTRÉ).

pas le droit de compter sur une réponse prompte; mais je vous promets d'être plus exact à l'avenir.

Présentez, s'il vous plaît, mes respects à Mme Liouville, et rappelez-moi au souvenir de nos amis.

Tout à vous

LEJEUNE-DIRICHLET.

Berlin, le 6 mai 1840.

Si vous voyez M. Riess, qui est enchanté de l'excellent accueil que vous lui avez fait, dites-lui bien des choses de ma part.

M. Gauss (1), qui s'est beaucoup occupé de problèmes généraux relatifs à l'attraction, vient de lire un Mémoire étendu sur cette matière à la Société de Göttingen. Il en a donné un extrait de trois pages dans les *Göttinger Gelehrte Anzeigen* (2), mars 1840, que vous jugerez peut-être convenable d'insérer dans votre journal. Si la feuille littéraire citée ne se trouve pas à Paris, faites-le-moi savoir, je vous ferai alors parvenir la traduction de l'article en question. J'appelle également votre attention sur les *Œuvres complètes d'Abel,* qui viennent de paraître et dans lesquelles se trouvent plusieurs morceaux inédits.

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Mon cher Monsieur Dirichlet,

Je dois d'abord vous remercier de votre bonne lettre. Vous comprenez sans peine quel vif plaisir j'ai eu en la lisant. Je ne regrette plus l'indiscrétion que j'ai commise en publiant sans autorisation votre Note dans le *Compte rendu;* je m'en félicite, au contraire, puisqu'elle m'a valu un témoignage d'amitié si flatteur pour moi. Il y a là, sans doute, de quoi compenser cent fois pour une l'ennui que j'éprouve à m'occuper de M. Libri, c'est-à-dire

(1) Ce dernier paragraphe est écrit dans la marge de la première page.

(2) Gauss, *Werke,* t. V, p. 305; c'est un court résumé des célèbres *Allgemeine Lehrsätze, etc.* (t. V, p. 197), dont Liouville a publié une traduction dans son Journal, t. VII, p. 273.

d'un homme qui, dans l'Académie du moins, commence à être méprisé presque autant qu'il le mérite.

Vous avez bien raison de dire qu'il ne faut pas mesurer l'importance d'une expression analytique sur le nombre plus ou moins grand des arbitraires qu'elle renferme. C'est presque toujours en limitant le nombre et l'étendue de ces arbitraires que l'on parvient à découvrir des propriétés saillantes et à saisir la clef des théories. Le cercle n'est pas, assurément, la courbe la plus générale de son espèce. S'avisera-t-on de blâmer les géomètres qui ont consacré leurs veilles à l'étude des propriétés si fécondes et si nombreuses du cercle?

Continuez donc vos recherches et laissez votre critique intégrer *toutes* les équations linéaires aux différences finies, et *toutes* les équations différentielles du premier ordre : laissez-le renfermer dans une *seule* formule toute la théorie des nombres, ou bien résoudre le fameux problème des échecs : *Deux personnes jouant le mieux possible, trouver en série convergente après combien de coups l'une d'elles sera nécessairement échec et mat.* Ces théories *générales* sont bien belles, mais comment se fait-il qu'elles ne puissent servir dans aucun cas *particulier?*

J'ai étudié depuis un an, avec beaucoup de soin, ce que vous avez écrit sur la théorie des nombres, et j'ai parcouru les Auteurs qui vous ont précédé. Il est sûr à mes yeux que vous êtes dans la bonne voie et que vos derniers Mémoires renferment des théories absolument neuves dont rien jusqu'ici ne pouvait donner l'idée. J'ai profité du Cours dont je suis chargé au Collège de France pour développer au public quelques-unes de vos méthodes : malheureusement, le Cours est spécialement consacré à la Physique mathématique, en sorte que je n'ai pu donner à cette espèce d'excursion dans le domaine de l'analyse pure le temps que j'aurais désiré. Je me suis borné à exposer votre démonstration des séries périodiques, celle des séries de M. Gauss, le théorème sur la progression arithmétique dans le cas seulement où la raison est un nombre premier, enfin les propositions relatives aux signes des quantités [1] $\Sigma b - \Sigma a$, $A - B$, etc. C'est une bien petite partie

---

[1] Ces notations sont celles de Dirichlet dans son Mémoire *Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. 18, p. 259; *Œuvres*, t. I, p. 300) : a et b désignent respectivement les résidus et non-résidus

de vos belles recherches, mais vous comprendrez que je ne pouvais faire davantage, ayant devant moi des auditeurs étrangers aux premiers principes de la théorie des nombres et pour lesquels il fallait reprendre chaque question *ab ovo*.

En préparant ces leçons, j'ai naturellement essayé d'ajouter quelques gouttes d'eau à votre rivière. Ainsi, j'ai reconnu que la relation entre $\Sigma b - \Sigma a$ et $A - B$ que l'on obtient en éliminant le déterminant [1] h entre les deux formules que vous avez données peut (ainsi que beaucoup d'autres relations du même genre) être obtenue directement par les principes les plus élémentaires; ces relations ne dépendent nullement des séries de M. Gauss. Mais vous pensez bien qu'une telle remarque (qui n'a pas pu, d'ailleurs, vous échapper) n'a jamais eu à mes yeux grande importance. J'en attachais moins encore à quelques exemples de détermination de signe différents des exemples $\Sigma b - \Sigma a$, $\Sigma a^2 - \Sigma b^2$, etc., que vous avez présentés. Une telle généralisation s'offrait d'elle-même et vous appartenait d'avance : il aurait fallu être stupide pour ne pas l'apercevoir à la première lecture des quelques lignes consacrées par vous à ce sujet. Jugez donc de mon étonnement de me voir cité par M. Cauchy dans les deux Notes [2] qu'il s'est avisé de publier à votre suite, surtout dans celle du 11 mai. Je ne vois guère dans ces Notes qu'une amplification de bon écolier, rédigée sur le texte du maître : . . . . . .

. . . . . .

Je n'ai pas pu travailler beaucoup cette année : outre le Mémoire sur les fonctions elliptiques, j'ai composé une Note sur l'équation de Riccati [3] dont je trouve directement les cas d'intégrabilité et

---

quadratiques d'un nombre premier, moindres que ce nombre; A et B désignent respectivement combien il y a de résidus et de non-résidus quadratiques, moindres que la moitié du nombre premier.

[1] Dans le Mémoire de Dirichlet, h représente non le déterminant d'une forme quadratique, mais le nombre de formes quadratiques distinctes (non proprement équivalentes) d'un déterminant donné. Au reste, Liouville avait primitivement écrit : « en éliminant le radical des deux formules que vous avez ».

[2] *Théorèmes divers sur les résidus et les non-résidus quadratiques* (*Comptes rendus*, t. X, 16 mars 1840, p. 437; *Œuvres*, 1re série, t. V, p. 135). — *Sur quelques séries dignes de remarques, qui se présentent dans la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. X, 11 mai 1840, p. 719; *Œuvres*, 1re série, t. V, p. 199).

[3] *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati* (*Comptes rendus*, t. XI, p. 729).

de non-intégrabilité : je tâcherai de vous donner une idée de cela dans une lettre que je remettrai à M. Riess. J'ai une réponse (un peu longue) à votre objection sur les séries dont les termes dépendent des fonctions V ; et de plus une nouvelle méthode pour sommer ces séries : je suis très content de cette méthode dont je vous avais déjà indiqué le principe lors de votre séjour à Paris ; elle est très simple et très élégante [1] : j'attends les vacances pour polir tout cela. Au milieu des ennuyeuses occupations qui m'accablent, le temps me manque pour des recherches suivies.

Adieu, tout à vous.

P. S. Condorcet ayant été adjoint à M. de Fouchy, secrétaire, la place d'associé mécanicien qu'il occupait a été donnée à M. Desmarest, adjoint mécanicien, et celle d'adjoint à M. Delaplace. Voici les dates. Samedi 20 mars 1773 : L'Académie ayant procédé suivant la forme ordinaire à l'élection de deux sujets pour remplir la place d'associé mécanicien de M. de Condorcet, les premières voix ont été pour M. Desmarest et les secondes pour M. Delaplace. Mercredi 24 mars 1773 : On donna avis que le Roi a nommé M. Desmarest pour remplir la place d'associé mécanicien vacante par l'adjonction de M. de Condorcet au secrétariat. Sa Majesté désire aussi que l'Académie procède à l'élection pour la place d'adjoint vacante par la promotion de M. Desmarest. Mercredi 31 mars : L'Académie ayant procédé suivant la forme ordinaire à l'élection de deux candidats pour remplir la place d'adjoint mécanicien vacante par la promotion de M. Desmarest, MM. les Pensionnaires et Associés mécaniciens ont proposé MM. Delaplace, Marguerit, Monge, Legendre et Mauduit. Après quoi, l'Académie ayant été au scrutin, les premières voix ont été pour M. Delaplace et les secondes pour M. Marguerit. Samedi 24 avril 1773 : Le Roi a nommé M. Delaplace pour remplir à l'Académie des Sciences la place d'adjoint mécanicien vacante par la promotion de M. Desmarest à celle d'associé.

---

[1] *Sur les conditions de convergence d'une certaine classe de séries* (*Comptes rendus*, t. XI, p. 615).

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Paris, 7 juillet 1840.

Mon cher Monsieur Dirichlet,

M. Cauchy vient de nous communiquer un théorème à la fois si général et si simple, que je crois vous rendre un vrai service en vous donnant l'énoncé huit jours avant le compte-rendu [1]. Ce théorème est relatif à l'intégration des équations différentielles ou à différences partielles linéaires, à coefficients constants ou variables. M. Cauchy prouve que, si l'on sait intégrer ces équations lorsqu'elles n'ont aucun terme indépendant des variables principales, on en conclura de suite les intégrales relatives au cas où l'on ajouterait à leurs seconds membres des fonctions connues quelconques.

Par exemple, pour intégrer

$$(1)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} + F(x, y, t)\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \varpi(x, y, t),$$

on cherchera une fonction ψ ou $\psi(x, y, t, \theta)$ qui pour $t = \theta$ se réduise à $\varpi(x, y, \theta)$ et satisfasse en outre à l'équation (1) privée de second membre. Cela posé, la valeur complète de φ sera

$$\varphi = \int_0^t \psi\, d\theta + u,$$

u désignant l'intégrale de l'équation (1) privée de second membre. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que l'équation (1) est satisfaite pour $\varphi = \int_0^t \psi\, d\theta$. Or on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi(x, y, t, t) + \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial t}\, d\theta,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varpi(x, y, t) + \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial t}\, d\theta,$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. X, p. 957, et t. XI, p. 1. — *Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. V, p. 236 et 249.

puisque l'équation $\psi(x, y, \theta, \theta) = \varpi(x, y, \theta)$, où θ est indéterminé, entraîne celle-ci $\psi(x, y, t, t) = \varpi(x, y, t)$.

Dès lors la quantité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} + \mathrm{F}(x, y, t)\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$$

est égale à

$$\varpi(x, y, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m} + \mathrm{F}(x, y, t)\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}\right] \partial\theta,$$

c'est-à-dire $\varpi(x, y, t)$, puisque la fonction

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + f(x, y, t)\frac{\partial^m \psi}{\partial x^m} + \mathrm{F}(x, y, t)\frac{\partial^n \psi}{\partial y^m} = 0.$$

Il y a des règles tout aussi simples et que vous trouverez de suite soit pour une équation contenant des dérivées d'ordre supérieur par rapport à t, soit pour un système quelconque d'équations linéaires d'ordre quelconque. Au surplus tous les cas peuvent se ramener (en augmentant, s'il le faut, le nombre des variables principales) à celui où il n'existe que des dérivées du premier ordre par rapport à t et où, de plus, chaque équation ne contient qu'une seule dérivée relative à cette variable t.

Adieu, mon cher ami, tout à vous,

J. LIOUVILLE.

P. S. La place de professeur de Mécanique rationnelle est vacante à la Sorbonne. Croiriez-vous que les chances se balancent entre *Sturm* et *Libri* [1]. Pauvres mathématiques! Je n'ai pas besoin de vous dire que M. Lacroix est tout entier pour Libri. Faut-il qu'après tant de services honorables, un homme digne de tous nos respects termine sa carrière en devenant l'esclave et le jouet d'un vil intrigant?

---

[1] Sturm fut nommé, par arrêté ministériel du 21 novembre 1840, professeur de Mécanique, en remplacement de M. Poisson : il avait été présenté à la fois par la Faculté des Sciences et par le Conseil académique; cette double présentation est visée dans la notification de l'arrêté au doyen de la Faculté, arrêté dont M. Guillet, secrétaire de la Faculté, a bien voulu me donner communication.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

J'espère, mon cher Monsieur Liouville, que vous ne m'en voudrez pas de mon long silence lorsque vous saurez quel temps pénible j'ai traversé depuis que j'ai reçu votre dernière lettre, lettre si intéressante et dont à mon regret je n'ai pas encore pu vous remercier. Ma femme a tant souffert pendant sa grossesse que son état me donnait les plus vives préoccupations et ce n'est que depuis ses couches que j'ai recommencé à respirer. Si sa santé est maintenant loin d'être satisfaisante, elle n'a du moins heureusement rien qui puisse m'inquiéter.

Ayant l'esprit si peu libre, je n'ai pas pu me livrer avec suite aux recherches dont je vous ai entretenu dans mes précédentes lettres. Tout ce que j'ai pu faire, c'a été de considérer par intervalles quelques points isolés du sujet de travail que je me suis choisi, de sorte que sous le rapport de la rédaction de l'ensemble je ne suis guère plus avancé qu'il y a 5 ou 6 mois.

C'est avec le plus vif intérêt que j'ai appris par le compte rendu [1] que notre ami Sturm est enfin dans une position digne de lui. Maintenant qu'il se trouve débarrassé de l'ennuyeuse obligation de rabâcher les éléments aux élèves de Rollin, nous pouvons espérer de voir prendre son génie un nouvel essor et nous ne tarderons sans doute pas à apprendre quelque chose.

Que fait donc M. Steiner à Paris? Se borne-t-il à savourer les délices de votre capitale? Tâchez donc de le pousser un peu au travail. Il avait de si beaux projets en partant d'ici que s'il revenait sans avoir rien produit de ses trésors, on ne pourrait manquer de vous accuser, vous et vos amis, de l'avoir entièrement absorbé par les charmes de votre commerce. J'appelle particulièrement votre

---

[1] Il ne s'agit pas ici de la nomination de Sturm comme professeur à la Sorbonne, dont les *Comptes rendus* n'avaient pas à parler, mais de sa présentation au Ministre de la Guerre comme « candidat de l'Académie » pour la place de professeur d'Analyse et de Mécanique à l'École Polytechnique, vacante par suite de la nomination de Duhamel comme « examinateur permanent ». Sturm fut présenté par 36 voix, contre 3 données à Auguste Comte (*Comptes rendus*, t. XI, p. 606, séance du 12 octobre 1840) et nommé le 19 octobre. Il était d'ailleurs répétiteur à l'École Polytechnique depuis le 28 novembre 1838. Je dois ces derniers renseignements à M. Mercadier.

attention sur un manuscrit qu'il a avec lui et qui a pour objet de donner une vue résumée de ses principales recherches. Je suis sûr que ce travail, si M. Steiner veut se résigner à ne pas dire tout ce qu'il sait sur ce sujet, chose presque inévitable pour un auteur si fécond, ne demanderait pas beaucoup de temps pour être en état d'être imprimé (1) et aurait le plus éclatant succès. Quoique je ne sois qu'un simple amateur en fait de Géométrie, j'en sais pourtant assez pour être assuré que les juges compétents ne pourront accueillir qu'avec le plus vif intérêt un travail qui fait dériver d'une source commune des théories que rien ne paraissait lier jusqu'à présent.

Ce n'est pas le tout de prêcher les bons préceptes, il faut aussi s'y conformer soi-même. Faisant un retour sur moi-même, je vais me mettre en train dès demain de rédiger mes premières recherches (2).

Adieu mon cher Monsieur Liouville, présentez, s'il vous plaît mes devoirs à Madame Liouville et rappelez-moi au souvenir de nos amis communs.

Tout à vous

LEJEUNE-DIRICHLET.

Berlin, le 3 février 1841.

Quoique M. Steiner m'ait donné son adresse, comme je ne suis pas sûr qu'elle soit encore la même, je prends la liberté de vous prier de lui faire parvenir la lettre ci-jointe.

(*A suivre.*)

---

(1) Il s'agit sans doute du Mémoire *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général,* dont un extrait figure dans le *Compte rendu* du 15 mars 1841 (XII, p. 479) et sur lequel Liouville a fait un rapport élogieux (XII, p. 931). Liouville a imprimé la première Partie de ce Mémoire, traduite par Wertheim, dans le Tome VI de son Journal, p. 105. Elle est reproduite dans le *Journal de Crelle,* t. 24, p. 93; la seconde Partie, traduite en français par Foelsing, a été publiée dans le même Tome, p. 189. Le texte allemand se trouve dans les *Œuvres de Steiner,* t. II, p. 179.

(2) Les œuvres de Lejeune-Dirichlet contiennent un seul Mémoire (en deux Parties) daté de 1841 : *Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen* (t. I, p. 503). Il a été *lu* à l'Académie de Berlin le 27 mai. — Les *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* (t. I, p. 533), qui ont paru dans le quatrième Cahier du Tome 24 (1842) du *Journal de Crelle,* ne sont pas datées.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

SERRET (J.-A.). — *Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung.* Nach *Axel Harnacks* Uebersetzg. 3. Aufl. neu bearb. von *Gg. Scheffers.* Gr. in-8°, XIV-586 p., avec 105 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 13 m.

LORENTZ (H.-A.). — *Abhandlungen über theoretische Physik.* 1. Bd. In-8°, IV-489 p. Leipzig, Teubner. Relié, 17 m.

TAIT (P.-G.). — *Properties of matter.* 5e édit. by *W. Peddie.* In-8°, 370 p. London, Black. 7 sh. 6 d.

ALBERT (G.). — *Die Platonische Zahl als Präzessionszahl* (3600-3592) *u. ihre Konstruktion.* Gr. in-8°, 31 p. avec fig. et 1 pl. Wien, Deuticke. 1 m.

BAKER (H.-F.). — *An Introduction to the theory of multiply periodic functions.* In-8°, 352 p. Cambridge, Univ. Press. 12 sh. 6 d.

BENNECKE (F.). — *Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen.* (Festschrift.) In-4°, 7 p. av. fig. et 10 pl. Berlin, Salle. 2 m.

BURMESTER (LUDW.). — *Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme u. räuml. Systeme.* In-8°, 32 p. av. 5 fig. München, Franz. 40 pf.

CRELLE (A.). — *Rechentafeln, welche alles Multiplizieren u. Dividieren mit Zahlen unter* 1000 *ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern u. sicher machen.* Neue Ausg., besorgt von *O. Seeliger.* Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1-1000. In-4°, VII-501 p. Berlin, G. Reimer. Relié : 15 m.

CUREY (C.). — *Télémètre de côte à grande base horizontale* (système du colonel russe de Launitz). In-8°, 41 p. av. 22 fig. et 1 pl. Nancy, Berger-Levrault et Cie.

DARWIN (G.-H. sir). — *Scientific Papers.* Vol. I. *Oceanic tides and lunar disturbances of gravity.* In-8°, 476 p. Cambridge, Univ. Press. 25 sh.

ENGEL (P.). — *Déviation des compas. Étude géométrique. Compensation du compas Thomson.* In-8°, 78 p. avec fig. et 4 pl. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr. 75 c.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Bd. IV. 2. II. Mechanik. Red. v. *F. Klein* u. *C.-H. Müller.* 2. Heft. In-8°. Leipzig, Teubner. 5 m. 20 pf.

GUYOU (E.). — *Manuel des instruments nautiques.* In-8°, 135 p. av. fig. et pl. Paris, Impr. nationale.

OSGOOD (W.-F.). — *A first course in differential and integral Calculus.* In-8°. London, Macmillan. 10 sh. 6 d.

ROUSE BALL (W.). — *Récréations mathématiques et Problèmes des temps anciens et modernes.* 2e édit. française, trad. par *J. Fitz-Patrick.* 1re Partie. In-8°, 382 p. Paris, Hermann. 5 fr.

TSAKALOTOS (D.-E.) et METTLER (E.). — *Tables numériques et logarithmiques à l'usage des chimistes.* In-16, VI-108 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

VAES (F.-J.). — *Graphische voorstellingen en de beginselen der differentiaal- en intergraalrekeningen.* Gr. in-8°, 12 et 176 p. av. 55 fig. Haarlem, Visser. 2 fl. 25 c.; relié : 2 fl. 60 c.

BOUASSE (H.). — *Cours de Physique.* 2e Partie. *Thermodynamique; Théorie des ions.* In-8°, 267 p. av. 64 fig. Paris, Delagrave. 7 fr.

HELMHOLTZ (H.). — *Ueber die Erhaltung der Kraft.* 7e mille. In-8°, 60 p. Leipzig, Engelmann. Kart. 80 pf.

POINCARÉ (L.). — *Die moderne Physik.* Uebertragen von *M. Brahn* u. *B. Brahn.* In-8°, VIII-260 pages. Leipzig, Quelle et Meyer. 3 m. 80 pf.; relié : 4 m. 40 pf.

Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz (Fortsetzg. der Publikation *Das schweizer. Dreiecksnetz*), herausgeg. von der schweizer. geodät. Kommission. 10. Bd. Relative Lotabweichungen gegen Bern u. telephon. Uhrvergleichung am Simplon. In-4°, IX-407 p. av. fig., 2 pl. et 12 cartes en couleurs. Zurich, Fäsi et Beer. 15 m.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ROUSE BALL (W.). — RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES ET PROBLÈMES DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES. Deuxième édition française, traduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par *J. Fitz-Patrick*. Première Partie : ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES. 1 volume in-8 de 355 pages. Paris, Hermann, 1907.

Il ne faut pas mépriser les récréations mathématiques; la passion qu'il éprouve pour sa science de prédilection peut devenir, chez un mathématicien, assez absorbante pour qu'il ne sache plus trouver de délassement que dans cette science même, et, d'un autre côté, le goût pour cette science peut être éveillé chez les commençants par les énigmes attrayantes auxquelles elle permet de répondre, par la satisfaction qu'ils éprouvent à connaître ou à trouver eux-mêmes la réponse de ces énigmes. On éprouve du plaisir à s'étonner ou à étonner les autres, et Aristote a dit que l'étonnement est le commencement de la Science. Puis, l'amusement, le jeu ne sont pas étrangers au goût du beau, au moins du joli; il y a un peu de beauté dans la joliesse; on commence par sentir celle-ci, on se passionnera plus tard pour celle-là. Enfin, il y a un intérêt historique à savoir ce qui a amusé nos ancêtres; la naïveté de certaines questions, l'ingéniosité de quelques autres, la forme singulière qu'ils leur donnaient parfois ne sont pas pour nous déplaire, et il serait fâcheux que tout cela se perdît.

On saura donc gré à M. Rouse Ball d'avoir réuni toutes ces *Récréations*, à M. Fitz-Patrick de les avoir traduites en français et d'en avoir ajouté bon nombre qui ne figuraient pas dans l'édition anglaise, à M. Hermann de les avoir publiées et d'avoir apporté sa contribution en étudiant la « comptabilité d'une personne qui dépense plus que son revenu ». Que ce titre n'effraye pas le lecteur. Les conclusions de M. Hermann sont fort morales et ne ressemblent nullement à celles de ce Panurge qui, après avoir mangé son blé en herbe et brûlé son bois pour la vente des cendres,

louait les detteurs et emprunteurs dans le plus magnifique des langages.

La Note de M. Hermann termine sérieusement le Livre. M. Fitz-Patrick a mis en tête une histoire amusante des premiers nombres, où abondent les anecdotes, les légendes, les curiosités de toute sorte; il s'est arrêté au nombre 14. Bien plus forts étaient les buveurs de je ne sais quel pays qui prenaient le second verre parce qu'on ne va pas sur une jambe, le troisième en l'honneur de la Trinité, le quatrième en l'honneur des Évangélistes, etc., et qui allaient ainsi jusqu'aux Onze mille vierges.

Entre ces deux additions au Livre de M. Rouse Ball, on trouvera d'abord deux Chapitres où sont recueillies un très grand nombre d'énigmes ou de questions, souvent très élémentaires, tirées, pour la plupart, des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet de Méziriac ou des *Récréations mathématiques et physiques* d'Ozanam, et sur lesquelles l'auteur donne, à l'occasion, d'intéressants renseignements historiques. A ce vieux fonds, qui n'est nullement à dédaigner, M. Rouse Ball et M. Fitz-Patrick ont d'ailleurs beaucoup ajouté. Le second Chapitre se termine par quelques considérations d'un ordre plus relevé : théorème de Fermat; nombres parfaits, amiables, etc. Enfin, M. Rouse Ball a consacré tout un Chapitre, qui, à la vérité, est court, aux nombres de Mersenne, c'est-à-dire aux nombres premiers de la forme $2^p - 1$.

J. T.

LECORNU (L.) — Dynamique appliquée. (*Encyclopédie scientifique : Bibliothèque de Mécanique appliquée.*) 1 volume in-18 de 550 pages. Paris, Doin, 1908.

Dans l'Introduction générale écrite pour la *Bibliothèque* qu'il dirige et à laquelle appartient ce Volume, voici ce que dit M. d'Ocagne :

« On oppose assez volontiers, dans le domaine de la Mécanique appliquée, l'homme de la théorie à l'homme de la pratique. Le premier, enclin aux spéculations abstraites, est tenu pour préférer aux problèmes qu'offre la réalité ceux qui se prêtent plus aisément aux solutions élégantes et, par suite, pour être disposé à négliger,

en dépit de leur importance intrinsèque, telles circonstances qui seraient de nature à entraver le jeu de l'instrument analytique; le second, au contraire, uniquement soucieux des données de l'empirisme, pour regarder toute théorie scientifique comme un luxe superflu dont il vaut mieux se passer.

» Ce sont là des tendances extrêmes contre lesquelles il convient de se mettre en garde. S'il est vrai que certains esprits, séduits par l'imposante beauté de la science abstraite, ont quelque répugnance à se plier aux exigences de la réalité, généralement difficiles à concilier avec une aussi belle harmonie de forme; que d'autres, en revanche, par crainte des complications qu'entraîne à leurs yeux l'appareil analytique, peut-être aussi, parfois, en raison de leur manque d'habitude à le manier, tendent à méconnaître les éminents services qu'on en peut attendre, il n'en reste pas moins désirable, pour le plus grand bien des applications, de voir réaliser l'union la plus intime de la théorie et de la pratique : de la théorie qui coordonne, synthétise, réduit en formules simples et parlantes les faits révélés par l'expérience, et de la pratique qui doit, tout d'abord, les en dégager. La vérité est que l'une ne saurait se passer de l'autre, que toutes deux doivent progresser parallèlement.... »

C'est, en quelque sorte, pour faciliter cette union, pour faire clairement apparaître aux yeux des ingénieurs toutes les ressources qu'ils peuvent tirer de la Mécanique rationnelle, que le Volume de M. Lecornu a été placé au seuil d'une Bibliothèque destinée à embrasser toutes les applications techniques de la Mécanique. C'est au surplus ce que l'auteur lui-même souligne dans son avant-propos quand il dit :

« La Mécanique rationnelle et la Mécanique technique n'ont guère d'autre parenté que celle du nom....

» Il est évidemment désirable que ces deux Mécaniques allient davantage leurs efforts : l'une et l'autre ne peuvent que gagner à ce rapprochement. Depuis longtemps Poncelet, Saint-Venant, Resal, pour ne parler que des morts, ont cherché à créer une *Mécanique appliquée* capable de satisfaire à la fois les théoriciens et les praticiens. Leur méthode peut se résumer de la manière suivante : attaquer les problèmes que pose l'industrie en utilisant toutes les ressources de la Mécanique rationnelle et s'avancer de

cette manière aussi loin que possible; puis, quand les difficultés mathématiques deviennent trop grandes, entrer dans la voie des approximations successives, en ayant soin de ne négliger que ce qu'on a reconnu être réellement négligeable.... »

Les quelques lignes qui précèdent suffisent à indiquer dans quel esprit a été conçu le Volume de M. Lecornu. Disons maintenant un mot de son cadre. Le Volume est divisé en quatre Parties.

La première contient un *Résumé des théories de la Mécanique rationnelle*. C'est, aux démonstrations près, tout ce qu'il est utile de savoir de cette science pour en faire des applications.

Sous le titre de *Propriétés mécaniques des solides naturels*, la deuxième Partie expose les principes relatifs à l'élasticité, au frottement de glissement, aux résistances au roulement et au pivotement, à la raideur des cordes, à la résistance de l'air, aux effets des chocs.

Dans la troisième se rencontrent des *Applications diverses de la Dynamique* concernant la dynamique des ressorts, la théorie de l'indicateur de Watt (qui constitue à elle seule un Chapitre entièrement inédit), les mouvements pendulaires et divers autres mouvements (toupie, cerceau, bicyclette, etc.).

Enfin la quatrième, consacrée à la *Théorie des machines*, traite de la production et de l'utilisation de la force vive, de la régularisation du mouvement, des freins et de la dynamique des transmissions.

Ce qu'on sait des travaux de M. Lecornu permet de pressentir tout ce qu'en de telles matières il a pu donner d'aperçus personnels et de solutions originales. Quelques-uns de ces morceaux, qu'on a plaisir à voir groupés ici, ont déjà paru ailleurs sous son nom; tel est le cas pour le frottement dans les engrenages, l'appareil de blocage instantané dit *autobloc*, l'extinction du frottement, la possibilité de la loi de Coulomb, l'influence de la masse sur la hauteur d'ascension d'un corps pesant lancé verticalement, le pendule de longueur variable, la théorie de l'escarpolette, les turbines à axe flexible, le volant élastique, et une grande partie du Chapitre sur les régulateurs.

D'autres sont entièrement inédits. En dehors de la théorie, déjà citée, de l'indicateur de Watt, on peut encore indiquer à cet égard le rendement dans le joint universel, les roulements sur billes, le

nombre optimum de poulies d'un palan en vue du meilleur rendement, le choc d'une roue contre un obstacle, le pendule dynamométrique, l'appareil à mesurer les balourds, l'influence du déplacement d'un axe de rotation, diverses remarques sur le travail des machines, les conditions du travail des forces intérieures, le rôle utile du frottement, le freinage sur une voie courbe, la tension des barres d'un train, etc.

« Je serais heureux, dit M. Lecornu, dans son avant-propos, si les ingénieurs qui voudront bien me lire éprouvaient l'impression que la Mécanique rationnelle ne sert pas uniquement à la conquête des diplômes. »

A notre tour, nous émettrons le vœu que cet excellent petit Volume contribue à faire la preuve, aux yeux de tous les étudiants en Mécanique, que la Mécanique rationnelle n'est pas uniquement une mine d'exercices d'Analyse, et qu'il ait pour effet de développer en eux le *sens* de la Mécanique. Certes, nous sommes loin de médire des Recueils d'exercices de Mécanique conçus à un point de vue plus purement analytique; leur valeur est loin d'être négligeable sous le rapport de la culture générale de l'esprit; mais il est très désirable qu'à côté des problèmes qu'on y rencontre la pratique véritable en pose d'autres à la Mécanique rationnelle, que celle-ci soit apte à résoudre. Ce sont des problèmes de cette nature que M. Lecornu a su habilement grouper dans son Volume, et c'est ce qui le recommande, en dehors du public spécial plus particulièrement visé par l'auteur, à tous ceux qui, à des titres divers, s'intéressent à l'étude de la Mécanique. P. M.

CHARBONNIER (Commandant P.). — BALISTIQUE INTÉRIEURE. (*Encyclopédie scientifique : Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie.*) 1 volume in-18 jésus, 351 pages. Paris, Doin, 1908.

Après les deux Volumes consacrés à la Balistique extérieure rationnelle, dont il a été rendu compte dans le *Bulletin* (¹), le Commandant Charbonnier vient de faire paraître une *Balistique intérieure* où sa part contributive dans l'édification de la science

(¹) Année 1907, p. 105 et 167.

apparaît encore plus considérable. Il semble bien, en effet, que le côté théorique du problème de l'effet des poudres dans les bouches à feu n'avait pas encore reçu un tel développement et que, faute d'avoir poussé assez loin l'application de l'Analyse mathématique à cet ordre de phénomènes, on n'avait point entrevu les analogies cachées dévoilées par l'auteur entre les deux Balistiques, *a priori* si dissemblables.

Le Commandant Charbonnier distingue, dans le domaine de la Balistique intérieure :

1° L'étude expérimentale et théorique de la combustion en vase clos, ou *Pyrostatique;*

2° L'examen raisonné des phénomènes de la combustion dans le canon, ou *Pyrodynamique physique;*

3° Le développement analytique des conséquences rigoureuses des hypothèses faites et des lois admises, ou *Pyrodynamique rationnelle.*

La Pyrostatique, telle que l'institue ici le Commandant Charbonnier, interprète fidèlement les faits expérimentaux, qu'elle ramène à trois lois secondes : la première, dite de Noble et Abel, reliant la pression maximum en vase clos à la densité de chargement, la seconde réglant la vitesse de combustion d'après une certaine fonction, dite *de forme,* qui dépend de la nature de la poudre employée, la troisième donnant la vitesse de combustion en fonction de la pression.

Cette théorie aboutit à une détermination facile des *caractéristiques* des poudres, au nombre de cinq, dont trois (*force, covolume, exposant de pression*) définissent le *genre* de la poudre considérée, une autre (*forme*) son *espèce* et la dernière (*vivacité*) sa *variété.*

Dans l'étude de la Pyrodynamique physique, l'auteur, fidèle à la méthode qu'il a suivie en Balistique extérieure, sépare le problème principal des problèmes secondaires, c'est-à-dire de l'étude des influences secondes relatives soit au projectile, soit au canon, soit à la charge, soit à l'atmosphère, dont il examine successivement l'importance et le mode d'action sur les constantes des trois équations différentielles régissant le problème principal (équation du potentiel; équation d'inertie; équation de la combustion de la poudre).

Parmi les résultats pratiques tirés par l'auteur de la théorie qu'il développe dans cette partie de son Ouvrage, signalons : une interprétation nouvelle d'une théorie de Hugoniot; la notion de la veine gazeuse dans l'âme, avec ses nombreuses conséquences; l'explication de l'usure du canon, etc.

La discussion à laquelle se livre le Commandant Charbonnier lui permet, en outre, de donner un solide fondement aux équations différentielles qu'il traite ensuite dans la partie de son Ouvrage consacrée à la Pyrodynamique rationnelle.

Après avoir montré que ces équations différentielles sont susceptibles d'une intégration rigoureuse, malheureusement trop compliquée pour se prêter aux applications, il parvient, en employant une série inconnue jusqu'ici, à une solution satisfaisante, pratique, simple, et d'une telle généralité qu'il est facile d'y faire rentrer, comme cas particuliers, presque tous les travaux antérieurs sur la Balistique intérieure.

Il arrive ainsi à donner (et pour la première fois, avec une telle généralité) la solution complète du problème de la Balistique intérieure, comportant la détermination, en chaque point de l'âme du canon, de la vitesse du projectile lorsqu'il y passe, de la pression qui s'y exerce, ainsi que du temps du parcours, celle aussi de la pression maximum et de la pression à la fin de la combustion de la poudre.

Cette solution est d'ailleurs complétée par une savante discussion d'où l'auteur tire une suite d'importants théorèmes généraux. Là se rencontrent les particularités des courbes des vitesses et des pressions dans l'âme, à l'origine et au point singulier qui correspond à la fin de la combustion de la poudre, les cas où la pression maximum peut être imaginaire, où la poudre ne peut totalement brûler même dans un canon d'âme indéfinie, les courbes de sécurité du canon, la théorie de la similitude des bouches à feu, etc.

Dans tous ces développements l'auteur conserve cette fonction de forme, caractéristique de la nature de la poudre employée; mais, en un Chapitre spécial, il examine le cas où cette fonction se réduit à l'unité, qui est celui des poudres à combustion constante, limite qui n'est pas très éloignée de l'état de nos poudres naturelles.

Toute cette théorie est, d'ailleurs, bien loin de n'avoir qu'un

intérêt purement spéculatif. Sans entrer dans des détails qui ne seraient point ici à leur place, qu'il nous suffise de dire que le Commandant Charbonnier en déduit des règles non moins pratiques que rationnelles pour la conduite des expériences de tir et leur utilisation en vue de la recette des poudres.

On ne peut assurément manquer d'être très frappé de ce fait que l'application de ces formules théoriques à la pratique donne des résultats précis pour toutes les bouches à feu, dans toutes les conditions de chargement, résultat auquel les meilleures formules empiriques, fondées sur des milliers de coups de canon, ne peuvent prétendre que dans des conditions très particulières et sur une étendue très restreinte. Ces formules permettent, en effet, le calcul *a priori,* et sans qu'il soit besoin de tirer un seul coup de canon, des vitesses et pressions à l'aide des seules *caractéristiques* des poudres, énumérées plus haut, et que l'on détermine dans une bombe [1].

A titre d'annexe, l'auteur passe en revue les principaux travaux mathématiques poursuivis par divers savants balisticiens dans l'hypothèse plus générale d'un exposant de pression différent de l'unité. Il nous fait ainsi connaître les théorèmes d'homogénéité de Gossot et Liouville et les formules de Sarrau appliquées aux poudres BM par le colonel Jacob, et dont il obtient, en outre, une importante généralisation.

Au point de vue philosophique, il est intéressant de noter la sorte de parallélisme que le savant exposé du Commandant Charbonnier fait apparaître entre la Balistique extérieure et la Balistique intérieure, alors qu'il semble *a priori* qu'aucune analogie n'existe entre ces deux sciences relatives à des faits qui, suivant l'expression de l'auteur lui-même, se passent, pour ainsi dire, dans deux mondes différents, l'air et le feu, ou, sous une forme plus précise, qui sont tributaires les uns de la Dynamique, les autres de la Thermodynamique.

Les forces mises en jeu, les équations différentielles, les questions à résoudre n'ont aucun point de commun ; et pourtant, l'application systématique d'une même méthode générale de recherche

---

[1] *Voir*, à ce sujet, dans le *Mémorial de l'artillerie navale* de 1907, le *Mémoire sur la Balistique intérieure* du Commandant Charbonnier, dans lequel il donne les Tables toutes calculées pour l'application aux poudres BM.

et des mêmes principes guides a conduit, pour l'une et pour l'autre science, à une même solution, satisfaisante pour la théorie et la pratique, au même degré et par les mêmes moyens.

Si cela n'est pas fait pour surprendre ceux qui ont réfléchi sur le rôle véritable joué par la théorie mathématique dans le domaine des sciences physiques, et qui savent la part de subjectif qui s'y rencontre, cela vaut au moins la peine d'être noté, lorsque les schémas analytiques auxquels ont été réduits deux ordres de faits différents présentent d'aussi frappantes analogies.

Plus profondément original encore que ceux qui l'ont précédé, et appelé, sans doute, à être non moins fécond, le nouveau Livre du Commandant Charbonnier vient, une fois de plus, faire la démonstration des services que la pratique journalière peut retirer de la théorie la plus élevée. Grâce à lui, la Balistique intérieure peut être regardée comme définitivement placée au rang des sciences rationnelles. P. M.

MATHEWS (G.-B.). — ALGEBRAIC EQUATIONS (n° 6 des *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*). 1 volume in-8 de 64 pages. Cambridge, University Press, 1907.

L'auteur a su résumer dans ce petit Volume les points les plus essentiels de la théorie de Galois. La proposition fondamentale de Galois est établie en partant d'une fonction linéaire des racines à coefficients indéterminés, et M. Mathews montre à diverses reprises le parti qu'on peut tirer de cette indétermination. Il adopte, d'ailleurs, comme l'a fait M. H. Weber dans son beau *Traité d'Algèbre*, le mode de démonstration, fondé sur la théorie des fonctions symétriques, qu'on doit à Hermite [1]. C'est la démonstration la plus facile à retenir; elle a, en outre, l'avantage de s'appliquer dans d'autres circonstances ; je crois, cependant, qu'il convient de garder à côté, dans l'enseignement, la démonstration de Galois, fondée uniquement sur la théorie du plus grand commun diviseur. Après avoir établi les propriétés fondamentales du groupe de Galois, et avoir montré dans quelles conditions la résol-

---

[1] *Œuvres*, t. I, p. 4.

vante de Galois peut devenir réductible par l'adjonction d'une irrationalité convenable, M. Mathews traite successivement des équations cycliques, des équations abéliennes, des équations métacycliques (au sens de Kronecker). Enfin les six dernières pages (*Solution by standard forms*) sont consacrées à décrire brièvement, d'après M. Klein, les relations de l'équation du cinquième degré et de l'icosaèdre. J. T.

LOVE (A.-E.-H.). — A TREATISE ON THE MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY. 1 vol. in-8°, XVII-551 pages, 2e édition; Cambridge, 1906. Traduction allemande de M. *Timpe;* Leipzig, 1907.

Il y a une quinzaine d'années (1892-1893), M. Love n'a pas reculé devant les difficultés que présente une exposition didactique de la théorie de l'élasticité et de ses applications, et il a publié un Traité étendu sur ce corps de doctrine, d'une importance maîtresse dans la Physique et dans l'art des constructions. Les lecteurs de ce *Bulletin* savent avec quelle faveur a été accueillie cette initiation, qui s'est traduite par un Ouvrage fort bien informé et composé d'une manière claire et élégante. M. Love vient de reprendre complètement son travail, pour en améliorer encore les dispositions générales et pour l'enrichir des nombreuses recherches de ces dernières années. La seconde édition anglaise, qui a paru en 1906, a été traduite immédiatement en Allemagne par M. Timpe. Le Livre de M. Love s'adresse surtout aux physiciens et aux ingénieurs; les questions purement théoriques, qui n'ont pu jusqu'à présent aboutir à des applications concrètes, n'y sont pas pourtant tout à fait négligées. Dans une introduction historique intéressante, qui occupe les trente premières pages de l'Ouvrage, l'auteur montre que les savants qui ont le plus fait pour amener la théorie de l'élasticité dans son état de développement actuel étaient surtout préoccupés de Philosophie naturelle, et beaucoup moins de rendre le monde matériel « confortable », au sens anglais du mot; mais M. Love met aussi en évidence, avec une véritable richesse d'exemples, la très grande utilité pratique de ces recherches désintéressées, et il faut espérer que son Traité

si bien présenté et si aisé à lire saura retenir particulièrement l'attention des techniciens.

I. Les premiers Chapitres établissent les équations générales de la théorie de l'élasticité suivant la méthode de Green, en considérant les corps comme continus, sans faire appel par conséquent aux actions moléculaires, qui ont donné lieu autrefois à tant de controverses.

L'étude géométrique de la déformation est exposée avec tous les ingénieux développements qu'on doit à Lord Kelvin et Tait; la distinction entre la déformation générale et la déformation infiniment petite est bien marquée, et aucune indécision ne peut ainsi se produire sur la portée des problèmes qui seront résolus dans le cours de l'Ouvrage; mais il n'aurait pas été sans intérêt de préciser davantage de quelle façon la déformation est définie par ses composantes.

Les équations entre les efforts reposent, conformément à la méthode classique, sur la notion *a priori* d'effort sur un élément plan et sur le principe de solidification; elles sont établies seulement au point de vue eulérien. Il n'aurait pas été inutile peut-être de donner aussi les équations lagrangiennes, qui introduisent plus régulièrement la considération des efforts initiaux. Pour obtenir les équations dynamiques, l'auteur applique le principe de d'Alembert, mais en signalant, dans une autre partie de son Livre, la notion d'anisotropie cinétique due à Rankine.

L'existence de la fonction qu'on appelle *énergie de déformation* est déduite, avec Lord Kelvin, des deux principes fondamentaux de la Thermodynamique; il en résulte, par voie purement rationnelle, la forme générale des relations entre les efforts et les déformations; dans le cas de la déformation infiniment petite, ces relations traduisent la loi de Hooke généralisée. L'auteur insiste sur ce point que l'expérimentation peut seulement fournir une vérification indirecte de cette loi, car on ne peut observer que des déformations moyennes ou des changements de forme extérieure, et, d'autre part, la distribution des efforts à la surface d'un corps est généralement inconnue. Quelques indications sont données sur l'introduction de la température dans les équations de l'élasticité.

On n'a guère pu étudier théoriquement jusqu'ici que la déformation infiniment petite des corps élastiques, et M. Love se borne à une description des phénomènes de déformation permanente et de rupture, de viscosité et de fatigue d'élasticité. Il fait connaître les expériences de Vöhler et de Bauschinger, ainsi que les diverses déterminations proposées pour la tendance à la rupture par Lamé, Poncelet et Coulomb. Ces déterminations se font, il est nécessaire de le remarquer, au moyen des solutions obtenues dans l'hypothèse où l'état déformé est infiniment voisin de l'état naturel; mais l'auteur a soin de faire ressortir comment de telles solutions peuvent en effet donner à elles seules des indications précieuses au praticien, par exemple sur le danger des angles rentrants à arête vive dans les pièces de construction, ou d'une petite cavité sphérique dans leur masse; il signale aussi les notables différences de déformation qui se produisent quand une charge est soudainement ou graduellement appliquée et les conclusions importantes auxquelles on peut arriver à l'égard de la stabilité des corps minces.

Tout un Chapitre est consacré aux belles recherches de M. W. Voigt sur l'élasticité des cristaux et sur les différentes formes que prend l'énergie de déformation, quand on envisage la symétrie géométrique que manifestent les substances cristallines.

Cet exposé des principes de la théorie de l'élasticité se termine par la démonstration des théorèmes généraux qu'on a pu obtenir dans l'étude des équations de la déformation infiniment petite. M. Love fait voir d'abord comment on peut déduire ces équations du principe d'Hamilton, ce qui lui permet d'introduire ensuite d'une manière rapide la considération des coordonnées curvilignes orthogonales de Lamé. Il établit l'unité de solution du problème de la déformation infiniment petite, dans le cas envisagé par Kirchhoff, et sans donner peut-être à cette question capitale toute l'importance qu'elle a prise avec les derniers progrès de l'Analyse. Il fait connaître l'expression remarquable de l'énergie de déformation au moyen du travail effectué entre l'état naturel et l'état déformé, qui est due à Clapeyron, et enfin le beau théorème de réciprocité de Betti, avec les intéressantes déterminations des déformations moyennes qui en découlent si aisément. Il ajoute finalement à ces résultats généraux la théorie des sons propres

d'un corps élastique, à laquelle Clebsch est arrivé par une extension de la solution de Poisson du problème des vibrations radiales d'une sphère.

2. M. Love aborde maintenant la question de l'intégration des équations de la déformation infiniment petite, sous des conditions imposées à la frontière.

Il débute par une étude toute pratique des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité, qui ont été envisagées pour la première fois par Lord Kelvin. Il les applique, comme l'a fait M. Boussinesq, au problème de la déformation infiniment petite d'un milieu indéfini limité par un plan, et avec Hertz à l'étude de la pression entre deux corps en contact et à la théorie du choc. Il considère particulièrement le cas où le déplacement n'a que deux composantes et ne dépend que des coordonnées dans le plan de ces dernières; il donne les résultats obtenus, avec cette simplification, par M. Flamant et par M. Michell.

M. Love expose ensuite la méthode d'intégration de Betti, qui repose sur la construction d'un triplet de fonctions dont le rôle est semblable à celui de la fonction de Green dans l'étude de l'équation de Laplace. Il présente un aperçu des nombreuses recherches que les géomètres italiens ont faites dans la voie ouverte par Betti, en mentionnant particulièrement les travaux de M. Cerruti et de M. Somigliana sur le problème du milieu indéfini limité par un plan et sur le problème de la sphère.

Le problème de la sphère, depuis qu'il a été résolu par Lamé, a été traité de bien des manières différentes. La méthode italienne est aujourd'hui très rapide; mais il est naturel de trouver, dans un Traité anglais, les calculs élégants de Lord Kelvin, qui n'exigent que l'emploi des coordonnées rectilignes. La solution obtenue est appliquée, avec M. G.-H. Darwin et M. C. Chree, à l'étude des marées élastiques qui se produisent dans la masse terrestre supposée incompressible et à celle des déformations qui résultent de la rotation de cette masse, sollicitée seulement par les forces newtoniennes intérieures.

La sphère est le type le plus simple du corps rond sans arêtes. L'auteur envisage ensuite le cylindre droit à section circulaire ou rectangulaire, mais il étudie seulement à l'égard d'un tel corps un

certain nombre de problèmes particuliers. On ne sait, en effet, actuellement résoudre le problème du cylindre circulaire ou rectangulaire droit que sous les conditions suivantes à la frontière : 1° on peut se donner d'une manière quelconque sur les bases soit le déplacement, soit l'effort, mais sur la surface latérale doivent être prescrites ou bien la composante normale de l'effort et les composantes tangentielles du déplacement, ou bien la composante normale du déplacement et les composantes tangentielles de l'effort; 2° on peut se donner sur la surface latérale soit le déplacement, soit l'effort, mais sur les bases doivent être prescrites ou bien la composante normale de l'effort et les composantes tangentielles du déplacement, ou bien la composante normale du déplacement et les composantes tangentielles de l'effort. Cela résulte, pour le prisme rectangle, de la solution particulière en coordonnées rectilignes obtenue autrefois par Lamé sous la forme de produits XYZ, X étant seulement fonction de x, Y de y, Z de z; un tel genre de solution a été aussi trouvé depuis, presque simultanément, par MM. Schiff, Thomae et C. Chree, avec les coordonnées cylindriques. Le problème du prisme rectangle où, par exemple, l'effort est donné sur les six faces, qui a été posé sans succès par l'Académie des Sciences de 1846 à 1858, n'a pu encore être résolu effectivement, et l'on sait que Barré de Saint-Venant a écrit que, si l'on arrivait à la solution, elle serait de forme tellement complexe qu'on ne pourrait l'utiliser.

L'auteur présente ensuite une étude très intéressante du problème dynamique pour la sphère et le cylindre circulaire droit. Le mouvement vibratoire d'une sphère est déterminé très complètement d'après MM. Jaerisch, H. Lamb et C. Chree; Poisson avait déjà considéré les vibrations radiales, dans son célèbre Mémoire de 1828. Les vibrations d'un cylindre circulaire sont données d'après un travail de Pochhammer; mais la solution considérée donne lieu aux mêmes réserves que celles que nous avons indiquées pour le problème statique.

M. Love termine cet exposé des problèmes de la théorie de l'élasticité qui ont pu être résolus rigoureusement, par un Chapitre sur la propagation des ondes dans un milieu isotrope; on remarquera les indications données par l'auteur sur ses recherches personnelles à l'égard de l'extension du théorème de Kirchhoff et sur

celles de Lord Rayleigh relatives à la propagation des phénomènes sismiques à la surface de la Terre.

3. La dernière partie de l'Ouvrage est celle où les difficultés d'exposition sont les plus grandes. Il s'agit de la théorie des corps minces, c'est-à-dire, suivant les idées de Poisson et de Cauchy, du passage de la théorie des corps à trois dimensions à celle des corps à une ou deux dimensions. M. Love, dont la première édition avait, sur ce point, soulevé des critiques, a considérablement remanié son Traité. Nous ne pensons pas que, même en adhérant étroitement aux idées de Kirchhoff et de Clebsch, comme il le fait aujourd'hui, il soit parvenu à une doctrine à l'abri de toute contestation.

Il commence par le problème de Saint-Venant, qui consiste à déterminer la déformation d'un cylindre connaissant sur la surface latérale les efforts et sur les bases seulement la résultante et le moment résultant de ces efforts. La solution que l'illustre élasticien a donnée du problème ainsi posé est certainement privilégiée, mais elle n'est pas unique. Pour en justifier l'intérêt, M. Love invoque le principe de l'équivalence des charges statiquement équipollentes, établi par Saint-Venant au moyen d'expériences sur la torsion des tiges de caoutchouc, par M. Boussinesq au moyen de la solution du plan indéfini, par Lord Kelvin et Tait au moyen de la solution du prisme rectangle pour les conditions particulières à la frontière que nous avons indiquées plus haut. D'après ce principe, quand la distribution des efforts change sur les bases d'un cylindre, sans que le système résultant de ces efforts soit modifié, il se produit seulement des perturbations locales dans le voisinage des bases, et, sur le reste de la longueur supposée suffisamment grande, la déformation du cylindre est sensiblement régie par la solution de Saint-Venant. Mais un tel principe, si intéressant qu'il soit pour les physiciens, qui ont en vue la mesure des modules d'élasticité, peut difficilement être admis dans la pratique des ingénieurs, qui doivent avant tout avoir égard aux déformations dangereuses, qu'elles soient localisées au centre ou aux extrémités d'une pièce. Le grand intérêt du problème de Saint-Venant se trouve ailleurs; nous avons eu l'occasion récemment de montrer que si Poisson et Cauchy avaient poursuivi leurs calculs, dans la

théorie des corps minces posée par eux en 1828, ils seraient arrivés au problème de Saint-Venant pour la tige à section circulaire ou rectangulaire, et au problème tout à fait analogue auquel est parvenu M. Maurice Levy pour la plaque en 1877. C'est là, suivant nous, que semble se trouver la véritable raison du privilège singulier que possède la solution de Saint-Venant, et l'on peut se demander si ce dernier, calculateur laborieux comme il était et lecteur particulièrement compétent de Poisson et de Cauchy, n'a pas, sans bien s'en rendre compte peut-être, pour arriver à sa découverte, suivi précisément la voie tracée par ses prédécesseurs qu'il a tant critiquée. Les observations qui précèdent n'enlèvent d'ailleurs rien de leur valeur aux développements étendus que M. Love consacre à l'étude de la torsion et de la flexion des tiges, et tout porte à croire que la solution de Saint-Venant aura encore un rôle important, même quand on saura résoudre dans tous les cas le problème de la déformation infiniment petite d'un cylindre droit; elle servira sans doute de point de départ dans l'étude précise des perturbations locales dont il a été question plus haut.

Après le problème de Saint-Venant, l'auteur aborde la théorie des corps minces, en commençant par les tiges. Cette théorie, depuis Kirchhoff jusqu'à M. Boussinesq, se ramène au fond aux idées générales suivantes, qui permettent de la présenter comme un prolongement de la résistance des matériaux. Le corps est rapporté, dans l'état naturel, à un ensemble de trièdres, dépendant du même paramètre géométrique, et, dans l'état déformé, à un autre ensemble de trièdres, dépendant du même paramètre géométrique, qu'on peut regarder comme une déformation du premier; on exprime que la déformation du corps *relativement* à l'ensemble déformé de trièdres est infiniment petite, puis on applique le problème de Barré de Saint-Venant. C'est ce dernier point qui est fondamental dans la théorie des tiges, quand on la débarrasse de tous les détails accessoires qu'introduit la cinématique du trièdre mobile. Nous avons cherché, il y a quelque temps, ce que peut signifier une théorie telle que la précédente, en nous plaçant dans le cas simple de la déformation infiniment petite d'un cylindre mince; les composantes du déplacement étant regardées comme des fonctions du paramètre dont dépend la section transversale du cylindre, la valeur zéro de ce

paramètre ne correspond ni à un point ordinaire, ni à un pôle, et la solution du problème de l'équilibre d'une tige mince ne paraît pas, dans l'état actuel de l'Analyse, susceptible d'une approximation dont on puisse apprécier la précision; c'est parce qu'elle n'accuse pas nettement cette insuffisance de la théorie des tiges minces que l'exposition de M. Love peut prêter à la critique.

Les mêmes observations s'appliquent à la théorie des couches minces que l'auteur donne après celle des tiges minces. Il s'agit encore de la superposition de deux déformations particulières; la première est celle où la normale à la surface moyenne non déformée reste rectiligne et normale à cette surface moyenne déformée; la seconde est la déformation infiniment petite du problème de M. Maurice Levy, qui joue ici exactement le même rôle que le problème de Saint-Venant; ce dernier point ne paraît pas avoir été aperçu par M. Love, qui semble même ne pas connaître le beau travail de M. Maurice Levy auquel nous faisons allusion.

Quoi qu'il en soit, M. Love arrive aux équations de la ligne déformable et de la surface déformable, telles qu'on les connaissait avant l'introduction de la théorie des corps minces; d'après ce qui précède, il n'aurait pas été certainement sans intérêt de les établir aussi d'une manière directe et indépendante, comme l'ont fait, par exemple, Lord Kelvin et Tait, dans leur *Natural Philosophy*. Dans une suite de Chapitres, composés avec le plus grand soin, le lecteur trouvera les nombreuses applications qu'on peut faire de ces équations, théorie des poutres continues, problème de l'élastique, étude des ressorts, statique des plaques, stabilité des verges et des surfaces élastiques courbes. L'Ouvrage se termine par une exposition des recherches nombreuses que les savants anglais ont faites sur le mouvement vibratoire des verges droites ou courbes, et des plaques ou des cloches. Les équations dynamiques qui servent de base à ces recherches sont obtenues en exprimant que les forces intérieures du problème statique sont les forces d'inertie; M. Love essaye aussi de les déduire de la théorie des corps minces, mais cette manière de procéder donne lieu à des objections très graves, car si, en conduisant convenablement la théorie de Poisson et de Cauchy, on aboutit, dans le cas de l'équilibre, aux problèmes de Saint-Venant et de Maurice Levy, il n'en est plus du tout de même dans le cas du mouvement. Il ne

paraît même pas certain d'ailleurs que l'application du principe de d'Alembert au mouvement d'une ligne ou d'une surface élastique conduise toujours à des résultats vérifiés par l'expérience.

Tel est le cadre général que M. Love a donné à son œuvre; c'est un Livre où ne se dissimulent pas les imperfections d'une théorie qui n'a guère qu'un siècle d'existence, et par là les chercheurs le trouveront très suggestif; dans l'analyse rapide que nous venons d'en faire, nous avons à peine montré combien de renseignements et d'indications précieuses on y rencontrera; tous les matériaux essentiels et utiles à celui qui veut être guidé à travers la grande variété des travaux originaux sur la théorie de l'élasticité y sont rassemblés, et il n'est pas douteux que la deuxième édition du Traité de M. Love ne trouve le vif succès qu'a déjà obtenu la première.

E. et F. Cosserat.

BROSZAT (W.). — Ueber Scharen von ∞^4 Flächen im R_3, die durch Berührungstransformation in Scharen von ∞^4 Curven überführbar sind. Inaugural-Dissertation, 53 pages, in-8. Berlin-Wilmersdorf, C. Arnold, 1907.

M. Broszat s'est proposé de chercher sous quelles conditions un faisceau de surfaces à quatre paramètres

$$z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$$

peut être changé en un faisceau de ∞^4 courbes par une transformation de contact.

On écarte tout d'abord le cas où les surfaces considérées vérifieraient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et où, par conséquent, ces surfaces peuvent être changées, par une transformation de contact, en une quadruple infinité de courbes planes.

Ce cas écarté, on voit aisément que les surfaces du faisceau vérifient en général deux équations aux dérivées partielles du second ordre; il y a lieu de distinguer deux cas principaux suivant la nature de ces équations.

M. Broszat parvient ensuite à montrer, de différentes façons, qu'une condition nécessaire consiste en ce qu'une certaine sur-

face, qu'il apprend à déterminer, doit avoir un faisceau de lignes asymptotiques rectilignes. Il forme l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface et prouve que la condition nécessaire et suffisante cherchée est que trois équations indépendantes de Pfaff forment un système inconditionnellement intégrable : les conditions pour qu'il en soit ainsi sont obtenues sous forme explicite. Le cas particulier où les deux systèmes de lignes asymptotiques sont rectilignes est étudié en détail. Enfin le cas de la sphère, qui conduit à la célèbre transformation de Sophus Lie, fournit une intéressante application. J. T.

THEODOR REYE. — DIE GEOMETRIE DER LAGE. Zweite Abteilung. Vierte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. In-8°, VIII-335 pages. Stuttgart, A. Kröner, 1907.

C'est avec joie que nous saluons l'apparition de la quatrième édition de l'excellent Ouvrage de M. Reye sur la Géométrie de position. L'auteur est un des rares savants qui sont demeurés fidèles aux méthodes dites *synthétiques*. Il ne cesse d'améliorer son Traité, qui, dès le début, a été accueilli avec tant de faveur et qui s'inspire des idées de von Staudt, Möbius, Chasles, Cayley, Cremona, Plücker, etc. A diverses reprises, nous avons fait connaître à nos lecteurs et le plan de l'Ouvrage et les compléments qui y ont été apportés. Dans la préface, qu'il a écrite pour cette nouvelle édition, M. Reye, en signalant les modifications qu'il a introduites, se loue beaucoup de l'aide que lui a apportée M. le professeur Jolles de Charlottenburg.

Cette seconde Partie est consacrée, comme on sait, à l'étude de la collinéation et de la corrélation en général; à la génération des surfaces par des faisceaux projectifs; à l'étude des surfaces du second degré, des congruences et des complexes linéaires, du cylindroïde, des cubiques gauches; aux surfaces homofocales du second degré. Un supplément étendu comprend un grand nombre de théorèmes et d'exercices de grand intérêt. J. G.

SERRET (J.-A.). — Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung, nach *Axel Harnacks* Uebersetzung. Dritte Auflage neu bearbeitet von *Georg Scheffers*. Zweiter Band : Integral-Rechung. In-8°, VIII-585 pages. Leipzig, Teubner, 1907.

L'excellent Traité de Serret que nous avons entendu professer dans notre jeunesse poursuit en Allemagne le cours de ses succès. A la vérité, chaque édition nous le présente modifié et augmenté; mais il était solidement charpenté et fait toujours bonne figure. Ce Volume, qui contient les notions élémentaires sur la définition de l'intégrale, les intégrales de fonctions élémentaires, la théorie des intégrales définies, la théorie des intégrales eulériennes, les applications analytiques et géométriques, les intégrales multiples, les fonctions d'une variable complexe, et un supplément sur les séries de Fourier, est toujours à recommander aux étudiants qui désirent acquérir des notions précises et bien ordonnées.

D. J.

O. RŒLCKE. — Ueber die Bäcklundsche transformation der Flächen konstanter Krümmung (Inaugural-Dissertation der philosophischen Fakultät der Universität Greifswald, 1907).

La transformation des surfaces à courbure totale constante due à M. Bianchi a été étudiée en 1880 par Lie, qui s'est proposé, en particulier, d'appliquer une transformation analogue au système d'éléments du premier ordre formé par les points d'une courbe et les plans osculateurs à cette courbe. Un peu plus tard, la transformation de M. Bianchi a été généralisée par M. Bäcklund.

M. Rœlcke a résolu, pour les transformations indiquées par M. Bäcklund, le problème traité par Lie pour les transformations de M. Bianchi ; il a même étudié un problème plus général en considérant le système de ∞^1 éléments du premier ordre constitué en associant à chaque point d'une courbe un des plans tangents en ce point ou, suivant la terminologie généralement adoptée, en considérant une multiplicité M_1^1 quelconque. Au système d'éléments considéré correspondent ∞^2 éléments du premier ordre. M. Rœlcke montre comment doivent être associés ces éléments pour former une famille de multiplicités M_1^1 ; il étudie ce problème

d'une manière très complète dans la première Partie de son travail et indique un grand nombre de relations entre les éléments géométriques de la courbe qui supporte la multiplicité donnée et ceux des courbes transformées.

Dans le deuxième Chapitre de sa Thèse, M. Rœlcke applique les résultats précédents à quelques exemples : il montre notamment que ces résultats comprennent comme cas particulier un théorème de M. Bäcklund, relatif aux transformations des courbes à torsion constante.

Le problème de la transformation des surfaces (ou multiplicités M_2^2) se rattache tout naturellement à celui de la transformation des multiplicités M_1^1, puisqu'une surface peut être considérée, d'une infinité de manières, comme l'ensemble de ∞^1 multiplicités M_1^1. A une surface on peut faire correspondre ∞^2 multiplicités M_1^1, et l'on doit rechercher dans quels cas il est possible d'associer ces multiplicités, de façon à obtenir ∞^1 nouvelles surfaces. M. Rœlcke a étudié cette question ; il a retrouvé le résultat bien connu : les courbures totales de la surface donnée et des surfaces transformées sont constantes et ont la même valeur ; les lignes asymptotiques et les lignes de courbure se correspondent sur ces surfaces.

M. Rœlcke généralise, en terminant, la transformation indiquée par M. Bäcklund : au lieu de considérer deux points situés à une distance donnée, l'angle des plans tangents en ces deux points restant aussi constant, on peut imaginer que ces quantités varient en satisfaisant à certaines conditions. Il est intéressant de remarquer qu'aux points correspondants de deux courbes qui supportent des multiplicités transformées, constituées par l'ensemble de leurs plans osculateurs, la torsion a la même valeur. J. Clairin.

HUGO BUCHHOLZ. — Das mechanische Potential und die Theorie der Figur der Erde (Erster Teil). Leipzig, Ambr. Barth, 1908.

Cet Ouvrage, inspiré par les leçons de L. Boltzmann, est une introduction à un Traité de haute Géodésie, qui fera la matière d'un second Volume ; l'auteur comble ainsi une lacune de la litté-

rature des mathématiques appliquées, qui ne possédait guère sur les sujets qu'il aborde que des Traités ou fort étendus ou un peu anciens, comme ceux de Helmert et de Clarke.

M. Buchholz, considérant le potentiel non comme une entité, mais comme une expression analytique commode, en fait dans les huit premiers Chapitres une exposition classique fort détaillée : l'équation de Laplace en tous systèmes de coordonnées, les formules de Poisson, de Green, de Gauss y sont démontrées, soit directement, soit en s'empruntant leurs résultats mutuels, et le lecteur saisit ainsi le lien étroit qui les unit. La formule de Green n'est point présentée comme une propriété des intégrales multiples, mais l'auteur, dont la préoccupation est de rendre les choses intuitives, l'a déduite de considérations hydrodynamiques fort simples.

La solution de Dirichlet

$$V'_A = -\frac{1}{4\pi}\int U\,\Delta V\,dz - \frac{1}{4\pi}\int V\frac{\partial U}{\partial n}\,do,$$

qui suppose la continuité de la fonction V sur la surface limite, et celle de U à l'intérieur de la surface, à l'exception du point A, est généralisée et étudiée dans le cas où le domaine d'intégration présente des discontinuités superficielles, linéaires ou ponctuelles.

La recherche d'une fonction f rendant minimum l'integrale

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

et qui conduit à l'équation de Laplace, est exposée d'après une méthode due à Boltzmann, qui s'étend au cas de trois variables, et qui ne présuppose pas, comme la démonstration de Dirichlet, l'existence même du minimum. La méthode de Boltzmann procède de la détermination de fonctions $U_{a,b}$ associées à chaque sommet (a, b) d'un quadrillage, et telles que

$$S = \sum_{a=1}^{a=m}\sum_{b=0}^{b=n}(u_{a,\,b+1} - u_{a,\,b})^2$$

soit minimum, les valeurs des fonctions u étant données sur les côtés extrêmes du quadrillage.

Les deux Chapitres suivants sont consacrés à la recherche de la

fonction potentielle dans un ellipsoïde et à l'attraction du sphéroïde de Laplace sur un point qui lui est extérieur.

Les considérations géodésiques commencent au onzième Chapitre.

La théorie du potentiel y trouve son application dans l'étude de la forme de la Terre. Les résultats relatifs à la figure d'équilibre d'un fluide incompressible en rotation autour d'un axe sont exposés; on y trouve établies les limites qu'il convient d'assigner à la vitesse angulaire de rotation pour que les figures d'équilibre possibles soient ou deux ellipsoïdes de révolution et un ellipsoïde à trois axes inégaux, ou bien un seul ellipsoïde à trois axes inégaux. Il s'en déduit que la seule forme acceptable pour la Terre est l'ellipsoïde de révolution, et le calcul montre un accord suffisant entre la valeur de l'aplatissement terrestre, tirée des considérations théoriques, et celle que fournit l'observation.

Les derniers Chapitres sont consacrés aux triangles sphéroïdiques (tracés sur un ellipsoïde de révolution peu aplati), à l'évaluation de l'erreur commise en les remplaçant par des triangles sphériques, puis par des triangles plans, au moyen du théorème de Legendre; à l'établissement de l'équation des lignes géodésiques par le calcul des variations. Et des exemples numériques viennent illustrer la théorie.

M. Buchholz a écrit un Livre d'une remarquable clarté; il a voulu éviter tout effort à son lecteur, sacrifiant la concision à ce souci; souvent, plusieurs démonstrations viennent à l'appui d'une même proposition, et, chaque fois qu'il fut possible, l'auteur a donné des interprétations géométriques ou mécaniques des formules de l'Analyse.

ARMAND LAMBERT.

MÉLANGES.

CORRESPONDANCE ENTRE LIOUVILLE ET DIRICHLET ;

PUBLIÉE PAR M. J. TANNERY.

(*Suite.*)

LIOUVILLE A DIRICHLET (1).

Quand vous m'avez adressé votre dernière lettre, j'étais à Toul ; j'y suis encore et n'ai pas vu par conséquent M. Steiner. J'apprends avec bien du plaisir qu'il va passer l'hiver à Paris : nous profiterons de cette occasion pour le prier de nous communiquer les trésors de sa géométrie : il apprendra le français et je tâcherai de me mettre un peu à l'étude de l'allemand.

Je n'ai pas beaucoup profité de mes vacances, du moins scientifiquement parlant : la politique commence en effet à nous préoccuper beaucoup. Toutefois, je vais essayer de vous donner ici une idée de quelques-unes de mes nouvelles recherches sur le développement des fonctions en séries procédant suivant les fonctions V

(1) Ce brouillon de lettre n'est pas daté; on peut supposer qu'il répond à la précédente lettre de Dirichlet, datée du 3 février 1841, en raison de ce que Liouville dit de Steiner et des *trésors* de sa géométrie. C'est l'expression même de Dirichlet. La phrase « il va passer l'hiver à Paris » n'est pas incompatible avec la supposition d'une lettre écrite au commencement de février.

Je n'ai pas la prétention d'éclaircir cette lettre; elle en suppose d'autres qui sont perdues. Il est presque inutile de dire au lecteur qu'elle se rapporte au même ordre d'idées que Liouville a développées dans les trois *Mémoires sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable*, insérés dans les deux premiers Tomes du *Journal de Mathématiques* (t. I, p. 253; t. II, p. 16 et 418) et dans quelques autres Notes de la même époque, dont une en collaboration avec Sturm. Je ne connais pas de Mémoire de Liouville sur ce sujet, postérieur à 1837.

ou U. Vous savez que les fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ dépendent de l'intégration des équations

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \rho^2 U = \lambda U.$$

$$\frac{dU}{dz} - h' U = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \qquad \frac{dU}{dz} + H' U = 0 \quad \text{pour} \quad z = Z.$$

Quand l'indice n est très grand, ces équations fournissent aisément des valeurs simples et très approchées de ρ_n et de U_n, lesquelles contiendront en outre tout naturellement tous les paramètres que l'on voudra introduire dans λ, h', H' : je puis, par exemple, admettre dans ces trois quantités un paramètre positif m avec lequel elles seront supposées s'évanouir, et la question sera de prouver que, pour une valeur quelconque de m, on a

$$F(z, m) \quad \text{ou} \quad \sum \frac{U_n \int_0^Z U_n f(z)\, dz}{\int_0^Z U_n^2\, dz} = f(x)\, dz :$$

cette équation a évidemment lieu pour $m = 0$, auquel cas U_n est un simple cosinus; il s'agit de l'étendre aux autres valeurs de m.

Je vais prouver que, si l'équation proposée a lieu pour une certaine valeur de m et pour une fonction $f(z)$ quelconque, elle aura lieu pour d'autres valeurs de m, comprises dans un certain intervalle que l'on peut fixer.

Considérons l'équation

$$\int_0^Z [F(z, m) - f(z)] U_n\, dz = 0,$$

laquelle a lieu, comme on sait, quel que soit m, puis changeons m en $m + \Delta m$: en posant $F(z, m) - f(z) = \varphi$, il viendra

$$\int_0^Z (\varphi \Delta U_n + U_n \Delta\varphi + \Delta U_n \Delta\varphi)\, dz = 0.$$

Mais, si la valeur de m jouit de la propriété énoncée plus haut et exprimée par l'équation $\varphi = 0$, il viendra simplement

$$\int_0^Z U_n \Delta\varphi = -\int_0^Z \Delta U_n \Delta\varphi\, \Delta z.$$

Dans l'hypothèse admise [en remplaçant $f(z)$ par $\Delta\varphi$], on peut développer $\Delta\varphi$ en série sous la forme

$$\Delta\varphi = -\sum \frac{U_n \int_0^Z U_n \Delta\varphi \, dz}{\int_0^Z U_n^2 \, dz},$$

en désignant par φ' et U'_n ce que φ et U_n deviennent en changeant z en z', puis posant

$$\sum \frac{U_n \Delta U'_n}{\int_0^Z U_n^2 \, dz} = \zeta,$$

après avoir substitué à $\int_0^Z U_n \Delta\varphi \, dz$ sa valeur $-\int_0^Z \Delta U'_n \Delta\varphi' \, dz'$, on a donc

$$\Delta\varphi = -\int_0^Z \Delta\varphi' \zeta \, dz'.$$

Or, pour toutes les valeurs de m et à l'aide d'une valeur approchée de U_n, il est très facile de prouver que la série ζ est convergente et que son rapport à Δm ne peut surpasser une certaine limite A, en sorte que, numériquement parlant, on a toujours $\zeta < A\Delta m$. Cela étant, soit M la plus grande valeur que $\Delta\varphi$ puisse prendre lorsque z croît de o à Z. Le second membre de cette dernière équation est $\leqq MAZ\Delta m$; mais, d'un autre côté, il peut devenir égal à M : on a donc

$$M \leqq MAZ\Delta m,$$

d'où résulte $M = 0$ et par suite $\Delta\varphi = 0$, $F(z, m) = f(z)$, toutes les fois que le produit $MA\Delta m$ est < 1 : par exemple, en supposant $2A\gamma = 1$, on voit que $\Delta\varphi = 0$ toutes les fois que Δm est $< \gamma$: ainsi l'équation $F(z, m) = f(z)$ ayant lieu pour $m = 0$, aura lieu jusqu'à $m = \gamma$, puis jusqu'à $m = 2\gamma$, $m = 3\gamma$, ..., c'est-à-dire aura lieu pour m quelconque. C. Q. F. D.

Cette démonstration suppose démontrée *a priori* la convergence de la série qui exprime $\Delta\varphi$; mais on peut, si l'on veut, à l'aide d'une modification très légère, prouver à la fois que cette convergence existe et que $\Delta\varphi = 0$. Au reste, j'aurais beaucoup d'autres

remarques à vous transmettre sur ce sujet; mais l'espace me manque : ce sera pour une autre fois.

Tout à vous,

J. LIOUVILLE.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Mon cher Liouville,

Depuis huit jours j'ai voulu chaque jour vous écrire pour vous faire part de la perte cruelle que nous venons de faire, mais les occupations nombreuses qui ont été naturellement pour moi la suite de ce funeste événement ne m'en ont pas laissé le temps. Quoique je sois ainsi devancé par les journaux qui cette fois malheureusement ont dit vrai, je me hâte de répondre à votre lettre que je reçois à l'instant, et de vous donner quelques détails sur les derniers moments de notre illustre ami. Lorsqu'il revint, vers le 20 janvier, de Gotha où il venait de passer quelques semaines dans sa famille et où il avait été atteint de la grippe, — nous le trouvâmes bien changé, sans toutefois concevoir une inquiétude sérieuse. Des bains de vapeur que son médecin lui prescrivit parurent lui faire beaucoup de bien et, comme il se remettait au travail avec son ardeur ordinaire, je me flattais de l'espoir que la belle saison, qu'il se proposait de passer à la campagne, ferait le reste et le rétablirait autant du moins qu'il pouvait être rétabli, le diabète dont il était atteint depuis plus de huit ans étant malheureusement une maladie incurable. Le mardi 11 février, il vint dîner chez moi; après le dîner, nous passâmes dans mon cabinet, où nous eûmes une de ces délicieuses conversations mathématiques que je regretterai éternellement. En se retirant vers 9 heures, il me recommanda de ne pas manquer à la séance de l'Académie du jeudi suivant, dans laquelle il voulait faire une communication sur l'orbite de Sirius, déterminée d'après les observations de Bessel et Peters. Ce fut là sa dernière sortie. Ne l'ayant pas trouvé le surlendemain à l'Académie, je me rendis chez lui le vendredi matin et j'appris qu'il avait été pris de la fièvre le soir même où il m'avait quitté. Ce jour-là, il avait encore la tête assez libre pour pouvoir causer mathématiques pendant plus d'une heure; le soir

il tomba dans un assoupissement qui ne fut plus interrompu que par des intervalles de lucidité très courts; le lundi ses médecins reconnurent qu'il était atteint de la petite vérole, le mardi à 11 heures $\frac{1}{4}$, huit jours après les premiers symptômes de la maladie, cette puissante intelligence s'éteignit sans douleur.

M. Jacobi laisse une nombreuse famille, une veuve et sept enfants, dont l'aîné n'a que 18 ans, n'ayant d'autre ressource qu'une chétive pension de 1400 à 1600 francs. Espérons que la proposition que nous avons faite hier à l'Académie, et que l'Académie a adoptée à l'unanimité, ne restera pas sans effet et que l'état se chargera de pourvoir aux besoins de la famille d'un homme qui a honoré notre pays par ses brillantes découvertes et donné une si puissante impulsion à l'étude des sciences mathématiques parmi nous.

En attendant que le gouvernement fasse son devoir, les amis de l'illustre géomètre et ceux de ses élèves qui sont favorisés sous le rapport de la fortune, ont cru faire le leur, en pensant au plus pressant et en réunissant les fonds nécessaires pour que le fils aîné de notre illustre ami puisse se livrer pendant 3 ou 4 ans à ses études universitaires. Je n'ai pas besoin de vous dire que c'est là un détail tout confidentiel, que je ne vous donne que parce que votre attachement pour notre excellent ami vous donne le droit d'être instruit de toutes les circonstances qui le concernent lui et sa famille.

Ayez la bonté de faire part à votre Académie [1] de la perte douloureuse qu'elle vient de faire. Je voulais le faire moi-même au nom de Madame Jacobi, mais je n'ai plus le temps d'écrire aujourd'hui une nouvelle lettre et demain ma lettre n'arriverait plus avant la prochaine séance.

Excusez le désordre de cette lettre et rappelez moi au souvenir de Madame Liouville ainsi qu'à celui de nos amis Mrs Chasles, Poncelet, Sturm et Lamé.

Votre dévoué

DIRICHLET.

Berlin, ce 28 fév. 1851.

---

[1] La mort de Jacobi avait été annoncée à l'Académie par Arago, le 25 février, d'après un article du *Moniteur* du même jour; le lundi suivant, Arago confirma la nouvelle, en ajoutant quelques mots sur la maladie qui avait emporté Jacobi et sur la situation précaire de sa famille (*Comptes rendus*, t. XXXII, p. 261 et 313).

LIOUVILLE A DIRICHLET.

Paris, 10 février 1853.

CHER ET EXCELLENT AMI,

Vous connaissez déjà M. Holmgren, qui vous remettra cette lettre, et qui restera quelque temps à Berlin avant de retourner en Suède. Je fais de M. Holmgren beaucoup de cas : c'est un bon géomètre, un homme d'esprit et, ce qui est mieux encore, un homme d'un caractère solide. Il vous donnera quelques nouvelles de notre Académie, où les ..... ont remplacé le *Libri,* et il vous dira que je continue à remplir consciencieusement mes devoirs, n'ayant guère peur de ces gens de mauvaise compagnie et de méchant cœur, mes anciens élèves, hélas! et que je n'ai que trop aidés quand ils étaient gelés et faibles. Ils se sont réchauffés depuis comme le serpent de La Fontaine. Mais vous savez que je crois en Dieu, ne craignez donc rien pour moi — J'ai épuisé, cher et excellent ami, la coupe amère de la douleur, le jour où j'ai perdu mon pauvre père, que vous avez vu, auquel vous avez même, je crois, rendu visite, *à Toul.* Ce père au dessus de tout éloge, qui faisait la moitié de ma vie, et la moitié de la vie de mon frère, est mort le 25 avril dernier. J'aurais dû peut-être vous écrire alors; je ne l'ai pas fait, et je n'ai été que [trop] souvent négligeant envers vous. Mais M. Holmgren vous dira que, si je n'écris pas, je parle; que votre nom est sans cesse prononcé par moi, que vos ouvrages sont toujours cités dans mes cours, comme les vrais ouvrages classiques, enfin que je conserve toute l'amitié dont vous m'avez vu animé pour vous quand j'ai eu le bonheur de vous voir à Paris en 1839.

Que devient la famille de notre Jacobi? Que fait-on pour elle? Que devient (1) la publication de ses ouvrages? Y a t-il quelque . Quand pourrai-je vous serrer la main? Que de choses j'aurais à vous dire!

Adieu, cher et excellent ami,

Votre tout dévoué,

J. L.

---

(1) Ces deux mots sont barrés.

P. S. Madame Liouville prétend que vous lui avez promis autrefois de revenir en France avec Madame Dirichlet. Venez donc, venez donc. Vous verriez en France, à l'Observatoire, un grand et beau jeune homme, qu'on appelle Ernest Liouville.

Il était à Toul, quand vous avez mis une carte chez mon père, il avait cinq ans et se souvient d'avoir lu votre carte.

Mes respects à Madame Dirichlet. Mais faites donc le voyage promis.

DIRICHLET A LIOUVILLE (1).

Cher et excellent ami,

Admirant, comme je le fais, vos belles productions et votre talent vraiment inépuisable, et n'appréciant pas moins la noblesse de votre caractère, qui vous fait prendre la défense de tout ce qui est vrai et généreux, j'ai éprouvé une satisfaction bien vive lorsque par la lettre que notre ami Holmgren m'a apportée de votre part, j'ai acquis la certitude que vous me conservez toujours l'amitié dont vous me donnâtes jadis tant de preuves lors de mon séjour à Paris. Je n'aurais certainement pas tardé jusqu'à présent à vous remercier de vos sentiments pour moi si malheureusement je n'avais été accablé cet hiver de tant de cours et d'autres occupations indispensables que je n'avais aucun instant dont je pusse disposer à mon gré. Je m'en consolais en me promettant bien de me dédommager de cet assujettissement dès que les vacances seraient venues mais en cela j'avais compté sans l'hôte ou plutôt sans la grippe à laquelle j'ai eu à payer mon tribut comme tout le monde dans ce pays, grâce à l'inversion qui s'est exercée (?) cette année entre les saisons, l'hiver ayant succédé au printemps. Quoiqu'à peine remis je ne puis pas différer plus longtemps de vous adresser ces quelques lignes, deux jeunes Anglais auxquels j'avais promis de les introduire auprès de vous et qui jusqu'à présent avaient l'intention de passer encore une partie de l'été avec nous, m'ayant

(1) Cette lettre n'est pas datée; mais la mention de la lettre apportée par Holmgren ne laisse guère de doute sur sa place.

annoncé hier soir qu'ils avaient changé d'avis et qu'ils partaient dès demain pour Paris. L'aîné de ces deux jeunes gens que je recommande vivement à votre bon accueil, M. le doct. Hirst, a étudié les mathématiques en Allemagne et ne fera à Paris qu'un séjour assez court, ayant accepté en Angleterre une chaire de mathématiques dont il aura à exercer les fonctions au mois de juin prochain. Son jeune ami M. Dickinson, qui est moins avancé dans ses études, a le projet de suivre à Paris les cours de la Sorbonne et du collège de France. Comme il est très peu familiarisé avec la langue française, il pourrait mettre à profit les 5 ou 6 mois qui nous séparent de l'époque où les cours commencent chez vous, pour bien apprendre votre langue. Il a appris l'allemand en très peu de temps en entrant comme pensionnaire dans une maison bourgeoise. Peut-être votre bienveillante intervention pourrait-elle lui fournir l'occasion d'user du même moyen pour l'étude du français.

Veuillez présenter mes hommages respectueux à Madame Liouville et la remercier en mon nom de ce qu'elle veut bien se souvenir qu'elle m'a autrefois engagé à venir à Paris avec Mad. Dirichlet. Nous avons toujours ce projet, mais je vous avoue franchement qu'il me serait trop pénible de revoir la France dans l'état actuel des affaires publiques. En attendant ne pourrions-nous pas nous voir ailleurs? Dites-moi s'il vous plaît, quels projets vous avez pour les vacances prochaines. Nous trouverons peut-être moyen de convenir d'un rendez-vous à portée des uns et des autres. J'ai été interrompu trois fois dans cette lettre; comme je dois l'envoyer à mes amis anglais ce soir même, il faut que je la termine telle quelle.

Votre dévoué

DIRICHLET.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ptolemaei (Claudii) *Opera quæ extant omnia.* Vol. II. *Opera astronomica, minora.* Ed. J. Heiberg. Accedit tabula phototypica. In-8°, CCIII-282 p. Leipzig. Teubner, 9 m.; relié : 9 m. 60 pf.

Schrön (L.). — *Table d'interpolation pour le calcul des parties proportionnelles,* faisant suite aux *Tables de logarithmes à sept décimales.* Edit. stéréotype. In-8°, IV-80 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Simplicius. — *Bericht über die Quadraturen des Antiphon u. des Hippokrates.* Griechisch u. deutsch von Ferd. Rudio. X-184 p. av. 11 fig. (*Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum.*) In-8°. Leipzig, Teubner. 4 m. 80 pf.

Weber (Heinr.) u. Jos. Wellstein. — *Encyclopädie der Elementarmathematik. Handbuch für Lehrer u. Studierende.* (In 3 Bdn.) 2. Bd. Encyklopädie der elementaren Geometrie. 2. Aufl. Gr. in-8°, XII-596 p. av. 251 fig. Leipzig, Teubner. Relié : 12 m.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

RUDIO (F.). — Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsche von F. R. mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung, in Anhange ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid, mit 11 Figuren im Text. — *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume.* 1. Heft. 1 volume in-18, IX-180 pages. Leipzig, Teubner, 1907.

Voici le premier Cahier d'une série qui semble devoir être très intéressante. Le titre général, *Sources pour l'histoire des Mathématiques dans l'antiquité,* dit assez son objet : les textes, publiés d'une façon aussi correcte que possible, sont accompagnés d'une traduction, des principaux renseignements historiques, philologiques, bibliographiques, d'un lexique de la langue de l'auteur, etc. Cette publication intéressera donc à la fois les mathématiciens et les philologues. M. Rudio comptait l'entreprendre avec Wilhelm Schmidt, l'éditeur de Héron, qui en a eu la première idée. Schmidt est mort en 1905, à 42 ans.

Ce premier cahier contient la relation de Simplicius sur les quadratures d'Antiphon et d'Hippocrate. Le texte grec est, sauf quelques changements qui sont soigneusement signalés, celui qu'a donné M. Diels dans le neuvième Volume des *Commentaires grecs sur Aristote* que publie l'Académie de Berlin ([1]). M. Rudio a, d'ailleurs, dédié son travail à M. Diels. La traduction allemande est aussi littérale que possible.

Simplicius a vécu dans la première moitié du sixième siècle de notre ère. Il a commenté Aristote. La sympathie qui, d'ailleurs, permet souvent de mieux pénétrer les œuvres et les hommes, semble s'éveiller naturellement chez M. Rudio pour ceux qu'il étudie : il tient à nous montrer, en détail, l'estime où les philo-

([1]) *Simplicii in Aristotelis physicorum libros quatuor priores Commentaria.* Berlin, 1883.

sophes ont tenu Simplicius et à le venger du mépris que quelques mathématiciens ont affecté à son égard; il met très haut le sophiste Antiphon et le mathématicien Hippocrate, qui ont vécu dans le cinquième siècle avant notre ère, et que Simplicius a beaucoup contribué à nous faire connaître.

L'origine de la *Relation* de Simplicius est dans une phrase d'Aristote : *Réfuter la quadrature du cercle par les segments,* dit ce dernier, *c'est l'affaire d'un géomètre ; ce n'est pas l'affaire d'un géomètre que de réfuter la quadrature d'Antiphon.* Cette petite phrase nous a valu une vingtaine de pages, singulièrement précieuses, moins par l'explication, d'ailleurs un peu incomplète, qu'elles nous donnent de la pensée d'Aristote, que par les renseignements historiques dont cette explication est l'occasion. Simplicius avait à sa disposition deux documents de très inégale valeur : les *Commentaires* d'Alexandre d'Aphrodisias sur Aristote et l'*Histoire de la Géométrie* d'Eudème de Rhodes. Alexandre vivait vers l'an 200 de notre ère ; Eudème a été un disciple direct d'Aristote, et le long fragment que nous a conservé Simplicius, où Eudème explique les trois quadratures de lunules, la quadrature de la somme d'un cercle et d'une lunule qu'on doit à Hippocrate est extrêmement intéressant. « Dans une excellente intention », nous dit M. Rudio, Simplicius a ajouté çà et là au texte d'Eudème des explications qui n'étaient pas très nécessaires et qui nous montrent seulement qu'il avait étudié Euclide. Débrouiller ces intercalations, donner, sur tous les points, une interprétation sûre du texte d'Eudème et de Simplicius, n'était pas une petite affaire, et il a fallu les efforts de Bretschneider, d'Allman, de Diels, d'Usener, de Tannery et de Heiberg, pour en venir à bout; M. Rudio a pu employer des caractères différents pour la partie du texte qu'on doit attribuer à Eudème et pour les interpolations de Simplicius.

Que voulait dire Aristote? Ce qui regarde Antiphon est assez clair : Antiphon partait d'un polygone inscrit dans le cercle, doublait le nombre des côtés, etc. ; d'après lui, ou d'après ce qu'on lui prête, le polygone finissait par se confondre avec le cercle. Aristote, quoiqu'il ait soutenu en Métaphysique qu'il fallait bien s'arrêter quelque part, était assez géomètre pour savoir que, dans ce cas-là, il n'y a pas moyen de s'arrêter, et que l'assertion d'An-

tiphon est contradictoire avec les concepts géométriques de la ligne droite et du cercle : un géomètre n'a pas à discuter la quadrature d'Antiphon. Antiphon avait-il eu, au contraire, une vue juste et profonde, qu'on a fini par mal comprendre, et la méthode d'exhaustion qu'il aurait inventée doit-elle, comme le veut M. Rudio, lui assurer une place d'honneur parmi les fondateurs du Calcul infinitésimal ? C'est ce qu'il me semble malaisé de décider. Antiphon ne paraît pas avoir été un professionnel de la Géométrie ; c'était, peut-être, un intuitif. Il n'est pas nécessaire de remonter jusqu'à lui pour rencontrer des doctrines pareilles à celle qu'il aurait soutenue. Je me rappelle fort bien avoir entendu, dans ma jeunesse, expliquer comme quoi une quantité infiniment petite n'est autre chose qu'une quantité assez petite pour qu'on ne puisse pas l'imaginer du tout. Si même les vues d'Antiphon étaient mélangées d'erreur, elles étaient assurément fécondes. L'erreur a joué un rôle dans la façon dont la Science s'est constituée. Hermite soutenait volontiers que ce rôle est très beau.

Mais comment faut-il entendre cette *quadrature par les segments* qu'il appartient aux géomètres de réfuter ? Simplicius a conjecturé qu'Aristote pouvait penser à ces quadratures au moyen des lunules qu'Hippocrate de Chio a trouvées ; et, en effet, dit-il, une lunule est un segment (τμῆμα) de cercle. M. Rudio apporte, d'ailleurs, des raisons sérieuses pour croire que le sens du mot τμῆμα n'est pas toujours réservé, chez les géomètres grecs, à l'espace compris entre l'arc et la corde. L'opinion de Simplicius est d'autant plus vraisemblable que les recherches d'Hippocrate avaient sans doute la quadrature du cercle pour but, et que des gens, insuffisamment versés dans la Géométrie, ont pu croire qu'il avait résolu ce problème. Les raisonnements d'Hippocrate sont bien d'un géomètre, et il appartient, par conséquent, à un géomètre de les réfuter, ou plutôt d'en réfuter les conséquences fautives ou les extensions qu'on en a tirées. Si c'est à Hippocrate qu'Aristote pensait, en parlant de la quadrature par les segments, on peut accuser Aristote d'avoir attribué ces conséquences à Hippocrate et, alors, M. Rudio a bien le droit d'estimer qu'Aristote n'a pas plus compris Antiphon qu'Hippocrate. Mais, du moment qu'Hippocrate n'est pas nommé dans la phrase d'Aristote, on ne peut rien conclure avec certitude.

Quoi qu'il en soit, la conjecture de Simplicius [1] a été fort heureuse, puisqu'elle nous a valu la conservation du texte d'Eudème et la connaissance des recherches d'Hippocrate. M. Rudio fait ressortir fortement diverses conséquences de ce texte : Il est impossible qu'Hippocrate ait cru réaliser la quadrature du cercle ; ses raisonnements sont excellents et ses façons de parler très correctes. Dans la quatrième proposition d'Hippocrate, qu'Aristote, à la rigueur, pourrait eu avoir en vue [2], c'est l'ensemble d'un cercle et d'une certaine lunule qui est donné comme équivalent à un polygone.

Quant à la construction, fort ingénieuse, des trois sortes de lunules quarrables que considère Hippocrate, elle est l'œuvre d'un géomètre très fin. Elle suffirait assurément pour qu'on se défendît d'attribuer à Hippocrate la quadrature erronée que nous a transmise Alexandre d'Aphrodisias ; mais il résulte clairement du texte d'Eudème que ce dernier nous a conservé *toutes* les recherches d'Hippocrate sur le sujet [3].

M. Rudio estime que Simplicius domine parfaitement le sujet qu'il a exposé. Il y a, sans doute, une phrase un peu malheureuse d'où l'on pourrait induire que Simplicius a attribué aux quadratures d'Hippocrate plus de généralité qu'elles n'en ont en réalité ; mais M. Rudio donne de bonnes raisons pour interpréter cette phrase dans le bon sens, et j'espère qu'après lui les mathématiciens n'auront plus pour son auteur que de la reconnaissance, sans mélange de dédain.

Je me trouve avoir analysé une partie de l'Introduction que M. Rudio a placée avant le texte de Simplicius. Il a fait suivre ce texte d'une histoire de la quadrature du cercle, où l'on trouvera, en particulier, de nouveaux renseignements et d'importantes citations concernant Hippocrate et Antiphon. Elle se termine par quelques pages fort intéressantes sur la quadratrice d'Hippias.

---

(1) Elle a été émise aussi par un autre commentateur d'Aristote, Johannes Philoponus, contemporain de Simplicius, dont M. Rudio cite d'intéressants passages.

(2) Il a fait allusion ailleurs à cette proposition ; *voir* la *Géométrie grecque...*, de Paul Tannery, p. 114.

(3) On ne doit donc pas attribuer à Hippocrate la proposition bien connue sur les deux lunules décrites sur les côtés d'un triangle rectangle, dont la somme équivaut au triangle. Cette proposition toutefois, dans le cas où le triangle rectangle est isoscèle, contient la première quadrature d'Hippocrate.

Enfin, M. Rudio a donné un lexique détaillé des termes employés par Simplicius. Ce lexique, qui remplit 55 pages, sera particulièrement précieux aux mathématiciens qui savent assez le grec pour étudier le texte de près ; je crois bien qu'ils y trouveront tous les renseignements désirables. J. T.

DANTSCHER (V. VON). — VORLESUNGEN ÜBER DIE WEIERSTRASSSCHE THEORIE DER IRRATIONALEN ZAHLEN. 1 volume in-8, VI-79 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

L'exposé de la doctrine de Weierstrass sur les nombres irrationnels que publie M. von Dantscher est clair et détaillé ; l'auteur l'a écrit en vue des étudiants en Mathématiques qui, lorsqu'ils entrent à l'Université, veulent se rendre maîtres de cette doctrine et être capables de la manier. Aucune exposition de cette doctrine n'a été faite sous la direction de Weierstrass lui-même ([1]). Celle de M. von Dantscher repose sur les leçons qu'a faites Weierstrass dans le semestre d'été 1872, leçons que l'auteur a suivies, et sur un cours ultérieur (1884) ; l'auteur a pris grand soin de marquer ce qui appartient en propre à Weierstrass ; mais c'est une exposition personnelle qu'il a voulu donner, non une reproduction des notes prises au cours du maître.

Weierstrass attachait une grande importance à sa théorie des nombres irrationnels, qui contribuait assurément à mettre de l'unité dans sa conception de l'Analyse. Cette théorie est, je crois, peu connue en France. Je demanderai la permission d'en dire deux mots ici, à l'occasion du livre de M. von Dantscher, en renvoyant le lecteur, pour le développement et les détails, à ce livre, ainsi qu'au bel article de MM. Pringsheim et Molk, dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Mathématiques*, sur les nombres irrationnels et la notion de limite.

Dans la théorie de M. Méray, retrouvée un peu plus tard par Heine, un nombre rationnel ou irrationnel est déterminé par une suite de nombres rationnels $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ telle que la diffé-

([1]) *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, vol. I, p. 150.

rence $u_n - u_p$ soit aussi petite qu'on le veut, en valeur absolue, pourvu que n et p soient suffisamment grands; dans la doctrine de M. Dedekind, il est défini par une coupure ; dans la théorie de Weierstrass, il est défini par un agrégat de nombres rationnels, dont on démontre qu'il jouit des propriétés d'une somme. Je remarque tout d'abord que les trois définitions, quand il s'agit d'un nombre irrationnel, définissent plutôt, si l'on me permet de m'exprimer ainsi, une détermination du nombre que ce nombre lui-même ; cet inconvénient, que je ne saurais d'ailleurs mieux préciser, est dans la nature des choses, ou de notre esprit, et il n'enlève rien à la rigueur des développements. Il me semble que la définition qu'on doit à M. Dedekind offre plusieurs avantages sur les deux autres ; d'abord, elle détermine immédiatement le nombre irrationnel d'une façon univoque. Dans cette définition, la question de l'égalité ne se pose pas : deux nombres irrationnels égaux sont le *même* nombre ; ils résultent d'une même coupure. M. Méray et Weierstrass sont obligés de définir ce que sont deux nombres irrationnels égaux. Sans doute, leurs définitions se retrouveront, d'une façon nécessaire, dans n'importe quelle exposition, à titre de théorèmes, mais la conception de M. Dedekind me paraît éclairer plus immédiatement la nature du nombre irrationnel. Dans cette conception aussi, la comparaison de deux nombres, la notion de plus grand et de plus petit sont immédiates. Enfin, la distinction entre le nombre irrationnel et le nombre rationnel apparaît encore immédiatement, puisque les deux classes de nombres rationnels que sépare la coupure n'ont pas le même caractère, suivant qu'on a affaire à un nombre rationnel ou à un nombre irrationnel ; au contraire, la définition d'un nombre par une suite, ou un agrégat de nombres rationnels, ne contient pas, en elle-même, une pareille distinction ; c'est par une étude ultérieure de chaque suite, ou de chaque agrégat, qu'on devra reconnaître si l'on a, ou non, affaire à un nombre irrationnel. Il faut bien avouer, d'ailleurs, que le nombre de cas où la définition de M. Dedekind permet de trancher facilement cette question est assez restreint.

Il semble que, en France au moins, la définition de M. Méray ait séduit davantage la plupart des professeurs, et cela tient peut-être à ce qu'elle plaçait au début une idée qui leur était

familière, celle de suite ; les raisonnements et les calculs qu'elle implique pour se développer sont de la nature de ceux auxquels on était habitué ; pour se l'assimiler, il n'y avait qu'un effort à faire : accepter comme définition d'une suite ayant une limite la règle donnée par Cauchy pour reconnaître si une série est convergente, ou si une suite a une limite. La définition de M. Dedekind, celle de Weierstrass, surtout, sont liées à la notion d'ensemble qui, il y a vingt ans, était familière à peu de personnes. Peut-être cette notion est-elle moins difficile qu'on ne se le figure à comprendre pour des débutants, pour ceux dont la pensée n'est pas cristallisée par l'habitude, et il se peut que des maîtres, d'ailleurs excellents, se soient effrayés plus qu'il ne convenait de cette notion, qu'ils n'étaient pas accoutumés à introduire dans leur enseignement. Les développements considérables qu'a pris rapidement la théorie des ensembles, les conséquences inattendues et parfois paradoxales qu'on en tirait, le caractère très abstrait de ces développements ont peut-être ajouté à cette frayeur. Assurément, il n'a jamais été question de faire pénétrer ces développements dans l'enseignement élémentaire ; mais la notion d'ensemble, qui suffit parfaitement à la définition des nombres irrationnels, est, en elle-même, très simple ; elle apparaît comme telle, et comme nécessaire, à tous ceux qui s'y sont accoutumés.

Pour étendre la notion de nombre, Weierstrass considère d'abord un agrégat déterminé de nombres rationnels et positifs. Il convient d'employer ici un autre mot que celui d'ensemble, parce que, lorsqu'on parle d'ensemble de nombres, on entend habituellement que tous les nombres qui y figurent sont différents. Dans l'agrégat considéré, au contraire, un même nombre peut figurer plusieurs fois, mais un nombre fini de fois ; un agrégat qui contiendrait une infinité d'éléments indiscernables ne présente pas une idée claire : mais un agrégat comme ceux que considère Weierstrass peut être défini d'une façon précise ; il sera défini si l'on donne le moyen de reconnaître, sur un nombre rationnel quelconque, s'il appartient ou non à l'agrégat et, dans le premier cas, combien de fois il figure dans cet agrégat. Convenons d'appeler *partie* d'un tel agrégat tout nombre rationnel positif inférieur ou égal à la somme d'un certain nombre d'éléments de l'agrégat, et de dire que deux agrégats sont égaux si chaque partie de l'un est

égale à une partie de l'autre. Il est aisé de reconnaître que, si les parties d'un agrégat peuvent dépasser tel nombre positif rationnel qu'on veut, l'agrégat doit être regardé, d'après cette définition, comme égal à d'autres agrégats, dont il contiendrait tous les éléments, tout en contenant, en outre, d'autres éléments. On n'aurait alors rien de pareil à ce qui se passe pour les nombres rationnels ordinaires, et l'on est ainsi conduit à rejeter les agrégats dont les parties formeraient un ensemble non borné. Il est aussi très facile de reconnaître que les agrégats dont les parties forment un ensemble borné (les seuls que l'on considérera désormais) sont dénombrables. On pressent, par ce qui précède, le raccord de la théorie de Weierstrass, soit avec celle de M. Dedekind, soit avec celle de M. Méray.

D'une part, en effet, les parties d'un agrégat, définies comme on l'a fait, ne sont autre chose que les nombres rationnels qui forment l'une des deux classes de M. Dedekind; l'autre classe, que Weierstrass ne considère pas, serait formée des nombres rationnels qui ne figurent pas dans celle-là. D'autre part, l'agrégat de Weierstrass, étant dénombrable, ne diffère pas essentiellement d'une série convergente à termes rationnels et positifs; il n'en diffère que par un point, important à la vérité : c'est qu'on n'y considère pas l'ordre dans lequel les termes se succèdent. Maintenant, qu'on parle d'une série ou d'une suite, comme fait M. Méray, cela importe évidemment bien peu. Les deux théories, si différentes en importance, se rapprochent d'autant plus que Weierstrass démontre immédiatement la proposition suivante, dont l'identité avec la définition des variantes convergentes de M. Méray apparaît tout de suite et qui permettra des démonstrations équivalentes à celles de ce dernier : dans un agrégat (de la nature considérée), on peut toujours supprimer assez de termes pour que les parties de l'agrégat qui subsiste soient toutes plus petites que tel nombre rationnel positif qu'on voudra.

Une fois la notion de l'égalité acquise, il est aisé de reconnaître qu'un agrégat jouit des propriétés d'une somme; par exemple, on obtient un agrégat égal à l'agrégat donné en remplaçant tels éléments qu'on veut par leur somme. On peut étendre le nom de nombre à un agrégat. Les notions de plus grand, de plus petit, la définition de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, la

démonstration des propriétés fondamentales de ces opérations s'étendent sans difficultés. Le lecteur ne peut avoir aucune peine à reconstruire toute cette théorie, où, ainsi que je l'ai déjà dit, le théorème que j'ai rappelé tout à l'heure joue souvent le même rôle que, dans la théorie de M. Méray, la définition des variantes convergentes. Pour ce qui concerne la division, on a à démontrer, étant donnés deux agrégats A, B, qu'il existe un agrégat C tel que son produit par B soit égal à A. Ici, dans son exposition, M. von Dantscher fait intervenir la notion de la représentation décimale, ou plutôt de la représentation analogue, avec une base quelconque. Sans doute, la notion de cette représentation décimale, qu'on peut d'ailleurs regarder comme un agrégat, ou comme une série, doit être introduite dans toute théorie des nombres irrationnels, et il est bien permis d'en tirer parti. Si simplement qu'elle permette d'établir l'existence du quotient, cette existence apparaît plus directement, soit au point de vue de M. Méray, soit au point de vue de Dedekind.

Je laisse de côté l'extension de toute cette théorie aux agrégats contenant des nombres positifs et des nombres négatifs, puis aux agrégats à éléments imaginaires.

Un avantage évident de la doctrine de Weierstrass, c'est que celui qui l'a saisie est en possession des points essentiels de la théorie des séries (à termes numériques) absolument convergentes, aussi bien des séries à entrée multiple que des séries à simple entrée, puisque, du point de vue où l'on est, il n'y a pas lieu de distinguer ; quelques mots seront seulement nécessaires pour expliquer les façons de parler, lorsqu'on introduit l'idée d'ordre. Comme les propositions élémentaires des séries absolument convergentes sont capitales dans la théorie des fonctions analytiques, on ne peut s'étonner que Weierstrass ait regardé sa manière d'introduire les nombres irrationnels comme le fondement naturel de cette théorie. Lors même qu'on préfère un autre mode d'introduction, on peut tirer le meilleur parti du genre de raisonnements dont s'est servi l'illustre géomètre. J. T.

MÉLANGES.

LES ORIGINES, LES MÉTHODES ET LES PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE [1];

PAR M. GASTON DARBOUX.

MES CHERS COLLÈGUES,

Depuis une trentaine d'années, un changement profond s'est accompli sous nos yeux dans l'orientation des études mathématiques. La théorie des fonctions, puisqu'il faut l'appeler par son nom, attire aujourd'hui, avec une force irrésistible, les recherches des plus jeunes, des plus actifs, des plus inventifs parmi nous. Un esprit nouveau les anime : il nous a déjà valu, et nous promet plus encore pour l'avenir, de belles et profondément originales découvertes. Si l'on compare les débuts du XXe siècle aux commencements de celui qui vient de finir, on est obligé de reconnaître qu'il s'est produit depuis 100 ans une transformation radicale dans les méthodes et dans les théories, dans les points de vue et dans les principes directeurs. Le XIXe siècle nous a laissé des écrits mémorables et des travaux de haute portée; mais, dans sa première moitié tout au moins, il s'est contenté de parfaire la tâche qui lui avait été léguée par les grands génies scientifiques des deux siècles qui l'avaient précédé. Celui qui s'ouvre devant nous offre, au contraire, des perspectives vraiment nouvelles, nous présente des champs de recherche entièrement inexplorés. Rien n'arrête les esprits ardents et curieux; ils ne craignent nullement de s'attaquer aux bases mêmes de l'édifice que tant de travaux, si longuement poursuivis, avaient paru établir sur des fondements inébranlables. Et non contents de cultiver notre science, de lui imprimer les

[1] Conférence lue à Rome au palais Corsini, le 7 avril 1908, devant le quatrième Congrès des Mathématiciens.

directions qu'ils estiment les meilleures, ils ont la prétention, à laquelle j'applaudis pour ma part, d'apporter les contributions les plus originales et les plus précises à cette branche essentielle de la Philosophie qui a pour objet propre l'origine, la nature et la portée de nos connaissances.

En confiant à un homme qui suit ce mouvement avec sympathie, mais qui n'y a point pris part directement par ses écrits, le soin de faire une des conférences inscrites au programme, les organisateurs de notre Congrès lui ont fait un grand honneur, dont il tient à les remercier vivement, car il en sent tout le prix. Mais ils ont voulu montrer aussi, j'imagine, qu'ils n'entendent négliger aucune des branches du savoir mathématique. En science comme ailleurs, plus qu'ailleurs peut-être parce que les chercheurs sont toujours passionnés, il y a des modes, des entraînements auxquels il convient de ne pas s'abandonner sans réserve. Malgré le nombre croissant des adeptes de la science mathématique, les anciennes disciplines courent le risque d'être quelque peu délaissées. C'est le propre des réunions comme celle-ci d'opérer une œuvre de coordination, d'attirer en particulier l'attention sur les questions qui appellent des recherches, afin que notre science marche, d'un pas égal et ferme, sans interruptions ni à-coups, vers son but essentiel, qui est la recherche de la vérité.

Ceux qui sont appelés à retenir quelque temps votre attention ont sans doute pour premier devoir de ne choisir que des sujets dont ils puissent parler avec compétence et, si j'ose dire, de première main. En me conformant à cette règle si naturelle, je suis heureux de penser que les questions dont je vous entretiendrai sont au nombre de celles qui ont plus particulièrement attiré l'attention des géomètres de ce pays, et de rendre ainsi hommage au beau génie de l'Italie, où la Géométrie, sous toutes ses formes, a été cultivée, est cultivée aujourd'hui encore, par tant de maîtres éminents. Quelques-uns d'entre eux, Bellavitis, Brioschi, Cremona, Casorati ont été mes guides ou mes amis. Permettez-moi, avant d'entrer en matière, de donner un souvenir à l'un des plus grands et des plus aimables, à Eugenio Beltrami, avec qui j'ai entretenu les relations les plus affectueuses, et qui nous a laissé tant d'écrits où la science la plus profonde s'allie à l'élégance de la forme et à la limpidité de l'exposition.

I.

La théorie des cartes géographiques et les travaux de Gauss.

Comme bien d'autres branches du savoir humain, la Géométrie infinitésimale a pris naissance dans l'étude d'un problème posé par la pratique. Les anciens s'étaient déjà préoccupés d'obtenir des représentations planes des différentes contrées de la Terre, et ils avaient adopté l'idée si naturelle de projeter sur un plan la surface de notre globe. Pendant très longtemps, on s'est attaché exclusivement à ces méthodes de projection, en se bornant simplement à étudier les meilleurs moyens de choisir, dans chaque cas, le point de vue et le plan de projection. C'est un géomètre des plus pénétrants, Lambert, le confrère très estimé de Lagrange à l'Académie de Berlin, qui, signalant pour la première fois une propriété commune aux cartes de Mercator dites *cartes réduites* et à celles que fournit la projection stéréographique, envisagea le premier la théorie des cartes géographiques sous un point de vue vraiment général, et proposa, avec toute son étendue, le problème de la représentation de la surface terrestre sur le plan avec similitude des éléments infiniment petits. Cette belle question, qui donna naissance à des recherches de Lambert lui-même, d'Euler et à deux très importants Mémoires de Lagrange, fut traitée pour la première fois par Gauss dans toute sa généralité. Le travail que le grand géomètre composa sur ce sujet, et qui fut couronné en 1822 par la Société royale des Sciences de Copenhague, fut suivi, en 1827, des célèbres *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* dans lesquelles se trouvent exposés magistralement les premiers éléments d'une théorie qui devait recevoir de grands développements. Parmi les notions essentielles introduites par Gauss, il faut noter l'emploi systématique des cordonnées curvilignes sur une surface, l'idée de considérer une surface comme un tissu flexible et inextensible, qui a conduit le grand géomètre à son célèbre théorème sur l'invariabilité de la courbure totale, les belles propriétés des lignes géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales, la généralisation du théorème d'Albert Girard sur l'aire du triangle sphérique, toutes ces vérités concrètes et définitives qui, comme bien d'autres résultats dus au génie du grand géomètre.

sont destinées à conserver, à travers les âges, le nom et la mémoire de celui qui les a, le premier, dévoilées.

Entraîné par tant d'autres travaux, Gauss n'a pas développé les conséquences des principes qu'il avait introduits. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qu'il a donnée pour les familles de trajectoires orthogonales des lignes géodésiques contenait en germe les découvertes fondamentales que Jacobi a développées plus tard sur la Mécanique analytique. J'ai aussi montré, dans mes *Leçons*, qu'en combinant très simplement trois équations linéaires du second ordre qui se trouvent dans les *Disquisitiones* et auxquelles satisfont les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, on pouvait former avec toute la généralité possible l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui admettent un élément linéaire donné, et obtenir ainsi la solution complète d'une question qui devait être proposée, 35 ans plus tard seulement, comme sujet de prix par l'Académie des Sciences de Paris. Mais Gauss avait en vue dès ses premiers travaux, et il le dit expressément dans la préface du Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague, seulement la construction des cartes géographiques et les applications de la théorie générale à la Géodésie. Il est revenu sur ces sujets, dans deux Mémoires qui portent les dates de 1843 et 1846, et qui peuvent figurer sans désavantage à côté des *Disquisitiones*. Reprenant, avec plus de précision, une méthode que Prony avait publiée en 1808 pour remplacer notre globe elliptique par une sphère convenablement choisie, il fait connaître, pour la construction des cartes géographiques d'un grand pays, des méthodes simples et pratiques qui ont été fidèlement suivies en Allemagne et qui mériteraient à coup sûr d'être adoptées dans les autres pays. La belle publication des *Reliquia* de Gauss que nous devons à M. Félix Klein nous a appris d'ailleurs que le grand géomètre n'avait cessé de poursuivre ses études sur les surfaces en général, et qu'il avait obtenu notamment la notion si essentielle de ce que nous nommons aujourd'hui la *courbure géodésique*. On a aussi retrouvé un court fragment relatif à la détermination des surfaces applicables sur une surface donnée; il semble pourtant que Gauss n'ait jamais porté son attention, d'une manière bien suivie, sur le problème que paraissaient suggérer ses premiers travaux : la détermination des surfaces qui admettent un élément linéaire donné.

II.

Les premiers travaux des géomètres français Monge, Dupin, Lamé, Jacobi.

A l'époque où Gauss publiait en Allemagne les recherches dont nous venons de parler, la France était, pour ainsi dire, en pleine floraison géométrique. Par ses conceptions si originales sur la génération des surfaces et sa création de la géométrie descriptive, par la rénovation qu'il avait su imprimer aussi à la géométrie analytique, Monge avait exercé une influence que Lagrange constatait avec quelque regret. On connaît le mot célèbre échappé à l'illustre géomètre, au sortir d'une leçon de Monge à l'Ecole Polytechnique: « Avec sa géométrie descriptive et ses générations de surfaces, ce diable d'homme se rendra immortel ». Monge ne se contentait pas de faire des découvertes; il faisait aussi des élèves, ce qui vaut quelquefois mieux. L'un d'eux, le mieux doué peut-être, Charles Dupin, sut compléter l'œuvre de son maître en le suivant dans toutes les directions, en mariant comme lui la géométrie analytique à la méthode infinitésimale; en introduisant, à côté de la notion des lignes de courbure due à Monge, celles de l'indicatrice, des tangentes conjuguées et par suite des lignes asymptotiques, qui sont toutes *projectives* comme nous disons aujourd'hui, et par là ont acquis un rôle prépondérant dans les recherches les plus récentes. Lamé, de son côté, cet apôtre de la philosophie naturelle, s'élevait peu à peu à la notion des coordonnées curvilignes de l'espace, à celle des paramètres différentiels, qui lui avait été suggérée par ses études de Physique mathématique et qu'il développa d'une manière magistrale dans un Mémoire inséré en 1833 au *Journal de l'Ecole Polytechnique*. Bientôt la belle découverte de Jacobi sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde à trois axes inégaux venait apporter un nouvel aliment aux recherches de géométrie. Chasles, rappelant un de ses théorèmes les plus élégants d'après lequel deux surfaces homofocales du second degré paraissent se couper à angle droit, de quelque point de l'espace qu'on les regarde, montrait que ce théorème aurait pu lui donner, tout au moins, une intégrale première de l'équation différentielle du second ordre dont dépend la détermination des lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Grâce à une fertilité de moyens qui n'a jamais été dépassée,

il parvenait, avec les seules ressources de la Géométrie, à intégrer, non seulement l'équation différentielle des géodésiques, mais aussi ces systèmes de deux équations différentielles auxquelles Jacobi avait donné le nom d'équations *abéliennes*. Une foule de géomètres, parmi lesquels il faut comprendre Liouville, Frenet, Puiseux, Joseph Bertrand, Alfred Serret, Minding, Joachimsthal, Bouquet, Paul Serret, et plus particulièrement Ossian Bonnet, à qui ses recherches assignent presque le rôle d'un créateur, prenaient part avec ardeur à ce travail d'élaboration, qui devait mettre sur pied une des branches les plus intéressantes et les plus élégantes de la Géométrie moderne. Tous ces maîtres devaient se préparer à eux-mêmes de dignes successeurs. J'aimerais à faire ici l'analyse de leurs principales découvertes; mais il convient que je me rappelle que le temps nous est mesuré à tous ; il faut que je n'abuse pas de votre attention et que j'arrive le plus tôt possible aux recherches dont on s'occupe en ce moment; je ne puis donc que renvoyer ceux d'entre vous qui désireraient plus de détails sur la période un peu ancienne que je dois abandonner, à la conférence que j'ai eu l'honneur de faire en 1904, devant le Congrès international de Saint-Louis des Etats-Unis d'Amérique, sous la présidence de l'astronome illustre qui est venu prendre part à nos travaux.

Dans le reste de cette causerie, je me bornerai donc à suivre l'exemple que nous donnait, il y a 8 ans, M. Hilbert à notre Congrès de Paris, et j'indiquerai, dans une revue rapide des principales branches de la géométrie infinitésimale, quels sont les problèmes dont la solution nous importe le plus, et qu'on peut espérer de résoudre dans un avenir plus ou moins prochain.

III.

Des méthodes en géométrie infinitésimale. Rôle de la méthode analytico-géométrique.

Un mot d'abord sur les méthodes qu'il convient de suivre dans l'étude des problèmes de géométrie infinitésimale. Ici, comme dans la géométrie des éléments finis, on a essayé de construire un corps de doctrine entièrement indépendant de l'Analyse. Jacobi avait donné l'exemple en faisant revivre les infiniment petits proscrits

par Lagrange; Joseph Bertrand et Ossian Bonnet l'ont suivi dans cette voie. Aujourd'hui on n'a guère le temps, semble-t-il, de suivre deux méthodes différentes pour étudier les mêmes questions; et l'on s'est attaché presque exclusivement, en géométrie infinitésimale, aux méthodes analytiques qui emploient les axes coordonnés; je suis loin pour ma part de le trouver mauvais, sous la réserve toutefois que la recherche sera vivifiée et inspirée sans cesse par l'esprit géométrique, qui ne doit jamais cesser d'être présent. Pour expliquer ce que je viens de dire, permettez-moi de vous faire part d'un de mes souvenirs les plus anciens et les plus précis. Il y a plus de 30 ans, un analyste des plus distingués m'apporta un travail, qu'il venait de terminer, sur la surface développable circonscrite à la fois à une sphère et à une surface du second degré. Ses formules étaient élégantes, symétriques et savamment déduites ; elles l'avaient conduit à cette conclusion, qui l'avait beaucoup surpris, que l'arête de rebroussement de sa développable était rectifiable algébriquement. Je n'eus aucune peine à lui montrer, sans calcul, que la découverte dont il était si fier et qui d'ailleurs ne manquait pas d'intérêt, était évidente géométriquement, et pouvait même être étendue à toute développable circonscrite à une sphère ; car elle avait son origine dans cette propriété qu'a l'arête de rebroussement d'être une des développées de la courbe de contact de la développable et de la sphère. C'est ce que mon ami analyste aurait reconnu de lui-même, s'il n'avait pas été trahi et abandonné, pour un court moment je l'espère, par le dieu de la Géométrie.

Suivons donc les méthodes analytiques, mais ne les suivons pas aveuglément. Comme les grandes routes, elles nous fournissent souvent les voies les plus sûres ; mais les chemins de traverse ont bien leur charme, et ils nous éclairent beaucoup mieux sur les véritables connexions des lieux et des choses.

On reproche quelquefois aux méthodes analytiques leur longueur et leur obscurité; on a même soutenu que l'utilisation incessante des coordonnées avait quelque chose d'artificiel. L'emploi du trièdre mobile et de la méthode des mouvements relatifs, combiné avec un choix judicieux des coordonnées curvilignes, échappe le plus souvent à cette objection. Il met en évidence les relations étroites et fondamentales qui lient la Géométrie à la science du mouvement et fournit la signification mécanique, si essentielle à

connaître, des éléments géométriques qui se présentent dans la recherche.

Il est un autre avantage encore que l'Analyse présente dans ces études. Quoi qu'en disent certaines personnes, plus ou moins étrangères à notre science, le mathématicien n'est nullement une machine à déduire ou à calculer. Ses travaux mettent en jeu *toutes* les facultés de son esprit. La finesse, l'esprit d'invention, l'imagination, lui sont peut-être plus nécessaires que l'ordre et la rectitude dans le raisonnement. Mais en créant lui-même, comme il arrive souvent en Géométrie, l'objet même de ses études, en introduisant des êtres et des éléments nouveaux, il doit se garder par-dessus tout de ces spéculations sans portée, dont le moindre inconvénient est de tenir une place qui pourrait être mieux occupée. C'est ici que l'Analyse intervient avec sa vertu propre. Elle n'a pas de signes, selon Fourier, pour les notions confuses; elle n'a pas non plus de méthodes pour les recherches oiseuses et sans avenir. Par contre, elle met entre nos mains, quand nous avons su trouver la bonne voie, tous les éléments qui nous sont nécessaires pour le développement de nos conceptions.

IV.

Nécessité d'introduire franchement et complètement les imaginaires en Géométrie. Exemples à l'appui.

J'ajouterai, et sur ce point j'ai été heureux de recueillir plus d'une fois l'avis conforme et l'adhésion de Sophus Lie, que le géomètre ne doit jamais reculer devant l'emploi franc et complet des éléments imaginaires. Avec Cauchy, les imaginaires ont imposé leur empreinte victorieuse sur toutes les parties de l'Analyse. Leur place, au même titre et plus encore qu'en Analyse, est marquée en Géométrie. Il m'est arrivé dans ma jeunesse de rencontrer quelques professeurs attardés qui levaient les bras au ciel quand on s'aventurait à leur parler du cercle imaginaire de l'infini. Ces temps sont passés et personne ne conteste plus l'importance des notions sur les imaginaires introduites dans la géométrie des éléments finis; elles sont même devenues si banales qu'on ne songe plus à citer leur premier inventeur. Je me souviens que mon ami Laguerre,

ayant commencé un de ses Mémoires par une phrase telle que celle-ci : « On sait que tous les cercles du plan peuvent être considérés comme passant par deux points à l'infini », se vit vertement reprendre par Poncelet. « On sait, oui l'on sait, disait l'illustre géomètre, mais vous auriez bien dû dire qui vous a appris cela ». En géométrie infinitésimale, comme dans la géométrie de Poncelet, l'emploi des imaginaires ne sera pas moins fécond qu'en Analyse. Mais il a tardé beaucoup plus à s'imposer. Pourquoi? je l'ignore. Est-ce parce que, selon quelques-uns, la Géométrie doit toujours avoir en vue des objets réels et aboutir à des constructions? Peut-être. En tous cas il y a beaucoup de progrès à faire à cet égard. Monge nous avait pourtant donné l'exemple; sur ce point comme sur plusieurs autres, il a été en avance sur son époque, puisqu'il n'a pas hésité à consacrer tout un chapitre de son Ouvrage à la surface imaginaire dont les rayons de courbure sont égaux et de même signe. Ces imaginaires, devant lesquels il ne reculait pas, ont permis à ses successeurs d'interpréter et de vivifier cette intégration des surfaces minima, qui est une de ses plus belles découvertes, et de constituer ainsi le chapitre le plus attrayant et le plus parfait de la géométrie infinitésimale. N'est-ce pas aussi grâce aux imaginaires qu'on a pu déduire de deux théorèmes célèbres de M. Weingarten, qui ne dépareraient pas le grand Mémoire de Gauss, la détermination complète des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution ?

Je veux encore indiquer un autre exemple dans lequel les imaginaires nous dévoilent la véritable origine de certaines propriétés, inattendues au premier abord. Vous savez que, par des procédés très variés, on a pu compléter certaines recherches de Monge, et déterminer toutes les surfaces dans lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes, ou des deux systèmes, sont planes ou sphériques. Considérons, pour plus de netteté, les surfaces à lignes de courbure planes dans un système. On constate des relations singulières entre les lignes de courbure planes d'une même surface. Si l'une d'elles seulement est algébrique, toutes les autres sont algébriques. Si l'une d'elles est un cercle, toutes les autres sont nécessairement des cercles. C'est en faisant intervenir les imaginaires qu'on remonte à la source de ces curieuses relations. Imaginons qu'on déforme la surface développable enveloppe des plans

des lignes de courbure, en supposant que chaque plan tangent de cette développable entraîne avec lui la ligne de courbure qui y est contenue. Il est facile d'établir que, parmi toutes les déformations ainsi considérées, il y en aura une, *nécessairement imaginaire*, dans laquelle toutes les lignes de courbure viendront se placer sur une développable *isotrope*, c'est-à-dire circonscrite au cercle de l'infini. Par suite, si une des lignes de courbure de la surface nous est connue, toutes les autres seront nécessairement égales à des sections planes convenablement choisies de la développable isotrope qui contient cette première courbe. Cette remarque donne évidemment la clef des relations que nous avions signalées. Elle nous fournit en même temps la construction la plus simple des surfaces à lignes de courbure planes. On prendra deux développables (D), (Δ) dont la seconde soit isotrope, puis on supposera que (D) se déforme, ses plans tangents entraînant avec eux les sections qu'ils ont déterminées dans la développable (Δ). Les positions nouvelles de ces sections engendreront la surface cherchée.

V.

Quelques problèmes de Géométrie infinitésimale. Les courbes à torsion constante.

Des méthodes passons aux problèmes. Je commencerai par le suivant :

Les courbes à torsion constante se rencontrent dans un grand nombre de recherches. D'après un curieux théorème d'Enneper, les surfaces à courbure constante ont pour lignes asymptotiques des courbes à torsion constante. De même, les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution, dont nous avons déjà parlé, peuvent être dérivées, par une élégante construction géométrique, de courbes imaginaires dont la torsion est constante. Pour que la surface soit algébrique, il faut et il suffit que la courbe à torsion constante dont elle dérive soit algébrique. C'est également de la détermination des courbes algébriques à torsion constante que dépend la construction des surfaces minima algébriques circonscrites à une sphère.

Il y aurait donc un intérêt réel à obtenir, parmi ces courbes à

torsion constante que J.-A. Serret nous a appris à déterminer par trois quadratures, celles qui sont algébriques ou, seulement, unicursales. Même bornée aux courbes unicursales, la recherche se présente sous la forme d'un problème d'Algèbre supérieure, bien digne de tenter un disciple de Lagrange et de Cauchy. Malheureusement, malgré des efforts partiels qui nous ont donné des résultats, assez étendus d'ailleurs, la solution complète et générale de cette belle et difficile question reste encore à trouver.

VI.

Les surfaces à courbure constante et leurs transformations.

Parmi les surfaces non développables du second degré, le paraboloïde de révolution et deux autres paraboloïdes imaginaires tangents au cercle de l'infini sont les seules dont nous sachions obtenir la déformation la plus générale. Lors du concours que l'Académie des Sciences de Paris institua en 1860 sur la déformation des surfaces, et qui réunit des concurrents tels que Bour, Ossian Bonnet, M. Codazzi et un autre géomètre italien dont Beltrami m'a confié le nom, Bour avait annoncé qu'il avait pu, en appliquant la célèbre méthode de variation des constantes due à Lagrange, déterminer toutes les surfaces applicables sur une surface quelconque de révolution et, en particulier, sur la sphère. Bour est mort peu de temps après, sans avoir pu confirmer le beau résultat qu'il avait obtenu; et son Mémoire, conservé chez Joseph Bertrand, a péri dans les incendies de la Commune. C'est en vain que, reprenant la voie ouverte par Bour, on a essayé de reconstituer sa méthode. Mais les efforts effectués dans cette direction ont été loin d'être infructueux. Ils nous ont fait connaître en particulier des procédés de transformation qui permettent de faire dériver, d'une surface applicable sur la sphère ou, ce qui est la même chose, d'une surface à courbure constante, une suite illimitée de surfaces de même définition. Ces méthodes de transformation des surfaces à courbure constante sont d'une simplicité et d'une élégance qui méritent de nous arrêter quelques instants.

Tous les pays ont pris part à leur élaboration progressive, depuis l'Italie, qui a commencé, jusqu'à l'extrême nord de l'Europe

qui a donné le couronnement. On a réussi à faire dériver de toute surface à courbure constante donnée une nouvelle surface de même courbure constante, qui dépend de deux paramètres; de sorte que la répétition de la méthode fournit sans cesse des surfaces nouvelles, qui contiennent dans leur équation des paramètres en nombre aussi grand qu'on peut le désirer.

Analytiquement tout se réduit à la considération d'un système, pour ainsi dire, unique en Analyse. La détermination des surfaces à courbure constante dépend de l'intégration de l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin 2\omega,$$

et il suffit de lui adjoindre le système suivant

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta+\omega)}{\partial\alpha} = a\sin(\theta-\omega), \\[2ex] \dfrac{\partial(\theta-\omega)}{\partial\alpha} = \dfrac{1}{a}\sin(\theta+\omega), \end{cases}$$

où a désigne une constante quelconque, et qui ne peut avoir lieu *qu'entre deux solutions de l'équation* (A).

Si donc ω désigne une solution *quelconque* de l'équation (A), le système (B) en fournira une nouvelle solution θ, et cette solution nouvelle contiendra à la fois a et la constante introduite par l'intégration. Si on la porte dans le système (B) en considérant cette fois ω comme l'inconnue et changeant la valeur de a, on pourra recommencer, et l'on voit que l'application répétée de la méthode introduira deux constantes nouvelles à chaque opération. Comme m'écrivait Sophus Lie dans son langage pittoresque, on aura ∞^∞ surfaces. Et il a été établi depuis, par des méthodes élégantes, que, si l'on peut faire le premier pas et effectuer, *pour toute valeur de a*, la première application de la méthode, les intégrations suivantes ne présenteront plus aucune difficulté.

Lie était un géomètre trop inventif et trop original pour ne pas être frappé de la singularité et de l'intérêt de ces méthodes de transformation, qu'il avait contribué beaucoup à mettre sur pied. Il s'efforça, par une tentative hardie, d'en tirer parti pour la détermination des surfaces à courbure constante.

Il aimait à me confier ses recherches et leurs résultats. Je reçus

un jour de lui une carte postale où il m'annonçait qu'il avait intégré l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante. Je m'empressai, tout joyeux, de le féliciter. Hélas! Sophus Lie avait été victime d'Ampère.

Dans ses Mémoires fondamentaux sur les équations aux dérivées partielles, Ampère s'est attaché à bien préciser les objets de ses recherches; et, à une époque où l'on n'avait sur les diverses espèces de solutions : solutions particulières, générales, complètes, singulières, que les notions un peu vagues dues à Euler et à Lagrange, il avait cru trouver une définition irréprochable de l'intégrale la plus générale dans le critère suivant : *De toutes les solutions de l'équation proposée, elle sera la seule qui ne satisfera à aucune autre équation aux dérivées partielles que cette proposée et toutes celles qu'on en déduit par différentiation*. Or Lie avait démontré, par quel procédé je ne m'en souviens plus, que l'ensemble des surfaces à courbure constante qu'on peut faire dériver d'une surface donnée, par l'emploi répété des transformations précédentes, satisfait à la condition posée par Ampère. Il en concluait qu'il avait l'intégrale générale, et il avait peut-être raison. Malheureusement, c'est Ampère qui avait tort.

Chez un géomètre tel que Lie, les méprises même sont fécondes. Il ne tarda pas à m'écrire, en me montrant par des exemples ingénieusement choisis, le vice de la définition d'Ampère; et il prit sa revanche par une autre voie, en appliquant cette fois une méthode d'intégration que j'avais donnée autrefois, et qui doit fournir l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles, toutes les fois que cette intégrale peut être exprimée en termes finis, ou plus exactement, toutes les fois qu'elle appartient à la première classe, suivant la définition d'Ampère. Étudiant l'équation (A) et l'équation tout à fait équivalente

$$(C) \qquad s^2 - rt = a^2(1 + p^2 + q^2)^2,$$

Lie montra que la méthode ne peut réussir. Ce résultat négatif est des plus précieux. Sans être décisif, il laisse peu d'espoir de voir confirmer un jour la découverte que Bour, ce géomètre pourtant si profond, nous avait annoncée [1].

---

[1] L'étude que Lie avait faite au point de vue qui nous occupe de l'équation (A)

VII.

La notion de l'intégrale générale, telle qu'elle a été donnée par Cauchy.

Dans cette causerie, que je poursuis d'une manière quelque peu irrégulière, j'ai été amené à vous parler de l'intégrale générale telle qu'Ampère avait été conduit à la concevoir. Cauchy, qui s'est attaché lui aussi à introduire la précision, et quelquefois même une trop grande précision, dans l'étude des différents problèmes du Calcul intégral, a levé toutes les difficultés relatives à ce sujet, en assujettissant chaque intégrale à remplir certaines conditions qui achèvent de la déterminer, et permettent en quelque sorte de la distinguer de toutes les autres. Cette manière vraiment neuve de poser les problèmes de Calcul intégral a été la source d'immenses progrès. Les conditions initiales choisies par Cauchy étaient peut-être un peu restrictives; mais, par de simples changements de variables, il a été facile de les élargir, et j'ai proposé de désigner sous le nom de *problème de Cauchy,* qui a été unanimement adopté, celui qui consiste à déterminer et à caractériser l'intégrale qu'on cherche par des conditions initiales choisies d'une manière aussi large que possible. Par exemple, s'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles à *deux* variables indépendantes, la surface intégrale sera assujettie à passer par une courbe donnée quelconque, quand l'équation sera de premier ordre; si l'équation est du second ordre, la surface intégrale devra en outre être inscrite le long de la courbe à une développable donnée; et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. Ce nouveau point de vue devait conduire, de la manière la plus précise et dans tous les cas, à la notion des *caractéristiques* qui était restée si vague dans les travaux de Monge : *les caractéristiques sont les assemblages pour lesquels le problème de Cauchy devient indéterminé.*

---

a été étendue depuis, par un jeune géomètre, à l'équation plus générale

$$s = f(x, y, z).$$

Elle l'a été aussi à l'équation plus générale

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

VIII.

Application aux surfaces minima. Le problème de Plateau.

Le problème de Cauchy, tel que nous venons de le formuler, a été résolu pour les surfaces minima, à l'aide de formules élégantes qui portent le nom de leur auteur et sont universellement employées.

Il faut bien se garder de le confondre avec cette recherche d'une tout autre nature et qui a pour objet la détermination d'une surface minima *continue* passant par un contour fermé. Sur ce point, il faut le reconnaître, nous sommes moins avancés que les physiciens. Pour obtenir la surface cherchée, Plateau se contentait de réaliser matériellement le contour qu'il avait en vue, et de le plonger ensuite dans une dissolution du liquide glycérique. Les géomètres n'ont pu rivaliser encore avec ces réalisations expérimentales. Leurs efforts ingénieux et habiles leur ont valu une foule de succès partiels. Les progrès réalisés dans l'étude du calcul des variations, les perfectionnements apportés à l'analyse moderne et à la méthode si féconde des approximations successives, leur permettront bientôt, j'en ai le ferme espoir, de résoudre dans toute sa généralité le beau problème que leur a légué Plateau, et d'enregistrer ainsi à leur actif un nouveau et brillant succès.

IX.

Progrès et problèmes de la théorie des cartes géographiques. Représentation géodésique. Problème de Tchebychef.

Comme l'étude des surfaces minima, la théorie des cartes géographiques a vu naître bien des problèmes intéressants. On s'est proposé, par exemple, de rechercher si la correspondance établie par plans tangents parallèles entre deux surfaces quelconques peut donner une représentation conforme de l'une des surfaces sur l'autre; cette recherche a été étendue à la correspondance qui s'établit, entre deux surfaces quelconques, par les points de contact d'une sphère qui doit être tangente à l'une et à l'autre. En étudiant

une propriété de la projection centrale, comme Lambert avait étudié une propriété de la projection stéréographique, Beltrami a été conduit à s'écarter du point de vue qui, entre les mains de Lagrange et de Gauss, avait donné des résultats si parfaits, et à rechercher s'il est possible de faire une carte d'une surface donnée, assujettie à cette unique condition que les géodésiques de la surface soient représentées par les droites du plan. Son élégante analyse lui a montré que ce mode de *représentation géodésique* ne pouvait intervenir que dans le cas des surfaces à courbure constante. A leur tour, les études et les résultats de Beltrami ont été étendus à la correspondance entre deux surfaces quelconques et nous ont valu des propriété nouvelles de cette forme de l'élément linéaire qui porte les noms de Liouville et de Jacobi.

Un géomètre russe, Tchebychef, qui occupe une place à part dans le développement des Mathématiques modernes, nous a proposé un nouveau et curieux sujet de recherche qu'on peut présenter comme il suit, en le généralisant quelque peu. Imaginons un filet tel que ceux dans lesquels les dames enferment leurs cheveux, ou tel encore qu'en portent les personnes qui se rendent au marché. Quelles que soient leurs formes et leurs dimensions, ces filets sont toujours composés de deux séries de fils rattachés en leurs points de rencontre, de telle manière que, pour chaque maille, les angles seuls des côtés puissent varier, mais non leurs longueurs. Imaginons qu'on pose un pareil filet sur une surface ou, ce qui revient au même, qu'on introduise un corps solide, terminé par une surface quelconque, à l'intérieur du filet, et proposons-nous de déterminer la forme que prendra le filet. Analytiquement, cela revient à mettre l'élément linéaire de la surface considérée sous la forme

$$ds^2 = A^2\,d\alpha^2 + C^2\,d\beta^2 + 2\,AC\cos\theta\,d\alpha\,d\beta,$$

où A et C désignent des fonctions données de α et de β et θ une fonction *inconnue*. Tchebychef s'est borné au cas où l'on a

$$A = C = 1$$

et, suivant sa coutume, il s'est contenté de rechercher des solutions approchées de son problème. Il n'avait pas remarqué que, dans le cas de la sphère, sa solution complète et générale peut

être rattachée à la détermination des surfaces à courbure constante négative; en ce sens que chaque surface à courbure constante négative donne, par la représentation sphérique de ses lignes asymptotiques, une solution du problème de Tchebychef pour la sphère, et *vice versa*.

X.

Les surfaces à courbure constante négative et les formes quadratiques de différentielles. Géométrie non euclidienne.

Vous le voyez, mes chers Collègues, c'est en vain que nous voudrions échapper à ces surfaces à courbure constante, qui paraissent, au premier abord, si particulières. C'est le cas de répéter le vers du poète :

Je l'évite partout, partout il me poursuit.

Elles se présentent à nous, dans toutes les recherches que nous entreprenons, en vertu sans doute de ces propriétés d'invariance qui sont mises en évidence par le théorème de Gauss. Mais il faut le remarquer aussi, leur étude emprunte un intérêt exceptionnel aux relations si étroites qu'elle présente avec ces recherches sur les principes de la Géométrie qui ont été inaugurées par les travaux de Lobatschefsky, de Gauss, de Bolyai et de Riemann. Ce beau et vaste sujet, auquel s'attachent passionnément les géomètres modernes, mériterait à lui seul une étude spéciale. Je me bornerai, pour le moment, à remarquer que Riemann, en le rattachant à la considération d'une forme quadratique de différentielles, a introduit par cela même, en Géométrie infinitésimale, un élément d'étude et de coordination appelé à jouer dans toutes les recherches le rôle le plus essentiel.

Riemann et Beltrami avaient ouvert la voie : l'un en définissant, l'autre en étudiant, d'une manière détaillée, la notion des espaces *à courbure constante*, qui est, en quelque sorte, adéquate à la géométrie non euclidienne. Depuis, Lipschitz et Christoffel ont envisagé les formes quadratiques de différentielles dans toute leur généralité; et leurs savantes recherches, accueillies partout avec grande faveur, ont été poursuivies avec beaucoup de succès dans ce pays. Il faut s'en réjouir, car les formes quadratiques de diffé-

rentielles interviennent pour ainsi dire partout. On sait le rôle capital qui leur a été assigné dans la mécanique analytique par les immortelles découvertes de Lagrange; pour se borner à la Géométrie, on les obtient, non seulement en formant les éléments linéaires des surfaces et des espaces à un nombre quelconque de dimensions, mais aussi en calculant le moment de deux droites infiniment voisines, l'angle de deux sphères infiniment voisines, etc. Leur étude a été beaucoup avancée en ce qui concerne la partie différentielle et invariantive; on a même rattaché à leur considération un nouveau genre de calcul qui forme une extension curieuse du calcul différentiel. On a commencé aussi à étudier dans toute sa généralité le premier et le plus élémentaire des problèmes de cette théorie ; je veux dire la recherche des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que deux formes soient *applicables* l'une sur l'autre. Dans sa partie délicate et difficile, cette recherche se ramène évidemment à celle des formes quadratiques qu'on peut transformer en elles-mêmes par une suite continue de substitutions. Ici, les magistrales découvertes de Lie sur la théorie des groupes ont trouvé, et trouveront sans doute encore, un beau champ d'application.

XI.

Réduction des problèmes les uns aux autres. Procédés de récurrence. Surfaces isothermiques. Déformation des surfaces du second degré.

Les progrès récents de l'Analyse nous ont conduits à envisager sous un point de vue tout nouveau l'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles. Nous savons aujourd'hui qu'on doit le plus souvent renoncer à les intégrer dans le sens ancien du mot ; qu'il faudra les étudier directement, les classer, les ramener les unes aux autres, rechercher, s'il y a lieu, les transformations qui les reproduisent. Cette étude commence à peine, et elle exigera de longs efforts; mais, dès à présent, il est permis d'affirmer que la géométrie infinitésimale offrira, le moment venu, à l'Analyse les applications les plus intéressantes, et surtout les exemples les plus précieux.

Nous avons déjà signalé les méthodes de transformation des

surfaces à courbure constante. On pourrait presque dire que ces procédés de récurrence sont de règle en Géométrie, car on les retrouve partout.

Considérons, par exemple, les surfaces *isothermiques*, c'est-à-dire les surfaces dont les lignes de courbure forment un système isotherme. Leur détermination dépend d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, qu'on a réussi à écrire sous les formes les plus symétriques, mais dont l'intégration constitue peut-être le problème le plus difficile qu'on rencontre en Géométrie. On en connaît, il est vrai, de nombreuses intégrales particulières : les surfaces du second degré, les cyclides les plus générales, les surfaces de révolution, celles dont la courbure moyenne est constante, certaines surfaces à lignes de courbure planes dans un système, etc., sont des surfaces isothermiques ; mais, en comparaison de l'intégrale générale qui, suivant la vieille terminologie, doit comprendre quatre fonctions arbitraires, ces solutions particulières ne comptent pour ainsi dire pas. Ici toutefois, comme dans la théorie des surfaces à courbure constante, certaines constructions géométriques des plus simples permettent de rattacher, par de simples quadratures, à chaque surface isothermique, toute une série de surfaces isothermiques nouvelles, dans la définition desquelles figurera un nombre de constantes de plus en plus grand. On pourrait donc être tenté de reprendre les efforts de Lie, pour déduire de cet ensemble de solutions l'intégrale générale elle-même, en s'appuyant, non plus sur les conceptions d'Ampère, mais sur la définition correcte de l'intégrale générale, telle qu'elle a été donnée par Cauchy. Permettez-moi d'ajourner ce genre de considérations, et de passer à un autre exemple d'un intérêt tout actuel, dans lequel il s'agit, non de la transformation d'une équation en elle-même, mais de la réduction d'un problème à un autre, différent et plus simple.

Il semble que, dans son développement, la Géométrie infinitésimale soit appelée à suivre les mêmes voies que l'analyse de Descartes. La déformation de la sphère avait d'abord occupé les géomètres ; la marche naturelle de leurs études les a amenés à s'occuper de la déformation des surfaces générales du second degré. Deux voies différentes ont été suivies pour l'étude de cette belle question. Les uns se sont attachés, et ont réussi, à constituer

des procédés de récurrence, des méthodes de transformation analogues à celles qu'on avait données pour les surfaces à courbure constante. Les autres ont essayé de rattacher le problème nouveau qui leur était posé au problème, plus simple dans son énoncé, de la déformation de la sphère, et ils y sont parvenus dans un assez grand nombre de cas : pour le paraboloïde quelconque, pour toutes les quadriques de révolution, et même pour la surface plus générale assujettie à l'unique condition d'être tangente *en un seul point* au cercle de l'infini. Ce résultat peut-il s'étendre encore à la surface quadrique la plus générale ? La réponse à cette question, qu'elle soit affirmative ou négative, sera également intéressante dans les deux cas. Je crois bien qu'elle ne tardera pas à être donnée; mais pour le moment je suis réduit à dire, en parlant latin dans la Ville Éternelle,

Adhuc sub judice lis est.

XII.

Les équations linéaires aux dérivées partielles et leur rôle en Géométrie infinitésimale.

Il semble bien, d'après ce qui précède, que la Géométrie infinitésimale soit destinée à devenir en quelque sorte une illustration de cette partie du calcul infinitésimal qui traite des équations aux dérivées partielles. Et cependant je ne vous ai encore rien dit des relations étroites, presque surprenantes, qu'elle présente avec les équations *linéaires* aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Ces équations, qui se présentent aussi, mais sous une forme différente, en Physique mathématique, avaient été déjà considérées par Laplace, qui avait donné, pour les intégrer, une méthode vraiment originale. Leur étude analytique a été reprise par Riemann et Moutard. On a perfectionné leur théorie, constitué pour elles une théorie spéciale des invariants. En particulier, celles dont les invariants sont égaux forment un groupe d'un intérêt exceptionnel. Moutard avait indiqué, pour les intégrer quand cela est possible, une méthode qui laissait prise aux objections, mais qui s'est trouvée exacte. De sorte que les recherches géométriques ont contribué ici encore à perfectionner les théories analytiques.

Elles nous ont même posé des problèmes auxquels l'Analyse n'aurait pas songé d'elle-même. C'est ainsi que, parmi ces équations linéaires, se sont révélées comme particulièrement dignes d'être formées et étudiées celles qui possèdent un ou plusieurs groupes de solutions particulières liées par une équation quadratique. Par exemple, la recherche des surfaces à courbure constante se ramène à celle des équations de la forme

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = z\,\mathrm{K}(\alpha, \beta),$$

qui possèdent trois solutions dont la somme des carrés est égale à l'unité. Celle des surfaces isothermiques se ramène également à celle des équations de même forme possédant cinq solutions pour lesquelles la somme des carrés est nulle, etc.

Parmi les questions dont la solution dépend exclusivement de l'intégration d'une équation linéaire, deux doivent être plus particulièrement mises en évidence : le problème de la représentation sphérique et le problème de la déformation infiniment petite. Ils se ramènent l'un à l'autre, et leur solution peut aujourd'hui être considérée comme complètement achevée.

En particulier, la théorie de la déformation infiniment petite constitue la première application un peu étendue d'une méthode qui paraît appelée à un grand avenir.

XIII.

Le système auxiliaire en Géométrie. Déformation finie et déformation infiniment petite.

Étant donné un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui contient un certain nombre de fonctions inconnues, il y a lieu de lui adjoindre un système que nous avons appelé *auxiliaire* et qui détermine les solutions du système infiniment voisines d'un système quelconque, donné à l'avance, de solutions. Le système auxiliaire est évidemment linéaire. Son étude, relativement facile, fournit les renseignements les plus précieux sur le système primitif lui-même, et sur la possibilité d'en obtenir l'intégration. Par exemple, en ce qui concerne la défor-

mation d'une surface, l'application des critères de Laplace à l'équation auxiliaire permettra de reconnaître s'il est possible d'intégrer l'équation aux dérivées partielles dont dépend la solution complète et générale du problème.

La considération de la déformation infiniment petite permet encore d'appliquer au problème de la déformation finie un théorème de Cauchy qui, aujourd'hui encore, est à peine connu, mais qui excitait l'admiration de Liouville, ce juge si sévère et si difficile, surtout pour les travaux de Cauchy.

Le grand géomètre a montré qu'on peut étendre aux équations aux dérivées partielles un théorème démontré depuis longtemps par Lagrange pour les équations linéaires aux dérivées ordinaires et intégrer, *par de simples quadratures,* tout système linéaire non homogène d'équations aux dérivées partielles, quand on a obtenu l'intégrale générale de ce même système, rendu homogène par la suppression des seconds membres des équations.

D'après cela, si l'on veut trouver les surfaces qui résultent de la déformation d'une surface donnée, on pourra, comme je l'ai montré dans mes *Leçons,* résoudre avec une approximation aussi grande qu'on le voudra, et par de simples quadratures, le problème de la déformation finie, toutes les fois qu'on aura intégré l'équation linéaire de la forme (D) dont dépend la solution complète du problème de la déformation infiniment petite.

XIV.

Élargissement des cadres de la Géométrie. Nécessité de méthodes générales et uniformes permettant les simplifications nécessaires.

J'espère, mes chers Collègues, vous avoir montré que, même en nous bornant aux parties anciennes et déjà explorées, nous trouvons devant nous bien des questions qui peuvent tenter, et les géomètres, et les analystes. Mais que dire de cette partie presque intacte de la Géométrie qui nous a été léguée par les travaux de Plücker, de Sophus Lie et de leurs successeurs. Il ne leur a pas suffi d'introduire le plan et de le considérer, au même titre que le point, comme un élément de l'espace. La théorie des polaires réciproques avait rompu les digues. Au point et au plan sont

venus s'adjoindre successivement la ligne droite, la sphère, le cercle, puis les courbes et les surfaces accompagnées de leurs plans tangents; on a même réuni ces êtres déjà si complexes en assemblages, qu'on s'est plu à considérer eux-mêmes comme des éléments primordiaux. L'étude des relations infinitésimales est à peine commencée pour cette nouvelle Géométrie. C'est tout au plus si l'on a ébauché la théorie de la ligne droite et de la sphère, reliées l'une à l'autre par l'admirable transformation de Sophus Lie. Le cercle et l'hélice ont donné lieu à quelques recherches; on a, en quelque sorte, isolé et étudié certaines classes de congruences rectilignes parmi lesquelles il faut signaler les congruences *isotropes* de Ribaucour, qui jouent un rôle si élégant dans la théorie des surfaces minima; on a perfectionné en plusieurs points la théorie des systèmes de coordonnées curvilignes et, en particulier, des systèmes triples de surfaces orthogonales. Mais les progrès ultérieurs dépendront exclusivement de l'ordre, de l'uniformité et de la généralité qu'on parviendra à introduire dans les méthodes. C'est à ce prix seulement qu'on pourra réaliser, dans cette branche, les simplifications sans lesquelles tout progrès deviendrait impossible. J'ai confiance qu'ici comme ailleurs, l'extrême généralité des problèmes engendrera la simplicité des solutions.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Broggi (Ugo). — *Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* (Dissert.) In-8°, 34 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 80 pf.

Buchholz (Hugo). — *Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann u. die Theorie der Figur der Erde.* Zur Einführung in die höhere Geodäsie (angewandte Mathematik). 1. Tl. In-8°, XVI-470 p. avec 137 fig. Leipzig, Barth. 15 m. Relié, 16 m.

Crathorne (A.-R.). — *Das räumliche isoperimetrische Problem.* (Dissert.). Gr. in-8°, III-60 p. avec 13 fig. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 1 m. 80 pf.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. BRUNS. — WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND KOLLEKTIVMASSLEHRE. 1 volume in-8 de 310 pages. Leipzig und Berlin, Teubner, 1906.

Dans cet Ouvrage, M. Bruns se limite au calcul des probabilités pur; on y chercherait en vain une théorie des erreurs ou des assurances; c'est que ces applications sont si importantes qu'elles en acquièrent une sorte d'indépendance, un peu comme l'astronomie sphérique vis-à-vis de la trigonométrie.

La première Partie du Livre est consacrée au calcul classique des probabilités. L'auteur insiste sur les conditions dans lesquelles l'emploi de ce calcul est légitime; en somme, c'est simplement un calcul des *fréquences relatives*, et il ne peut s'employer que pour des *moyennes*, et, si l'on suppose l'*égal épuisement des cas possibles*, c'est affaire d'expérience que de vérifier cet égal épuisement, c'est-à-dire l'égale possibilité de tous les cas. Le type des phénomènes soumis au hasard, c'est le tirage d'une boule dans une urne contenant des boules blanches et noires; dans ce cas simple, on constate que l'égal épuisement a lieu; on dit aussi qu'il y a *compensation du hasard*. A quoi est due cette compensation? Est-ce une loi de la nature comme la gravitation, ou est-elle le résultat d'un mécanisme plus ou moins compliqué? La question est intéressante, mais importe peu pour l'emploi pratique du calcul des probabilités, et elle importe encore moins au mathématicien.

Après avoir établi les théorèmes généraux ordinaires, et fait rapidement la théorie de l'intégrale eulérienne, l'auteur passe à la résolution des problèmes classiques sur le partage des enjeux, la ruine des joueurs, et il les traite d'une façon très générale, en les rattachant à la résolution des équations aux différences par l'emploi des fonctions génératrices. Il discute aussi la question des espérances mathématique et morale, et le Chapitre suivant, consacré aux probabilités géométriques, donne les résultats si inté-

observés forment un objet collectif pour lequel

$$2S(x) - 1 = \Phi[h(x - p)], \qquad \text{où} \qquad h = \sqrt{\frac{n}{2pq}}.$$

Cette formule montre que la probabilité maximum appartient à $x = p$ et donne la loi des écarts. Poisson généralise en supposant variable la composition des urnes. En appelant p la moyenne des p_k, P celle des $(p_k - p)^2$, il trouve

$$2S(x) - 1 = \Phi[h(x - p)], \qquad \text{où} \qquad h = \sqrt{\frac{n}{2(pq - P)}}.$$

C'est en cela que consiste la *loi des grands nombres*. Pour que cette loi s'applique, il faut que *deux* nombres soient grands : 1° le nombre des expériences; 2° le nombre des urnes. Le 1° est indispensable pour que la compensation du hasard s'établisse, mais le 2° ne l'est pas du tout; on peut prendre un nombre d'urnes quelconque, on obtient un objet collectif dont on peut calculer les éléments numériques; on trouve alors la loi de Poisson comme loi *limite*, et l'on constate que la tendance vers la loi exponentielle simple est une conséquence du mélange d'arguments. Pour comparer la distribution d'un objet collectif observé à celle d'un schéma de Bernoulli ou de Poisson, il faudra donc calculer les éléments numériques de cet objet collectif; il faudra que l'on puisse les identifier *tous* avec ceux du schéma, dans la limite de l'incertitude des éléments numériques. On pourra toujours assimiler un objet collectif quelconque à un schéma de Poisson en prenant un grand nombre d'urnes variant avec le périmètre; mais on voit bien qu'une telle assimilation est purement formelle et n'a aucun intérêt; ce qui est intéressant, c'est de réduire le plus possible le nombre des paramètres.

Un tel résultat est alors utile dans l'application; on a une loi empirique; cela ne doit pas empêcher d'étudier le phénomène en lui-même, ce qui pourrait faire connaître pourquoi les lois du hasard s'appliquent; il serait utile de rechercher d'une façon précise quel genre d'hypothèses un résultat ainsi obtenu peut conduire à faire sur le mécanisme même du phénomène observé.

La même méthode est encore appliquée au schéma le plus général des urnes; l'auteur traite aussi le difficile problème de la distribution des groupes dans une série de n expériences. Voici le

type de ce genre de problèmes : On fait n tirages dans une urne contenant des boules blanches et noires, en remettant la boule à chaque fois. On obtient ainsi des résultats (1), (2), ..., (n). On peut les diviser en groupes de deux de la façon suivante : (1, 2), (2, 3), (3, 4), etc. On prend la fréquence relative des groupes composés de deux blanches, ou d'une blanche et d'une noire, pour argument d'un objet collectif; il faut alors trouver la courbe sommatoire. On voit combien ce problème se complique dès que l'on prend des groupes plus étendus, ou que l'on fait d'autres hypothèses analogues.

Le Livre se termine par une partie pratique. L'auteur, étant astronome, et auteur du *calcul scientifique,* mène la théorie jusqu'au calcul numérique. Il expose en détail comment on peut calculer les éléments numériques, dans les divers cas qui se présentent, comment on peut abréger le travail matériel, et surtout avoir des vérifications constantes.

Dans cette longue analyse, j'ai cherché à donner une idée un peu précise de la théorie des mesures collectives, théorie encore jeune, et qui pourtant a été l'objet d'un assez grand nombre de travaux en Allemagne; je n'ai pu qu'effleurer la plupart des sujets que traite le Livre si touffu de M. Bruns; le concept d'objet collectif relie tous ces sujets, qui se présentent comme de simples applications de la théorie générale. On a affaire en somme à un achèvement logique des principes du calcul des probabilités, et l'on a vu combien de voies sont ouvertes à la recherche. Beaucoup de résultats importants ont été trouvés, les grandes lignes ont été tracées, et les détails abordés; on désirerait une complication moins grande..., mais peut-être cette complication est-elle dans la nature des choses; on voudrait aussi des développements supplémentaires sur le problème de Lexis et sur les conséquences de l'assimilation d'un objet collectif à un schéma d'urnes.

Le Livre de M. Bruns donne l'état actuel de la théorie, à la création de laquelle l'auteur a contribué pour une très grande part; un progrès très grand a été réalisé sur le calcul classique des probabilités; les problèmes si différents soulevés dans ce calcul sont rassemblés sous un même point de vue, et une méthode uniforme leur est appliquée; on a vu comment, en posant le problème de Bernoulli d'une façon nouvelle, on généralise les résultats, en

Telle est la formule fondamentale de la nouvelle théorie. Il suffira pour avoir $S(y)$ de calculer les coefficients $D[R(u)_q]$, les Φ_q étant donnés par une Table. Pratiquement, il suffira de faire $t = 1$ et de se borner aux premiers termes.

Prenons $c = D(x)$; c est alors ce que la théorie des erreurs appelle *valeur la plus probable*.

Posons alors $s^2 = D[(x - c)^2]$; s est appelée la *dispersion;* c'est ce que l'on appelle dans la théorie des erreurs l'*erreur moyenne*. Prenons enfin h de façon que $2(hs)^2 = 1$; on constate alors que les deux premiers coefficients de la série des Φ s'annulent, et l'on obtient la *forme normale*

$$2S(y) - 1 = \Phi(v) + D_3\Phi(v)_3 + \ldots.$$

Les quantités c, h et les D sont appelées les *éléments numériques*.

Ainsi se trouve résolu le problème proposé. Répétons que cette solution n'est pas unique. L'expérience peut montrer qu'il existe pour certaines classes d'objets collectifs des expressions qui les représentent avec un *assez petit nombre de paramètres,* et qui soient préférables à la série des Φ.

Le problème précédent a été posé par Fechner. A cette question principale se rattachent d'autres questions importantes. Que devient la courbe sommatoire quand on change l'argument? Quelle est la conséquence d'un mélange d'arguments ou de distributions? Quelle est l'incertitude des éléments numériques calculés et quelle est l'influence de l'arrondissement? Autant de questions qui sont soigneusement discutées. Arrêtons-nous un peu sur quelques-unes.

Voici en quoi consiste un mélange d'arguments. Soient x_1, x_2, ..., x_n les arguments de n objets collectifs, pour chacun desquels on connaît la loi de distribution $V(x_k)$, lois qui peuvent être les mêmes ou différer. Si $x = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on dit que x provient du mélange des arguments x_k. On peut alors calculer la loi de distribution de l'argument x, et l'on constate que, si les *dispersions* des x_k sont du même ordre de grandeur, le mélange d'arguments engendre une tendance vers la loi exponentielle simple

$$2S(x) - 1 = \Phi(u),$$

quand n augmente; nous retrouverons plus tard ce résultat très important. L'étude du mélange de distributions conduit à trouver des critères pour décider si deux arguments d'un même objet collectif sont indépendants.

La méthode qui sert à l'étude de l'incertitude des éléments numériques est bien digne de remarque. Supposons une série de m expériences, qui donnent les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$ formant un objet collectif; x_i résulte de la $i^{\text{ième}}$ expérience. Soit $V(x)$ la distribution vraie, c'est-à-dire telle qu'on la calculerait si m était infini. Recommençons indéfiniment cette série de m expériences; les x_1 forment un objet collectif de distribution $V(x)$; de même les x_2, ... Un élément numérique calculé E est une fonction $T(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, et tous les éléments E obtenus formeront, eux aussi, un objet collectif; nous prendrons sa dispersion pour mesure de l'incertitude de E. On voit qu'on a affaire à un problème de mélange d'arguments, dans lequel tous les arguments ont même distribution; on trouve que l'incertitude de tous les éléments numériques est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Quant à l'influence de l'arrondissement, on ne peut rien dire de très général; pourtant, on montre qu'il doit y avoir une quinzaine de segments au moins dans la région des x observés, si l'on veut que l'arrondissement n'ait pas d'influence.

Ces problèmes généraux étant résolus, une autre question se pose. Pendant longtemps on a cru pouvoir assimiler les événements d'un objet collectif aux tirages dans une urne ou système d'urnes; ou encore, on a cru pouvoir réduire tous les objets collectifs au type des urnes. On a ainsi fait des applications tout à fait fausses des lois de Bernoulli et de Poisson sur les grands nombres. Lexis pose le problème de rechercher dans chaque cas particulier si l'assimilation au type des urnes est légitime, et dans quelle mesure. Il nous faut trouver des règles pour répondre à cette question. Étudions d'abord les propositions de Bernoulli et de Poisson. Voici comment on peut énoncer les résultats de Bernoulli.

Soit un grand nombre n d'urnes identiques contenant des boules blanches et noires en nombres proportionnels à p et q. On fait un tirage dans chaque urne, et on note la fréquence relative x des boules blanches. On recommence un grand nombre de fois; les x

ressants sur le *nombre* des droites qui rencontrent une ou deux courbes, qui passent entre deux courbes, etc.

La seconde Partie du Livre est la plus considérable, et c'est la partie originale. Elle est consacrée à la théorie des mesures collectives. Nous allons chercher à donner une idée de cette théorie.

Son premier but est la *condensation* en une formule d'une série d'observations, de façon que la formule ait le même contenu que les observations elles-mêmes. Donnons d'abord quelques définitions.

Un *objet collectif* est un ensemble d'objets de *même nature,* c'est-à-dire ayant des caractères communs, et qui peuvent être rangés *statistiquement* d'après un caractère variable. Ce caractère ordonnateur est l'*argument,* le nombre des objets est le *périmètre.* Par exemple, formons un Tableau des tailles des recrues d'une même circonscription, ces tailles étant exprimées par un nombre rond de centimètres : toute taille entre $169^{cm},5$ et $170^{cm},5$ par exemple sera représentée par 170^{cm} (ce procédé de l'arrondissement joue un grand rôle dans la pratique, et il faudra étudier ses conséquences). Appelons y la fréquence relative des tailles représentées par le nombre x; portons x en abscisse, y en ordonnée, et faisons passer par la série des points obtenus une courbe; ce sera la *courbe distributive.* L'expérience montre que l'on obtient ainsi pour les objets collectifs les plus divers des courbes d'allure régulière, pourvu que le périmètre soit assez grand. Quand le périmètre augmente, la courbe ne se transforme pas indéfiniment, mais reste sensiblement constante; c'est la vérification expérimentale de ce fait que la compensation du hasard se produit dans la réalité.

La courbe distributive a le même contenu que les observations, mais elle n'est pas pratiquement la plus commode. Appelons $S(x)$ la somme de tous les y correspondant à des valeurs de l'argument $\leqq x$. La courbe dont l'ordonnée est $S(x)$ est appelée *courbe sommatoire,* et elle présente de sérieux avantages sur la courbe distributive. Appelons $V(x)$ l'ordonnée de cette dernière courbe; $V(x)$ étant la dérivée de $S(x)$, on voit qu'il est facile de passer d'une courbe à l'autre.

On se propose de chercher une *théorie formelle générale* des objets collectifs, ou encore de chercher la fonction $S(x)$. On voit tout de suite qu'un pareil problème est indéterminé, mais il y a

des solutions plus commodes que d'autres et surtout qui mettent mieux en relief les caractères communs à tous les objets collectifs.

On a cherché d'abord à représenter tous les objets collectifs par une formule de la forme

$$V(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-c)^2}.$$

Cela revient à poser

$$2S(x) - 1 = \Phi(u),$$

où

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \qquad \text{et} \qquad u = h(x-c).$$

Mais cette représentation n'est pas plus satisfaisante que la représentation des phénomènes périodiques par un sinus. Pour les phénomènes périodiques, on a été obligé d'introduire des paramètres, et on les a représentés par la série de Fourier réduite à ses premiers termes. Il en est de même pour les objets collectifs. Voici quelles sont les formules qui servent de fondement analytique :

Désignons par $\mathrm{sg}(y-x)$ une fonction égale à 1, 0 ou -1 suivant que $y-x$ est positif, nul ou négatif. Posons $u = h(x-c)$, $v = h(y-c)$, où h est > 0.

On aura

$$\mathrm{sg}(y-x) = \sum_q t^q R(u)_q \Phi(v)_q,$$

où $t < 1$. $\Phi(x)_q$ est la dérivée $q^{\text{ième}}$ de la fonction $\Phi(x)$, et les polynomes $R(x)_q$ sont définis par la formule

$$e^{-2xv-v^2} = \sum_q R(x)_q (2v)^q.$$

$V(x)$ étant l'ordonnée de la courbe distributive, posons maintenant

$$D[T(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) V(x) dx.$$

Ce sera la moyenne de $T(x)$, prise suivant la distribution $V(x)$. Appliquons maintenant l'opération D à la fonction $\mathrm{sg}(y-x)$:

$$D[\mathrm{sg}(y-x)] = 2S(y) - 1 = \sum_q t^q D[R(u)_q] \Phi(v)_q.$$

atteignant les lois des petits nombres; enfin, le caractère expérimental de la théorie la rend propre à des applications sérieuses à la réalité. A. Blondel.

LEIBNIZENS NACHGELASSENE SCHRIFTEN PHYSIKALISCHEN, MECHANISCHEN UND TECHNISCHEN INHALTS, herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Dr. *E. Gerland.* Un volume des *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen,* begründet von *M. Cantor.* (XXI. Heft.) 256 pages in-8. Leipzig, Teubner, 1906.

La *Bibliotheca mathematica,* dans le premier Volume de la troisième série (1904), a donné de brèves indications sur ces papiers de Leibniz, concernant la Physique, la Mécanique, la Technique, conservés dans la bibliothèque de Hanovre et qui voient le jour, grâce à M. Ernest Gerland. Ils ne diminueront pas, à coup sûr, l'opinion qu'on avait sur l'étendue d'esprit et l'infinie curiosité de Leibniz. Dans des morceaux qui sont souvent assez longs, qui parfois se réduisent à quelques pages, à quelques phrases, à quelques notes informes, celui-ci traite du baromètre, de la nature de l'air et de la flamme, de l'Aéronautique, de la Capillarité, de divers chapitres d'Acoustique et d'Optique, de la déclinaison, des principes de la Physique, du mouvement en général, du frottement, du *perpetuum mobile,* des horloges, de la fabrication des miroirs, des machines de guerre, des pompes et autres machines hydrauliques, des moulins à vent, de la navigation, des roues de voiture, etc., sans compter une *drôle de pensée, touchant une nouvelle sorte de représentations,* par laquelle se termine le Volume.

Tout cela est écrit en allemand, en latin, en français; les diverses langues se mêlent d'ailleurs souvent, comme dans ce bout de phrase :

Ihre naturam aber geometrica zu consideriren...;

je crois bien que Leibniz serait partisan de l'*Esperanto.* Tout cela est écrit de la façon la plus négligée, parfois illisible, souvent

déchiré. On devine, en feuilletant ces pages, une partie de la peine qu'a dû se donner M. Gerland pour les déchiffrer, pour en éclaircir le sens. Mais cette peine portait sa récompense en elle-même, tant cet amas de documents est précieuxp our l'histoire de la Science, de la Technique et de la pensée de Leibniz.

J. T.

SARRETTE (H.). — PRÉCIS ARITHMÉTIQUE DES CALCULS D'EMPRUNTS A LONG TERME ET DES VALEURS MOBILIÈRES. 1 volume in-8; IX-285 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Dans le titre de ce Livre, les mots *Précis arithmétique* ont peut-être besoin d'explication ; voici celle que donne l'auteur : « Précis, car les règles fondamentales en la matière sont énoncées, démontrées et traduites dans l'application et de nombreux exemples ; précis arithmétique, car toutes les démonstrations et explications sont essentiellement arithmétiques, l'Algèbre étant complètement laissée de côté. Le lecteur ne trouvera donc, dans ce Traité, aucune notation littérale, sans cependant que le raisonnement soit sacrifié en aucun cas. »

L'auteur tient parfaitement les promesses de sa préface et ses explications ont toute la clarté désirable. Il n'aurait assurément pas rédigé son Livre comme il l'a fait s'il n'avait pas été convaincu que ce mode de rédaction correspondait à un besoin, à un besoin que ses fonctions et ses relations lui ont permis de constater. « Voit-on, dit-il encore, un commerçant, un industriel, un banquier se livrant à des recherches de logarithmes, à des résolutions d'équations? » Cette simple question, posée avec une parfaite tranquillité, est une satire cruelle des résultats de notre système d'éducation. Eh quoi ! on ne peut même pas imaginer un commerçant, un industriel, un banquier qui soit capable de se servir d'une table de logarithmes ! Qu'ont-ils donc appris au lycée ou à l'école ?

Sans doute, au lieu de tables de logarithmes, chacun d'eux se servira d'ordinaire de tables spéciales mieux adaptées à ses besoins spéciaux. Le banquier et le capitaliste, en particulier, tireront parti des tables financières que M. Sarrette a réunies à la fin de

priété de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, furent découvertes par l'expérience; à ces époques reculées, la Science apparaît avec un caractère surtout utilitaire. On fait généralement honneur aux Grecs d'avoir créé la Science rationnelle et désintéressée; mais, au moins chez les premiers penseurs de la Grèce, la Mathématique reste intimement mêlée aux doctrines philosophiques et aux rêveries cosmogoniques. La devise des Pythagoriciens était que « les choses sont nombres », et les propriétés des nombres se trouvaient à la base de leurs explications sur l'Univers; leur Géométrie avait parfois un caractère mystique et magique, comme en témoigne par exemple le fameux pentagone étoilé, qui servait de signe de reconnaissance aux adeptes de l'École et était considéré comme un symbole de la santé. Si nous arrivons maintenant à la Géométrie classique, représentée par les livres d'Euclide et de ses successeurs, nous entrons incontestablement dans le domaine de la pure logique, où la déduction travaille sur les concepts lentement élaborés dans les âges antérieurs. Il faut cependant compléter cette vue. La Géométrie fut quelque chose de plus pour les Grecs : ils y voyaient le type idéal de la Science, où tout est d'une intelligibilité parfaite. On a noté d'ailleurs que cette Science idéale de la Géométrie grecque, étudiant des objets rationnellement construits, ne perd pas contact avec l'intuition spatiale d'où elle tire toutes ses conceptions, et c'est là un point capital. L'instrument mathématique pourra alors être utilisé pour une connaissance de l'Univers, le réel étant en quelque sorte le monde sensible vu à travers les concepts de l'Arithmétique et de la Géométrie, et, quoique dans un domaine encore très restreint, nous comprenons pourquoi les sciences de la nature prennent de bonne heure une forme mathématique. Les travaux géométriques et mécaniques d'Archimède en donnent un admirable exemple, et la recherche qu'il fit de l'aire d'un segment de parabole en s'appuyant sur le théorème des moments, symbolise bien la connexion étroite entre ce que nous appellerions aujourd'hui les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. Dans les derniers siècles de l'Hellénisme, alors que languissent les spéculations géométriques de l'époque antérieure, la Trigonométrie et la Géométrie sphérique se développent, sous l'influence des besoins de l'Astronomie, entre les mains d'Hipparque et plus tard de Ptolémée.

Ainsi, à son déclin, la Science grecque nous offre un exemple, qui s'est présenté dans d'autres temps, de recherches mathématiques paraissant épuisées et se renouvelant sous l'influence de problèmes fournis par l'observation des phénomènes physiques.

Il n'est pas dans mon sujet de suivre à travers le moyen âge et la Renaissance les transformations de l'algèbre géométrique des anciens, qui se sépare peu à peu de la Géométrie. L'Algèbre, proprement dite, arrive ainsi à l'autonomie, avec son symbolisme et ses notations de plus en plus perfectionnées, constituant une langue d'une admirable clarté qui, suivant le mot de Fourier, n'a pas de signe pour exprimer les notions confuses, et procure à la pensée une véritable économie. Les bonnes notations, tout le monde en convient, sont souvent indispensables pour arriver à la solution des problèmes posés. On peut, semble-t-il, aller plus loin, et dire qu'elles conduisent parfois à poser de nouveaux problèmes, l'esprit étant soutenu et porté en avant par les symboles qu'il a créés; la théorie des équations algébriques en offrirait plus d'un exemple. Il y a même un danger dans cette facilité de créations symboliques : c'est au temps qu'il appartient d'en montrer l'utilité et la fécondité. A cet égard, notre langue algébrique usuelle a fait ses preuves, en rendant possibles les progrès ultérieurs des Sciences mathématiques, et, dans certaines parties de la Physique mathématique, des symbolismes plus récents rendent d'incontestables services.

Au XVIIe siècle, le développement de la Cinématique et de la Dynamique naissante fut la cause des plus grands progrès de l'Analyse. C'est de là que date l'Analyse moderne; elle est vraiment sortie de la Mécanique. L'origine de la notion de dérivée est dans le sentiment confus que nous avons de la mobilité des choses et de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'accomplissent les phénomènes; les mots de *fluentes* et de *fluxions* marquent bien cette origine. Peu d'intégrations eurent plus de conséquences que celle de Galilée remontant de la loi des vitesses à celle des espaces dans le problème de la chute des corps, et il est impossible de séparer dans Huygens et Newton le mécanicien et le physicien du mathématicien; tels les grands artistes de la Renaissance, que nous trouvons à la fois peintres, architectes et sculpteurs.

où λ, λ' sont des paramètres, et qui satisfasse aux conditions

$$\int_a^b u(x)\,g(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b [u(x)]^2\,dx = 1.$$

L'auteur montre comment l'introduction de la fonction de Green ramène le problème à la résolution de l'équation intégrale

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + x' g(s),$$

avec la condition

$$\int_a^b \varphi(t)\,g(t)\,dt = c;$$

le noyau $K(s, t)$ est une fonction continue et symétrique des variables s et t; $f(s)$ et $g(s)$ sont des fonctions continues données de s; c est une constante donnée, λ est un paramètre; le problème consiste à trouver une fonction $\varphi(s)$ et une valeur pour x' telles que les deux équations précédentes soient vérifiées identiquement.

M. Cairns montre que la belle méthode, fondée sur la transformation orthogonale d'une forme quadratique à une infinité de variables, par laquelle M. Hilbert a résolu l'équation de Fredholm dans le cas d'un noyau symétrique, s'applique, en l'étendant convenablement, à la solution de la question qu'on vient de poser. Au lieu de considérer seulement une forme quadratique, on a alors à considérer à la fois une forme quadratique et un nombre fini de formes linéaires (à une infinité de variables), qui lui sont associées. L'auteur a su présenter cette extension de manière à conserver une parfaite analogie avec la méthode de M. Hilbert. L'intérêt de cette extension, en elle-même, et de son application au problème spécial traité par l'auteur est manifeste. J. T.

MÉLANGES.

LA MATHÉMATIQUE DANS SES RAPPORTS AVEC LA PHYSIQUE [1];

PAR M. ÉMILE PICARD.

J'entendais un jour soutenir à un éminent ingénieur que les mathématiciens ne sont pas à leur place dans les sociétés savantes scientifiques. Il estimait qu'ils devaient trouver asile dans quelque section de Philosophie ou de Logique d'une Académie des Sciences morales et politiques. Mon savant ami, en émettant cette boutade, ne pensait évidemment qu'à certains travaux de philosophie mathématique, assez en honneur aujourd'hui, qu'il jugeait sans bienveillance et regardait comme des débauches de logique des mathématiciens. La réponse était facile, et les raisons sont évidentes, pour lesquelles, dans les Universités et les Académies, les mathématiciens font partie des mêmes groupements que les savants adonnés à l'étude de la nature : le contact a en effet toujours été intime entre la Mathématique et la Physique. Ce sujet a été bien des fois traité. Il n'est peut-être pas sans intérêt de le reprendre, en jetant un coup d'œil sur le passé et cherchant à en tirer quelque enseignement pour l'avenir; c'est ce que je me propose de faire dans ce discours.

I.

Il n'est pas douteux que les Mathématiques eurent longtemps un caractère expérimental. La Géométrie fut d'abord une branche de la Physique, et des propositions assez cachées, comme la pro-

[1] Conférence faite au IVe Congrès international de Mathématiques. Rome, 10 avril 1908.

son Ouvrage, et je crois bien, avec lui, qu'ils n'ont pas, dans la pratique journalière, « à recourir aux logarithmes, aux développements en série, aux différentielles même » alors qu'ils « ont sous la main des calculs tout faits qui donnent, en quelques instants, la solution cherchée, avec toute la précision désirable ».

Mais n'est-il pas pénible de penser que les lecteurs auxquels s'adresse M. Sarrette sont ignorants au point de ne pouvoir comprendre les petites formules qui traduiraient, dans la langue concise et lumineuse de l'Algèbre, les règles qu'il énonce et démontre dans le langage ordinaire, avec un talent d'ailleurs auquel on doit rendre hommage. Il leur suffirait, avec la connaissance des signes opératoires de l'Arithmétique, de savoir qu'on représente les nombres par des lettres, d'être capables de réduire en nombres des formules qui sont les plus simples du monde. Est-ce trop demander à un banquier, voire à un capitaliste ? L'excellent Livre de M. Sarrette est une réponse à cette question. J. T.

SCHEIBNER (W.). — Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. 1 volume in-8°, 250 pages. Leipzig, Teubner, 1907.

Sous ce titre, M. Scheibner réunit, en les perfectionnant et en les complétant sur divers points, une suite de Mémoires qu'il a publiés de 1903 à 1907, dans les *Berichte der mathematisch-physischen Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*. Son but est de permettre aux étudiants qui s'intéressent à l'Algèbre de se familiariser avec quelques propositions très importantes et quelques faits essentiels de la théorie des transformations linéaires. On ne s'étonnera pas si l'auteur, ayant ce but devant les yeux, a voulu limiter l'exposition des théories générales, s'il a écarté la notation symbolique, et l'emploi systématique des formes homogènes, s'il s'est borné à définir ce qu'est un système complet de covariants indépendants, sans démontrer qu'un pareil système se compose d'un nombre fini de termes, s'il s'est, en un mot, surtout attaché à des questions particulières,

traitées pour elles-mêmes. On ne contestera pas assurément l'importance de ces questions.

Après avoir défini les invariants et les covariants, après en avoir expliqué la formation et en avoir exposé les propriétés fondamentales, l'auteur traite avec détail des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré, de leur réduction à des formes typiques et de leur résolution.

Dans le Chapitre suivant, consacré à la transformation des intégrales elliptiques, l'étude antérieurement faite de l'équation du quatrième degré trouve une belle application.

M. Scheibner traite ensuite des équations du cinquième et du sixième degré, de leurs formes typiques, de la résolvante bicubique, etc. L'étude de l'équation de l'icosaèdre et de sa résolution est renvoyée à l'Appendice, après deux Chapitres consacrés l'un aux substitutions linéaires dans le sens de la théorie d'une variable imaginaire et l'autre à la transformation de Tschirnhaus. Un dernier et important Chapitre de l'Appendice concerne la transformation linéaire des fonctions thêta et les fonctions modulaires elliptiques. J. T.

DE WEESE CAIRNS (W.). — Die Anwendung der Integralgleichung auf die zweite Variation bei isoperimetrischen Problemen. Inaugural-Dissertation. In-4°, 68 pages. Göttingen, W.-F. Kaestner, 1907.

Cette dissertation inaugurale est une intéressante application de la théorie des équations intégrales au problème des isopérimètres. Ce problème, en désignant par p, q, g des fonctions données de x, et en posant

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + qu,$$

se ramène à la détermination d'une fonction u de x, qui vérifie l'équation différentielle

$$L(u) + \lambda u + \lambda' g(x) = 0,$$

Ce fut une époque décisive dans l'histoire de la Science mathématique que le moment où, allant bien au delà de ce qu'avaient pu rêver les Pythagoriciens, on se rendit compte avec précision que l'étude des phénomènes naturels était susceptible de prendre une forme mathématique, et cela surtout quand le développement de la Mécanique conduisit à postuler que les changements infiniment petits, de quelque nature qu'ils soient, survenant dans un système, dépendent uniquement de l'état actuel de celui-ci. On fut ainsi amené à penser que la forme, à laquelle on se trouverait ramené, serait donnée par des équations différentielles, et nous vivons encore aujourd'hui sur ce principe qui, depuis le commencement du XVIIIe siècle, a orienté le développement de l'Analyse. Il serait injuste d'oublier que les problèmes posés par la Géométrie ont eu quelque part aussi dans cette orientation, mais, pour garder un point de vue plus uniforme, et si je ne craignais d'être accusé de paradoxe, je pourrais alléguer, comme je le disais plus haut, que la Géométrie fait partie de la Physique.

II.

L'histoire des Mathématiques, en ses points les plus essentiels, se confond au XVIIIe siècle avec celle de la Mécanique et de la Physique, et de savantes recherches sur la théorie des fonctions ont montré récemment que des problèmes fondamentaux dans cette théorie se sont présentés de bonne heure. Ainsi Clairaut, dans sa théorie de la figure de la Terre, considère pour la première fois des intégrales curvilignes et donne la condition pour qu'elles ne dépendent pas du chemin suivi entre deux limites déterminées. Pareillement, les deux équations fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe apparaissent tout d'abord dans un Mémoire sur la résistance des fluides sous la plume de d'Alembert, qui voit le rôle joué dans leur étude par le symbole $\sqrt{-1}$, déjà introduit par Leibniz et Jean Bernoulli; un peu plus tard, d'Alembert écrivait pour la première fois l'équation $\Delta\varphi = 0$. On sait qu'une analyse, présentant avec les recherches précédentes une grande analogie, lui donnait aussi l'intégration de l'équation des cordes vibrantes. On retrouve encore les fonctions d'une

variable complexe dans un Mémoire plus récent d'Euler sur le mouvement des fluides et dans les travaux de Lagrange sur les Cartes géographiques. Ainsi une des théories de l'Analyse moderne, qui a eu le plus d'éclat au XIXe siècle, a trouvé son origine dans des problèmes de Mécanique et de Physique.

L'étude de l'attraction n'a pas eu moins d'importance pour le développement de l'Analyse. On aurait peut-être pu souhaiter pour la simplicité des calculs laborieux de la Mécanique céleste une autre loi que celle du carré de la distance; mais, si la nature nous devait une compensation, il faut avouer qu'elle nous l'a largement donnée, en permettant de créer la théorie du potentiel newtonien, aucune autre loi d'attraction n'étant susceptible de poser à ce point de vue tant de problèmes féconds et d'un intérêt général. Dans cet ordre d'idées, l'équation dite de Laplace, à laquelle satisfait le potentiel en dehors des masses attirantes, est à signaler tout particulièrement; se rencontrant aussi en Hydrodynamique et dans la théorie de la chaleur, elle a conduit à différents types de problèmes aux limites qui, étendus à des équations plus générales, sont encore aujourd'hui l'objet des préoccupations des analystes. Lagrange déplorait qu'il n'y eut qu'un système du monde à découvrir. Nous serions presque tentés de croire à notre tour qu'on ne retrouvera plus une mine aussi féconde que cet ensemble de théories physiques liées à la considération du potentiel newtonien, si nous ne savions que, dans les sciences de la nature, nos représentations et nos concepts évoluent avec les progrès de l'observation et de l'expérience, ce qui fait que des regrets, comme celui de Lagrange, ne sont pas justifiés. Il y aura toujours quelques coins du système du monde à explorer, et sans doute, nous l'espérons du moins en tant que mathématiciens, quelques problèmes d'Analyse à nous poser à leur sujet.

La théorie analytique de la chaleur dans l'immortel Ouvrage de Fourier a ouvert aussi la voie à bien des problèmes, et nous y trouvons des méthodes d'intégration au moyen de solutions simples, inspirées par les questions physiques elles-mêmes. Quelquefois, en effet, celles-ci ne donnent pas seulement le matériel analytique, sur lequel travaillera le mathématicien, mais elles lui fournissent des indications sur la marche à suivre dans la solution. Ainsi, dans les théories moléculaires, les équations aux dé-

rivées partielles se présentent comme des transformées limites, mais plus maniables, d'équations aux différences finies ou d'équations différentielles ordinaires; or, il peut arriver précisément que, pour deviner la forme des solutions, il soit utile de revenir à ces dernières équations. C'est ce qui arrive à Fourier, quand il étudie la communication de la chaleur entre des masses disjointes et en fait l'application au cas où le nombre des masses est infini. On a eu recours souvent, depuis Fourier, à des considérations de ce genre pour établir des théorèmes d'existence, en passant ensuite à la limite, et l'on pourrait indiquer des travaux tout récents sur les équations fonctionnelles, qui utilisent au fond la même idée, dont la mise en œuvre peut présenter de grandes difficultés. Ce sont là des cas où la Physique rend à l'Analyse un double service, lui proposant des problèmes et lui suggérant des vues pour leurs solutions.

On a souvent cité la belle page du discours préliminaire de Fourier, où il développe cette pensée que l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques; mais il faut reconnaître qu'il y parle plus en physicien qu'en géomètre, quand il insiste sur la nécessité d'aller jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire, dit-il, de toute recherche, et sans laquelle on n'arrive qu'à des transformations inutiles. Fourier réduit trop ici le rôle de l'Analyse mathématique, et, si la Physique a été l'origine première de grandes théories analytiques, le mathématicien rend au physicien d'autres services que de lui donner des possibilités de prévisions numériques. Nous avons tous rencontré des savants adonnés aux sciences expérimentales, pour qui c'est là la seule utilité des Mathématiques. C'est méconnaître l'admirable puissance de transformation du raisonnement et du calcul mathémathiques. Peut-on, par exemple, ne pas être saisi d'admiration quand on lit le célèbre Mémoire de Green, resté longtemps inaperçu, sur l'application de l'Analyse aux théories de l'Électricité et du Magnétisme, et dont Gauss, Chasles et Thomson devaient dix ans plus tard retrouver les résultats. Le calcul devançait ici l'expérimentation, en découvrant des théorèmes fondamentaux sur l'induction électrostatique auxquels des expériences mémorables devaient ultérieurement conduire Faraday.

En entrant un peu plus dans le détail de la théorie des équations aux dérivées partielles, nous trouverons d'autres exemples, qui caractérisent bien les services que les Mathématiques peuvent rendre à la Physique. Ainsi une vue très nette des différentes espèces d'ondes, au point de vue de la propagation, est résultée de la considération de différents types d'équations. Dans les équations du type de la théorie de la chaleur, l'étude des intégrales montre que toute variation se fait sentir instantanément à toute distance, mais très peu à très grande distance, et l'on ne peut parler alors de vitesse de propagation; en un point, la température passe par un maximum pour décroître ensuite, et le temps au bout duquel ce maximum est atteint est proportionnel au carré de la distance. On sait que Lord Kelvin a appliqué l'équation de Fourier à la propagation des courants électriques dans les câbles, en négligeant l'effet de la self-induction; il a ainsi montré que les signaux atteindraient pour chaque perturbation leurs maxima dans un temps proportionnel au carré de la distance, et ce résultat de la théorie a joué un rôle essentiel dans l'établissement de la télégraphie transatlantique.

Les choses se passent autrement dans le cas des équations du type de la propagation du son, qui est aussi celui de la propagation de la lumière et des ondes électriques. L'effet ici n'est pas immédiatement senti, il dure pendant un certain temps et disparaît ensuite, tout au moins dans les milieux à une et trois dimensions. Les deux types précédents se trouvent en quelque sorte condensés dans l'équation relative à la propagation du son dans un liquide visqueux, des ondes électriques dans un diélectrique légèrement conducteur ou dans une ligne télégraphique pour laquelle la self-induction n'est pas négligeable. Il y a, dans ce cas, encore propagation par ondes avec une vitesse déterminée, mais cette onde s'étale en arrière et laisse une trace qui demeure indéfiniment; elle peut, dans les communications télégraphiques, être une source de confusion dans les signaux, et l'on s'est ainsi rendu compte des résultats contradictoires obtenus autrefois dans la recherche de la vitesse de l'électricité.

Ces questions de propagation d'ondes, si intéressantes pour la Physique, n'ont peut-être pas un moindre intérêt psychologique. C'est grâce à l'absence des résistances passives que peut en général

se conserver au loin, pour la vue et pour l'ouïe, la netteté des sensations; ce qui fait, comme on l'a dit, de ces deux sens les sens intellectuels par excellence. A cet égard, le sens de la vue est inférieur à celui de l'ouïe, en raison de la dispersion de la lumière, dispersion que ne présentent pas les sons modérés. Il faut d'ailleurs y ajouter le rôle considérable joué en Acoustique par les harmoniques, rôle bien moindre en Optique où l'œil ne perçoit pas une octave; et ceci ne nous éloigne pas des Mathématiques, s'il est vrai, comme le prétendent quelques physiologistes, que l'organe de Corti dans le labyrinthe de l'oreille doive être regardé comme l'organe du sens arithmétique et nous fournisse notre concept du nombre.

Il faut avouer cependant que les Mathématiques ont leurs ennemis, et les services considérables rendus par l'Analyse à la Physique sont quelquefois niés. On objecte que beaucoup de résultats analytiques ne font que traduire de simples intuitions, et peuvent s'exprimer sous forme d'analogies physiques, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux symboles mathématiques et aux équations différentielles; on cite, entre autres, l'exemple de l'illustre Faraday. On peut répondre d'abord que l'on fait du calcul intégral de bien des manières, et l'on en fait en comptant des lignes de forces. Il n'est toutefois pas possible d'aller bien loin dans cette voie sans le secours de la langue analytique apportant sa précision à des notions menaçant de rester vagues et peu aptes à fournir des résultats quantitatifs. Faraday, s'il eût été géomètre, eût pu devancer Maxwell dans la recherche des lois de la propagation des ondes électriques. L'exemple antérieur de Fresnel est du même ordre; il eut l'intuition géniale des vibrations transversales de l'éther, mais pouvait-on se faire une idée vraiment précise de la distinction générale entre les vibrations transversales et les vibrations longitudinales, avant d'avoir écrit les équations aux dérivées partielles du mouvement d'un milieu élastique? J'en doute pour ma part. Je ne veux pas dire qu'on ne puisse adresser certaines critiques à notre vision mathématique de la nature, mais elles sont d'un ordre plus général; j'aurai l'occasion d'en dire un mot tout à l'heure.

III.

Nous venons de montrer par des exemples particuliers les relations réciproques de la Mathématique et de la Physique. D'une manière générale, dans le développement des diverses parties de la Mécanique et de la Physique, à une période d'induction succède une période déductive, où l'on s'efforce de donner aux principes une forme définitive. Le développement mathématique et formel joue alors un rôle très important, et le langage analytique est indispensable à la plus grande extension des principes. Le symbolisme, dont on peut dire beaucoup de mal, est cependant très fécond à certaines heures; il soutient et porte l'esprit en avant, et les généralisations se font avec le moindre effort. Par le simple jeu de ses symboles, l'Analyse peut suggérer des généralisations dépassant de beaucoup le cadre primitif, ne fût-ce quelquefois que par des raisons de symétrie. N'en a-t-il pas été ainsi avec le principe des déplacements virtuels, dont l'idée première vint des mécanismes les plus simples? La forme analytique qui le traduisait et où apparaissaient des sommes de produits de deux facteurs suggéra des extensions qui conduisirent de la Mécanique rationnelle à la Mécanique chimique à travers la Physique tout entière. Un autre exemple est encore fourni par les équations de Lagrange; ici des transformations de calcul ont donné le type des équations différentielles auxquelles certains savants ont proposé de ramener la notion d'explication mécanique. L'art du mathématicien a créé un moule témoignant de l'importance de la forme d'une relation analytique; il va de soi qu'il appartient à l'expérience de vérifier ensuite si l'instrument forgé est assez souple pour se prêter à des concordances expérimentales.

De tels exemples montrent assez ce que signifie une phrase, qu'on entend quelquefois répéter, à savoir qu'il n'y a dans une formule que ce qu'on y a mis; elle est vide de sens ou n'est qu'un pur truisme. Des notions, identiques au fond, peuvent avoir des formes très différentes, et il arrive que la forme soit essentielle; telle aussi l'énergie peut être constante en quantité, mais variable en qualité. Aux cas cités plus haut, on pourrait ajouter la Mécanique céleste, où il n'y a rien de plus que la formule de la gravi-

tation universelle et quelques constantes fournies par l'observation, mais où d'innombrables transformations de calcul nous font passer de ce point de départ à l'explication de presque toutes les particularités des mouvements des astres.

Nous citerons encore un cas de la puissance suggestive des transformations analytiques en rappelant l'ordre d'idées se rattachant au principe de la moindre action. De très bonne heure on eut l'intuition vague d'une certaine économie dans les phénomènes naturels; un des premiers exemples en fut fourni par le principe de Fermat, relatif à l'économie du temps dans la transmission de la lumière, et l'on arriva à reconnaître que les équations de la Mécanique classique correspondent à un problème de minimum. Les extensions se présentèrent alors d'elles-mêmes, conséquences nécessaires des transformations analytiques de la méthode des variations, qui donnent même d'utiles indications sur les conditions aux limites. Nous retrouvons toujours le même mécanisme : au sentiment vague le symbolisme mathématique donne une forme précise qui suggère des généralisations.

On sait l'importance qu'a aujourd'hui dans l'évolution de la Mécanique le principe de la moindre action. Ce vieux principe, d'allure théologique, semble être notre dernier retranchement dans la crise, exagérée peut-être, que traverse actuellement la Mécanique, et dans cet ordre de questions on a repris récemment, en leur donnant une grande extension, une idée émise jadis par Laplace d'une Mécanique du point rapportée à une action fonction quelconque de la vitesse, ce qui conduit à une masse variable avec cette dernière.

IV.

Mais revenons maintenant un peu en arrière. Le XVIIe et le XVIIIe siècle virent presque toujours les Mathématiques et leurs applications à la Physique cultivées par les mêmes savants. Il devait arriver un moment où des spécialisations s'établiraient; c'est une loi générale, qui régit malheureusement tous les ordres de recherches, et à laquelle échappent seuls quelques rares esprits assez puissants pour ne pas avoir à sacrifier l'étendue à la profondeur. On avait pu espérer un moment, après les merveilleux triomphes du

Calcul infinitésimal, que les géomètres possédant un outil assez puissant pourraient, comme on l'a dit, tourner exclusivement leurs méditations vers l'étude des lois naturelles. Cet espoir devait être vite déçu; les problèmes posés exigeaient de nouveaux perfectionnements en même temps qu'une étude critique des principes admis qui conduisaient parfois à d'inquiétants paradoxes. Une ère nouvelle commençait pour la Mathématique, rappelant, toutes proportions gardées, les temps où la Géométrie grecque, devenue autonome, s'était séparée des spéculations cosmogoniques et philosophiques auxquelles elle avait été liée à une époque antérieure. Parmi les premiers ouvriers de cette transformation, Gauss et Cauchy ont été en même temps de grands théoriciens de la Physique, mais Abel est un pur géomètre. Le XIXe siècle eut d'illustres mathématiciens dont l'œuvre n'a aucun point de contact avec la Philosophie naturelle. Tels sont des travaux sur l'Algèbre pure et l'Arithmétique supérieure; telles aussi les spéculations sur les principes des Mathématiques.

Il faut toutefois apporter de la prudence dans de telles affirmations. Des rapports cachés peuvent apparaître tardivement; notre logique édifie des théories sur des concepts qui sont en somme le résultat d'un travail effectué sur nos sensations, et il est impossible de prononcer *a priori* que telle théorie ne pourra pas être un jour utilisée dans l'étude des sciences de la nature. Quoi qu'il en soit de certaines questions actuelles qui apparaissent à quelques-uns comme de purs exercices de logique, tout le monde reconnaît que les progrès de la théorie générale des fonctions ont été des plus importants pour la Physique mathématique. Que de paradoxes apparents se sont évanouis quand on a approfondi le degré de généralité des intégrales des équations aux dérivées partielles! Il arrive fréquemment en Mathématiques que l'examen de cas trop particuliers empêche d'apercevoir les vraies raisons des choses, et, à cet égard, la grande extension donnée de notre temps à l'idée de fonction aura été féconde, même dans des applications où elle paraît au premier abord inutile.

Les fonctions analytiques, qui forment la matière d'un des plus beaux chapitres de l'Analyse moderne, semblent tout d'abord présenter peu d'intérêt au point de vue où nous sommes ici placés; elles correspondent à un mode très particulier d'approximations,

et d'autres développements, comme les séries trigonométriques, se sont trouvés mieux adaptés aux questions de Physique et de Mécanique, qui leur ont d'ailleurs donné naissance. Des études plus approfondies ont montré cependant que l'importance des fonctions analytiques est très grande en Physique mathématique. Il a été établi, pour un grand nombre d'équations aux dérivées partielles, que toutes leurs intégrales sont analytiques dans certaines régions de l'espace. Il semble que, avec de telles équations, les phénomènes correspondants soient soumis à un moindre degré d'arbitraire, idée nécessairement vague, mais qui se traduit par le fait précis que les conditions aux limites à imposer à une solution sont autres que pour une équation n'ayant pas toutes ses intégrales analytiques. Il suffit de comparer l'équation des cordes vibrantes et l'équation si voisine de l'équilibre calorifique d'une plaque.

Dans le même ordre d'idées, les difficultés dans la démonstration de l'unité d'une solution peuvent être différentes, suivant qu'il s'agit d'équations dont toutes les intégrales sont ou non analytiques. Même en se bornant au cas général, où les données du problème ne correspondent pas à des caractéristiques, il peut y avoir des contacts d'ordre infini entre des intégrales non analytiques, circonstance qui ne se rencontre pas avec des solutions analytiques; un exemple intéressant en est fourni par le célèbre théorème de Lagrange sur les potentiels de vitesse en Hydrodynamique, qui ne subsiste pas pour les fluides visqueux, quoique à un moment donné les rotations et leurs dérivées de tout ordre par rapport au temps puissent être nulles. Il y a là un ordre de questions qui ne sont résolues que dans des cas particuliers, surtout quand il s'agit d'équations non linéaires.

La question du domaine d'existence et du prolongement des intégrales a pour la Physique mathématique non moins d'intérêt que pour l'Analyse. Aucun problème nouveau ne se pose si toutes les intégrales sont analytiques; il en est tout autrement dans le cas contraire. Le prolongement réside alors dans le fait qu'il y a des contacts jusqu'à un certain ordre; ces notions ont donné les résultats les plus importants dans la Mécanique des fluides.

Des points de vue nouveaux sont venus resserrer encore les liens entre la théorie des fonctions de variables complexes et des questions de Physique mathématique. Dans plusieurs de celles-ci

s'introduit un paramètre, et il a été très utile de regarder la solution répondant à certaines conditions comme fonction de ce paramètre. Or, dans de nombreux cas, la solution ainsi envisagée est une fonction analytique uniforme de ce paramètre. Ainsi, pour la vibration des membranes, les harmoniques successifs correspondent aux pôles d'une fonction méromorphe dans tout le plan. On a montré aussi que, dans la théorie de l'élasticité, les déplacements ou les efforts à la surface étant donnés, les solutions se présentent sous la forme de fonctions uniformes du paramètre d'élasticité, fonctions ayant, outre des pôles, un point singulier essentiel à distance finie. Ces résultats, qui sont d'hier, ont montré la véritable origine des difficultés qui avaient longtemps arrêté les efforts des analystes.

Il arrive aussi que la solution dépende d'un ou plusieurs paramètres géométriques entrant dans la définition de la frontière; certaines valeurs particulières de ces paramètres correspondent à des cas spécialement intéressants, comme cela a lieu pour les corps ayant une dimension évanouissante. Ailleurs encore les singularités seront partout denses sur une ligne, et les dénominations mêmes de la Physique s'introduisent dans des Mémoires d'Analyse, où l'on peut lire que les singularités forment un spectre continu. Quand on entend parler aujourd'hui de spectres de lignes et de spectres de bandes, il ne faut pas croire qu'il s'agisse nécessairement de Physique. Il peut aussi bien être question d'Analyse pure, à moins qu'il ne s'agisse à la fois de l'une et de l'autre, comme il arrive dans les efforts tentés pour expliquer la condensation des raies des spectres par les propriétés de certaines équations fonctionnelles.

Dans tous les exemples auxquels je viens de faire allusion, les équations différentielles ou les équations fonctionnelles étaient linéaires; dans quelques cas intéressants se sont rencontrées des équations non linéaires, mais il est alors bien difficile de chercher à caractériser les solutions comme fonctions d'un paramètre figurant dans l'équation, ces fonctions pouvant être multiformes et leurs singularités dépendant des conditions initiales. Il y a là un important et difficile sujet de recherches.

Les questions de connexion jouent un rôle important dans l'Analyse moderne. Sans remonter jusqu'à Alexandre le Grand qui

usa d'un moyen un peu brutal pour tracer des coupures, elles se sont présentées d'abord à propos des nœuds et de l'action des courants sur les courants ou les pôles magnétiques ; c'est là aussi qu'apparaissait pour la première fois la notion de périodicité des intégrales. En même temps, la théorie de l'Électricité et du Magnétisme introduisait les potentiels non uniformes ; peu après l'étude des fonctions algébriques et des surfaces de Riemann prenait son brillant essor, les deux domaines ayant entre eux les liens les plus étroits au point que de nombreuses questions relatives aux intégrales abéliennes peuvent être transposées dans le langage de l'Électricité.

L'équation de Laplace n'est pas la seule équation différentielle dont les solutions ont été étudiées sur une surface de Riemann ou dans des espaces multiplement connexes. Une étude analogue peut être faite pour l'équation de l'équilibre calorifique avec rayonnement, et les solutions non uniformes de l'équation des membranes se sont présentées à propos des perturbations produites par un écran sur les ondes optiques ou électro-magnétiques, c'est-à-dire dans les phénomènes de diffraction. Je me reprocherai de ne pas rappeler ici que l'étude des équations de l'élasticité a été renouvelée dans ces derniers temps par la considération de l'équilibre des corps multiplement connexes, les déplacements étant alors des fonctions non uniformes, tandis que les éléments caractéristiques de la déformation restent uniformes. On peut dire que les solutions polydromes des équations de la Physique mathématique nous réservent encore bien des surprises et seront une mine féconde de découvertes.

Il est encore une catégorie de problèmes d'Analyse peu étudiés jusqu'ici, mais auxquels doivent conduire plusieurs questions de Physique mathématique : je veux parler de la recherche de fonctions satisfaisant dans deux régions de l'espace à deux équations de types différents, et devant se raccorder ainsi que certaines de leurs dérivées le long de la surface séparant ces régions ; c'est ce qui arrive, par exemple, dans l'étude des courants de convection calorifique se produisant entre deux murs.

Il serait fastidieux de prolonger cette énumération, où nous voyons la Physique poser à l'Analyse de nouveaux problèmes. Comment cependant ne pas rappeler que c'est à la théorie de

l'Électricité que nous devons la considération des fonctions de lignes, qui ont donné naissance à de brillants développements analytiques, et étendent largement la notion même de fonction.

V.

Nous venons de voir, en parcourant l'histoire des rapports entre la Physique et la Mathématique, les services que l'une et l'autre se sont rendus. C'est sous l'influence de l'étude des phénomènes physiques que se sont organisées les principales disciplines des sciences mathématiques; bien souvent cette étude a, indirectement au moins, posé les problèmes et même donné des indications pour leurs solutions. En retour, sans parler des faits nouveaux que la puissance de transformation de l'Analyse a su mettre en évidence avant l'expérience, et sans insister sur les prévisions numériques auxquelles elle est apte, rappelons seulement que la netteté de son langage a donné une forme précise et maniable à des notions condamnées autrement à rester vagues, et aussi quelle force de généralisation possèdent ses symboles. Quoique nous n'ayons plus la foi ardente de Fourier et de l'admirable école des physiciens géomètres de la première moitié du siècle dernier, l'Analyse mathématique nous apparaît toujours comme un instrument indispensable à la Physique et quelquefois comme un guide précieux.

En parlant de la symbiose entre la Mathématique et la Physique, nous n'avons fait que constater un fait résultant du développement même de la Science. Si maintenant nous voulons voir les choses de plus haut, il faut nous demander à quoi tient cette alliance qui nous paraît nécessaire; nous devons chercher aussi si elle n'a pas des points faibles et si elle n'est pas susceptible de prendre d'autres formes.

La science physique se présente à nous comme une vue du monde extérieur à travers des concepts tirés par abstraction de l'expérience. Un système de concepts, associé à des faits particuliers et à certaines hypothèses, est susceptible d'être transformé par des déductions convenables. Si ces concepts sont d'ordre mathématique, nous avons une vision mathématique du monde extérieur, sur laquelle peut opérer notre logique. Comme l'a dit

Helmholtz, nous exerçons, par la forme logique de la loi, notre domination spirituelle sur la nature qui nous était d'abord étrangère. Mais tout cela ne va pas sans sacrifices et sans dangers. Le réel, qu'envisage le physicien mathématicien, est bien pâle à côté de celui que saisit l'intuition vulgaire. Pour pouvoir faire œuvre scientifique avec cette réalité confuse, on a dû la simplifier, et il a fallu enfermer dans des cadres plus rigides les contours flottants des choses. Nous pouvons alors raisonner sur cette nature réduite. S'il y a là une force, il y a aussi une cause de dangers. Ceux-ci sont toutefois atténués par l'arbitraire que présentent dans une certaine mesure la formation des concepts et le choix des hypothèses intervenant dans les théories. Nous touchons ici à un point qui intéresse extrêmement les mathématiciens, car il s'agit du matériel même sur lequel nous avons à travailler.

En adoptant, avec la notion du point matériel, les idées qui sont à la base de la Mécanique classique, nous serions conduits tout d'abord à regarder un phénomène comme correspondant à un nombre immense d'équations différentielles, où les accélérations de tous les points sont des fonctions de l'ensemble de leurs coordonnées. Mais une telle représentation n'est féconde que dans des cas très particuliers. On est obligé, dans chaque ordre de questions, de mettre en évidence certaines propriétés moyennes d'un groupe de points, température, pression, etc., qu'on regarde comme fonctions des coordonnées d'un point général et du temps. Admettant que chaque point est surtout influencé par les points voisins, on est conduit alors à des équations aux dérivées partielles, où, conformément à l'hypothèse fondamentale de la Mécanique classique, certaines dérivées partielles par rapport au temps s'expriment à l'aide de ces fonctions et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées.

C'est là le moule ordinaire des équations de la Physique mathématique, élargi parfois par l'introduction de termes de même nature relatifs aux résistances passives. Il représente la forme analytique sous laquelle se condense notre vision mathématique des choses. Ces représentations se sont montrées extrêmement fécondes, et de nombreux exemples en ont été rappelés tout le long de cette conférence. Mais bien des hypothèses simplificatrices ont été faites, et il est permis de prévoir que l'on ne pourra pas

toujours s'y tenir. Les conséquences en seront très importantes pour nous, et de nouveaux sujets d'étude en résulteront sans doute pour l'analyste.

Il arrivera peut-être un jour où, si j'ose le dire, la dilution de la matière nécessaire à son traitement mathématique, au lieu de se faire dans un ensemble continu, se fera dans quelque autre ensemble partout dense; mais cette perspective est sans doute assez lointaine, et ne satisferait probablement guère le savant ingénieur dont je parlais en commençant. D'autres possibilités sont plus prochaines. Parfois, dans certaines questions, l'influence sur une partie du système des parties éloignées de ce système ne peut être négligée, et le problème pris dans sa généralité ne se présente plus sous forme d'équations différentielles, mais sous forme d'équations fonctionnelles où entrent d'ailleurs des dérivées des fonctions inconnues, les intégrales qui figurent dans ces équations étant étendues au volume occupé par le système considéré. On sait avec quel succès un type particulier d'équations fonctionnelles a été étudié dans ces derniers temps, et comment un ensemble de questions, qui avaient fait l'objet des recherches les plus délicates, s'est trouvé ramené à des principes extrêmement simples; mémorable exemple, après tant d'autres, de la facilité que peut apporter à la solution d'un problème particulier un point de vue plus général. Pour certaines conditions aux limites, il y a même grand intérêt à substituer des équations fonctionnelles à des équations différentielles, et l'on remplirait des Volumes avec les travaux publiés dans cet ordre d'idées depuis sept ou huit ans.

Une étude systématique d'équations fonctionnelles de plus en plus compliquées devra donc dans un prochain avenir solliciter l'effort des chercheurs. Un domaine plus vaste que celui des équations différentielles, et les comprenant comme cas particuliers, s'ouvre devant nous. Nous n'y marcherons pas au hasard, guidés dans le choix des formes à traiter par la Mécanique ou la Physique.

Pour un avenir plus lointain, on peut prévoir des problèmes plus complexes encore. La Mécanique, nous l'avons rappelé, a longtemps postulé plus ou moins explicitement un principe de non-hérédité. Nous nous accommodons encore de ce principe, au moins en première approximation, dans les sciences de la nature

inanimée, quoique de nombreux phénomènes indiquent que l'état actuel garde la trace des états antérieurs; tels ces corps, comme le soufre, qui ont une vitesse de transformation d'une forme en une autre, différente suivant leur histoire antérieure. Mais l'hérédité joue surtout un rôle capital dans les sciences de la vie, et nous ne savons pas si nous pourrons utiliser jamais l'instrument mathématique pour l'étude du mécanisme intime des phénomènes biologiques, et si nous ne devrons pas toujours nous contenter de moyennes grossières et de courbes de fréquences. Il ne faut pas cependant réduire à l'avance notre conception mathématique du monde, et nous pouvons rêver d'équations fonctionnelles plus compliquées que les précédentes parce qu'elles renfermeront en outre des intégrales prises entre un temps passé très éloigné et le temps actuel, intégrales qui apporteront la part de l'hérédité. Ces équations fonctionnelles réuniront, dans des conditions infiniment complexes, les caractères des deux types simples étudiés avec tant de succès de nos jours, pour lesquels les limites des intégrales sont constantes pour l'un et variables pour l'autre.

Ces espérances sont peut-être chimériques. Sur le terrain mouvant de la vie où figurent un nombre énorme de variables, il se peut qu'il soit impossible de former des équations fonctionnelles, relatives à certains états moyens, devant jouer le même rôle que les équations différentielles de la Physique mathématique actuelle. Mais, si le philosophe peut faire des réserves, il n'y a pour le mathématicien aucun danger à s'abandonner à ces vues audacieuses, qui le poussent à travailler dans une direction certainement féconde.

Et, encore une fois, le monde extérieur nous aura guidés dans nos recherches analytiques, nous orientant vers les voies utiles à parcourir. Nous avons vu qu'il en a toujours été ainsi, et nous pouvons affirmer qu'il en sera de même dans l'avenir. Pour en revenir au commencement de ce discours, notre vraie place est à côté de ceux qui s'occupent des sciences de la nature. Qu'elle soit justifiée ou non, nous avons la prétention de leur offrir des moules simples sous lesquels ils puissent contempler logiquement le monde extérieur. En échange, ils nous rendent un service d'un haut prix, en nous guidant dans l'infinie variété des formes que conçoit notre esprit. Sous ce point de vue, la Mathématique n'est

pas la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la Philosophie naturelle.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

DANTSCHER (Vict. v.). — *Vorlesungen über die Weierstrasssche Theorie der irrationalen Zahlen.* In-8°, VI-80 p. Leipzig, Teubner. 2 m. 80 pf.; relié, 3 m. 40 pf.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Leipzig, de Göttingue, de Munich et de Vienne. Éd. française, rédigée sous la direction de Jules Molk. T. I (2 vol.). Algèbre. Fasc. 1. In-8°. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

HANSEN (C.). — *Démonstration de l'impossibilité du prolongement analytique de la série de Lambert et des séries analogues.* Kopenhagen, Höst et fils. 1 kr. 70 ö.

HASEMAN (Chs.). — *Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben in der Funktionentheorie.* (Dissert.) Gr. in-8°, 47 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 1 m. 20 pf.

MEYER (M.-Wilh.). — *Kometen u. Meteore.* 3 Aufl. In-8°, 104 p. avec fig. Stuttgart, Franckh. 1 m.; relié, 2 m.

NIELSEN (Niels). — *Recherches sur quelques généralisations d'une identité intégrale d'Abel.* Kopenhagen, Höst et fils. 1 kr. 20 ö.

PAGLIERO (G.). — *Applicationes de Calculo infinitesimale.* In-8°, Mailand, Paravia et Co. 7 l.

VOGT (H.). — *Éléments de Mathématiques supérieures.* Édition réduite à l'usage des élèves chimistes et des élèves des écoles industrielles. In-8°, VI-360 p. av. fig. Paris, Vuibert et Nony.

POINCARÉ (H.). — *La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La Télégraphie sans fil.* 3e édit. Petit in-8, 114 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

LINDNER (Max). — *Schaltungsbuch für Schwachstromanlagen. Schaltungs u. Stromverlaufsskizzen m. erläut. Text.* 9. Aufl., bearb. von W. KNOBLOCH. In-8°, XVI-269 p. Leipzig, Hachmeister et Thal. relié, 2 m.

PELLAT (H.). — *Cours d'Électricité.* T. III. Électrolyse; Électrocapillarité; Ions et Électrons. In-8°, VI-290 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Practical Electrics. 8e édit. In-8°. London, Spon. 3 sh. 6 d.

TISSOT. — *Principes de la télégraphie sans fil, et Instruction pour l'usage du bolomètre, de l'ondomètre et du décrémètre.* Gr. in-8°, 76 p. avec fig. Paris, Impr. nationale.

VERNERI (J.). — *De triangulis sphæricis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex, cum proœmio G. J. Rhetici.* I. De triangulis sphæricis. Herausgeg. von *A.-A. Björnbo.* 12 p. en facsim. et 184 p. avec portrait. (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von *Moritz Cantor.* 24. Heft.) Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 8 m.

BÔCHER (M.). — *Introduction to higher Algebra.* In-8°. London, Macmillan. 8 sh.

HEGER (Rich.). — *Analytische Geometrie auf der Kugel.* In-8°, VII-152 p. avec 4 fig. Leipzig, Göschen. (*Sammlung Schubert*, LIV.) Relié, 4 m. 50 pf.

SCHOENFLIES (A.). — *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* 2. Tl., X-331 p. avec 26 fig. (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* In Monatsheften herausgeg. von *A. Gutzmer.* Der Ergänzungsbände; II. Bd.). In-8°. Leipzig, Teubner. 12 m.

Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Herausgeg. von *Mor. Cantor.* IV. Bd. Von 1759 bis 1799. 4. Lfg. In-8°. Leipzig, Teubner, 7 m.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CHARLES HERMITE (ŒUVRES DE), publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par *Émile Picard*, Membre de l'Institut. Tome II. In-8°, 1-520 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Ce nouveau Volume des Œuvres de Charles Hermite a été publié dans les mêmes conditions que le précédent. C'est M. Émile Picard qui, avec la précieuse collaboration de M. H. Bourget, a préparé le texte et corrigé les épreuves. Comme nous l'apprend M. Émile Picard, tous les calculs ont été refaits ou, au moins, indirectement contrôlés par son habile collaborateur. Il y a eu là, pour certains Mémoires, en particulier pour les études relatives à l'équation modulaire et à l'équation du cinquième degré, un travail d'autant plus considérable que la rédaction d'Hermite, dans les questions algébriques, est extrêmement concise et laisse souvent de côté des intermédiaires. A la suite de cette revision, il a paru utile de faire dans le texte certaines modifications d'un caractère surtout numérique; les plus importantes d'entre elles sont signalées dans des notes.

Les Mémoires reproduits dans ce Volume vont de 1858 à 1872; ils embrassent donc un espace de 14 ans. Ils se rapportent surtout à la résolution de l'équation du cinquième degré, une des plus belles découvertes du grand analyste, aux équations modulaires, à la théorie des fonctions elliptiques, qui fut peut-être la préoccupation la plus constante d'Hermite et dont il n'abandonna jamais l'étude. Mais, à côté de ces Mémoires sur des sujets de haut intérêt, on remarque une foule de digressions toutes dignes du génie du grand géomètre, sur les fonctions de sept lettres, sur des intégrales doubles et de nouveaux développements des fonctions de plusieurs variables en séries de polynomes, etc.

Mais, à côté de ces travaux, insérés dans les différents Recueils mathématiques et principalement dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences, les éditeurs n'ont pas voulu négliger,

et ils ont eu bien raison, les Notes dont Hermite consentait si volontiers à enrichir les Ouvrages dont le sujet se rapprochait plus ou moins de l'objet de ses études. On retrouvera donc ici une *Note sur l'invariant gauche des formes du sixième degré* insérée en 1890 dans l'édition française de l'*Algèbre supérieure* de Salmon; une Note très peu connue, et que nous avions signalée aux éditeurs, sur la théorie des polynomes homogènes du second degré, qu'Hermite avait insérée en 1856 dans un Ouvrage élémentaire intitulé : *Programme détaillé d'un cours d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie analytique*, par Gerono et Roguet. Comme Hermite était à cette époque examinateur d'admission à l'École Polytechnique, les règlements ne lui avaient pas permis de la signer, mais il n'est pas difficile d'y reconnaître le style et la manière du maître; je me rappelle encore avec quel plaisir, alors que j'étais sur les bancs du collège, il y a longtemps, hélas! je me plaisais à la relire et à admirer cette géniale et élégante démonstration du théorème de Sturm, où Hermite s'est affranchi de toute considération de continuité, en s'appuyant seulement sur quelques belles propositions relatives aux formes quadratiques. Nous ne voudrions pas oublier non plus le bel exposé *Sur la théorie des fonctions elliptiques* qui figure dans la sixième édition du *Calcul différentiel et Calcul intégral* de Lacroix, et qui avait contribué, avec les Notes de J.-H.-A. Serret, à donner un regain de jeunesse et d'actualité à ce Traité estimable, bien qu'un peu ancien.

Enfin, nous ne saurions terminer sans féliciter l'éditeur d'avoir donné un peu plus d'attention aux indications bibliographiques, qui étaient quelque peu négligées dans le Volume précédent.

Un beau portrait, représentant Hermite tel qu'il était à l'âge de 50 ans, ajoute à l'attrait de la publication.

Comme le premier, ce second Volume est de ceux dont on ne saurait trop recommander la lecture aux étudiants... et aux maîtres.

G. D.

SYLVESTER. — The collected mathematical papers of James-Joseph Sylvester. Volume II (1854-1873), with two plates. In-4°, xvi-731 p. Cambridge, at the University Press, 1908.

Il y a quatre ans, nous nous empressions de signaler et de recommander à nos lecteurs l'édition, entreprise par M. H.-F. Baker, des Œuvres complètes du géomètre profond, original et primesautier que fut James-Joseph Sylvester. Le premier Volume, que nous analysions en 1904, contient les Mémoires rangés par ordre chronologique qui ont été publiés dans la période qui s'étend de 1837 à 1853. Le Volume II, que nous avons sous les yeux, nous offre les travaux de diverse nature que Sylvester a écrits ou publiés dans les vingt années suivantes, de 1854 à 1873. On peut dire que nous y voyons défiler toutes les branches des Mathématiques pures : le calcul des formes, les déterminants, la théorie des nombres, la Géométrie, le calcul des différences, l'Algèbre pure, la Mécanique, l'Astronomie et même le calcul des probabilités. Rien n'est négligé par ce puissant esprit, tous les problèmes lui paraissent mériter ses recherches. Dans son ardeur et dans son zèle pour sa science favorite, il ne craint nullement de publier le résultat de ses travaux sans attendre qu'il soit pleinement mûri. Qu'importe s'il se trompe, il en sera quitte pour rectifier; d'autres peut-être lui viendront en aide; sa seule préoccupation est de rendre justice à ceux qui l'ont précédé, et de les citer avec honneur quand il développe leurs études et étend leurs découvertes.

Il est curieux que, dans la période de sa vie à laquelle est consacré ce second Volume, Sylvester ait à peu près complètement négligé cette théorie des invariants et des formes homogènes qu'il avait tant contribué à créer. Ce qui l'occupe surtout, c'est l'Algèbre proprement dite et la théorie des nombres.

Parmi les Mémoires les plus intéressants contenus dans le nouveau Volume, nous citerons en particulier ce que Sylvester a écrit sur la règle célèbre énoncée par Newton dans l'Arithmétique universelle et qui fait connaître une limite supérieure du nombre des racines imaginaires d'une équation algébrique, comme celle de Descartes fait connaître une limite supérieure du nombre des racines réelles, soit positives, soit négatives. Newton l'avait laissée sans

démonstration ; Maclaurin, Campbell, Waring avaient fait des efforts infructueux pour l'établir. Sylvester lui-même, dans un premier essai, avait dû se borner aux équations des sept premiers degrés. C'est en imitant la méthode célèbre que Fourier avait donnée, pour la démonstration de son célèbre théorème, bien injustement attribué à Budan, que Sylvester a pu enfin vaincre toutes les difficultés. Si nos souvenirs sont précis, le succès obtenu par Sylvester dans l'étude de cette belle question avait eu beaucoup de retentissement en Angleterre. Le *Times* en avait parlé; avec grande raison, nos voisins ne négligent rien de tout ce qui touche à la gloire de Newton.

A côté de ce beau travail d'Algèbre pure, on remarquera les études d'un caractère tout différent consacrées à ce que Sylvester appelait *l'involution de six lignes dans l'espace* (nous dirions aujourd'hui *six droites appartenant à un même complexe linéaire*), sur une classe nouvelle d'équations différentielles que nous avons rencontrées de notre côté sans savoir qu'elles avaient déjà été étudiées par Sylvester, sur la rotation d'un corps solide et la représentation que Poinsot en a donnée par le roulement d'un ellipsoïde, sur les 27 droites d'une surface cubique, etc. L'éditeur a eu raison de ne pas négliger les conférences, les morceaux de haut goût où Sylvester a eu l'occasion de nous faire connaître ses idées sur les Mathématiques, par exemple l'adresse présidentielle qu'il a lue en 1869 devant la British Association, celui aussi qui porte le titre suivant : *On the incorrect description of Kants's doctrine of space and time common in english writers*. Dans les Notes qui terminent le Volume, nous citerons également la suivante. Faisant allusion à un passage de son adresse où il cite Lagrange comme ayant signalé toute l'importance de l'*observation* en Mathématiques, Sylvester s'exprime en ces termes :

« I was under the conviction that a passage to that effect from Lagrange had been cited to me some years ago by M. Hermite of the Institute of France, on applying to him on the subject, I received the following reply » :

« Relativement à l'opinion que, suivant vous, j'aurais attribuée à Lagrange, je m'empresse de vous informer qu'il ne faut aucunement, à ma connaissance, l'en rendre responsable. Nous nous sommes entretenus du rôle de la *faculté d'observer dans les études*

que nous avons poursuivies de concert pendant bien des années; et c'est alors sans doute que je vous aurai conté une anecdote que je tiens de M. Chevreul. M. Chevreul, allant à l'Institut dans la voiture de Lagrange, a été vivement frappé du sentiment de plaisir avec lequel ce grand géomètre lui faisait voir, dans un travail manuscrit, la beauté extérieure et artistique, si je peux dire, des nombreuses formules qui y figuraient. Ce sentiment, nous l'avons tous éprouvé en faisant avec sincérité abstraction de l'idée analytique dont les formules sont l'expression écrite. Il y a là, n'est-il pas vrai, un imperceptible lien qui rattache au monde de l'art le monde abstrait de l'Algèbre et de l'Analyse, et j'oserais même vous dire que je crois à des sympathies réelles qui vous font trouver un charme dans les notations d'un auteur et à des répulsions qui éloignent d'un autre par la seule apparence des formules. »

Et Sylvester ajoute :

« I am, however, none the less persuaded that on one or more than one occasion, M. Hermite, speaking of Lagrange, expressed to me, if note as I supposed on Lagrange's, theyn certainey on his own high autority « that the faculty of observation was no less » necessary for the successfull cultivation of the pure mathematical » than of the natural Sciences. » *I am glad also to notice that Lagrange was able to accommodate a friend* DANS SA VOITURE. *England has much to learn from France and Russia as to the proper mode of treating its greatest men.* » G. D.

TEIXEIRA (G.) — OBRAS SOBRE MATEMATICA, PUBLICADAS POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÈS. Tome IV. In-4°, XI-397 pages. Coimbra, 1908.

Ce quatrième Volume des Œuvres mathématiques de M. G. Teixeira contient la traduction revue et très augmentée de la première partie du Mémoire présenté à l'Académie de Madrid, et couronné par elle, en réponse au programme suivant : *Catalogue méthodique de toutes les courbes d'une classe quelconque ayant reçu un nom spécial, avec une idée succincte de la forme des équations et des propriétés générales de chacune d'elles, et une*

Notice des ouvrages ou des auteurs qui en ont fait la première mention.

Cette première partie se rapporte aux courbes algébriques planes; les cubiques et les quartiques, en particulier les cubiques circulaires et les quartiques bicirculaires, y tiennent la plus grande place. Un autre Volume sera consacré aux courbes transcendantes.

L'auteur a voulu traiter son sujet d'une façon aussi élémentaire que possible. Il semble bien qu'il ait eu raison; l'étude des courbes particulières est une initiation très utile, d'autant qu'on a affaire à des propriétés précises. L'auteur a donc eu un sens fort juste de la classe des lecteurs auxquels il devait s'adresser. Bien entendu, le caractère élémentaire des démonstrations n'en exclut pas l'élégance. On s'émerveillera, en feuilletant le Livre de M. Teixeira, du nombre et de l'intérêt des propriétés qu'il a réunies et de la multitude des renseignements bibliographiques et historiques qu'il a su rassembler. J. T.

DURÈGE (H.) — THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN in fünfter Auflage neu bearbeitet von *L. Maurer*. 1 volume in-8°, 434 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

Le *Bulletin* (¹) a dit dans quel esprit M. Maurer a rajeuni ou renouvelé le Livre de Durège sur la théorie des fonctions. Il vient de faire le même travail sur les fonctions elliptiques du même auteur. Ici encore c'est un Livre nouveau, placé sous l'invocation de Durège, que nous donne M. Maurer. On y retrouvera les mêmes qualités que dans les *Elemente der Theorie der Funktionen;* toutefois l'auteur a cru, avec raison, pouvoir condenser davantage l'exposition dans ce Livre qui s'adresse à des étudiants plus avancés: il a su faire tenir beaucoup de choses dans ce nouveau Volume.

Son point de départ est dans la théorie des *intégrales elliptiques* qu'il étudie d'abord d'une façon élémentaire en montrant comment elles se ramènent aux formes normales de Weierstrass, de Riemann et de Legendre, comment elles conduisent aux *fonctions*

(¹) T. XXXI, p. 35.

elliptiques, comment s'introduisent ainsi le théorème d'addition et le problème de la transformation.

Il définit ensuite la surface de Riemann appropriée, celle en particulier qui se rapporte à la forme de Weierstrass; l'étude des fonctions rationnelles sur cette surface et de leurs intégrales amène ensuite les propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques. L'auteur a soin d'introduire les fonctions de Weierstrass et celles de Jacobi et d'en montrer les relations.

M. Maurer reconnaît que la marche qui consiste à partir des fonctions doublement périodiques est plus courte; mais celle qu'il a adoptée a l'avantage d'être plus conforme à l'histoire et d'habituer le lecteur au maniement des surfaces de Riemann. Ces avantages ne sont pas contestables; l'auteur avait d'autant plus le droit de suivre la marche qu'il a adoptée qu'il avait donné, dans sa théorie des fonctions, la définition et la représentation des fonctions doublement périodiques. Lorsqu'une théorie a été aussi fouillée dans tous les sens que celle des fonctions elliptiques, on sait l'aborder et la développer par des voies très différentes : il est très désirable, pour celui qui veut s'y initier, de pouvoir se placer à différents points de vue et de reconnaître comment se déroulent alors les propositions essentielles.

Un Chapitre est consacré à quelques-unes des belles applications de la théorie : courbes du troisième ordre, surface de l'ellipsoïde, distribution de l'électricité sur un ellipsoïde, potentiel, pendule sphérique, rotation d'un corps solide autour de son centre de gravité, etc.

M. Maurer expose ensuite ce qu'il est nécessaire au lecteur de savoir sur la théorie de Galois, pour comprendre l'intérêt qu s'attache aux équations algébriques qui proviennent de la transformation, de la division de l'argument ou des périodes. Le Chapitre qui traite de ces équations se termine par quelques indications sur la multiplication complexe. Enfin le dernier Chapitre est consacré aux fonctions modulaires.

Un court Tableau, que l'auteur a su limiter à huit pages, contient les formules les plus essentielles de la théorie des fonctions elliptiques. J. T.

MÉLANGES.

L'AVENIR DES MATHÉMATIQUES [1];

PAR M. H. POINCARÉ.

Pour prévoir l'avenir des Mathématiques la vraie méthode est d'étudier leur histoire et leur état présent.

N'est-ce pas là, pour nous autres mathématiciens, un procédé en quelque sorte professionnel? Nous sommes accoutumés à *extrapoler,* ce qui est un moyen de déduire l'avenir du passé et du présent, et, comme nous savons bien ce qu'il vaut, nous ne risquons pas de nous faire illusion sur la portée des résultats qu'il nous donne.

Il y a eu autrefois des prophètes de malheur. Ils répétaient volontiers que tous les problèmes susceptibles d'être résolus l'avaient été déjà, et qu'après eux il n'y aurait plus qu'à glaner. Heureusement l'exemple du passé nous rassure. Bien des fois déjà on a cru avoir résolu tous les problèmes, ou tout au moins avoir fait l'inventaire de ceux qui comportent une solution. Et puis le sens du mot solution s'est élargi, les problèmes insolubles sont devenus les plus intéressants de tous et d'autres problèmes se sont posés auxquels on n'avait pas songé. Pour les Grecs, une bonne solution était celle qui n'emploie que la règle et le compas; ensuite, cela a été celle qu'on obtient par l'extraction de radicaux, puis celle où ne figurent que des fonctions algébriques ou logarithmiques. Les pessimistes

---

[1] Conférence lue dans la séance générale du 10 avril 1908 du IVe Congrès international des Mathématiciens (Rome, 6-11 avril 1908) et publiée précédemment en brochure par les soins et aux frais du Cercle mathématique de Palerme. — M. Poincaré n'ayant pu lire cette Conférence par suite d'une indisposition, heureusement passagère, c'est M. Darboux qui a bien voulu se charger d'en donner lecture. (*Note de la Rédaction.*)

se trouvaient ainsi toujours débordés, toujours forcés de reculer, de sorte qu'à présent je crois bien qu'il n'y en a plus.

Mon intention n'est donc pas de les combattre, puisqu'ils sont morts; nous savons bien que les Mathématiques continueront à se développer, mais il s'agit de savoir dans quel sens. On me répondra « dans tous les sens » et cela est vrai en partie; mais, si cela était tout à fait vrai, cela deviendrait un peu effrayant. Nos richesses ne tarderaient pas à devenir encombrantes et leur accumulation produirait un fatras aussi impénétrable que l'était pour l'ignorant la vérité inconnue.

L'historien, le physicien lui-même, doivent faire un choix entre les faits; le cerveau du savant, qui n'est qu'un coin de l'univers, ne pourra jamais contenir l'univers tout entier; de sorte que, parmi les faits innombrables que la nature nous offre, il en est qu'on laissera de côté et d'autres qu'on retiendra. Il en est de même, *a fortiori,* en Mathématiques; le mathématicien, lui non plus, ne peut conserver pêle-mêle tous les faits qui se présentent à lui; d'autant plus que ces faits c'est lui, j'allais dire c'est son caprice, qui les crée. C'est lui qui construit de toutes pièces une combinaison nouvelle en en rapprochant les éléments; ce n'est pas en géneral la nature qui la lui apporte toute faite.

Sans doute il arrive quelquefois que le mathématicien aborde un problème pour satisfaire à un besoin de la Physique, que le physicien ou l'ingénieur lui demandent de calculer un nombre en vue d'une application. Dira-t-on que, nous autres géomètres, nous devons nous borner à attendre les commandes et, au lieu de cultiver notre science pour notre plaisir, n'avoir d'autre souci que de nous accommoder au goût de la clientèle? Si les Mathématiques n'ont d'autre objet que de venir en aide à ceux qui étudient la nature, c'est de ces derniers que nous devons attendre le mot d'ordre. Cette façon de voir est-elle légitime? Certainement non; si nous n'avions pas cultivé les sciences exactes pour elles-mêmes, nous n'aurions pas créé l'instrument mathématique et, le jour où serait venu le mot d'ordre du physicien, nous aurions été désarmés.

Les physiciens non plus n'attendent pas, pour étudier un phénomène, que quelque besoin urgent de la vie matérielle leur en ait fait une nécessité, et ils ont bien raison; si les savants du XVIIIe siècle avaient délaissé l'électricité, parce qu'elle n'aurait été à leurs yeux

qu'une curiosité sans intérêt pratique, nous n'aurions au XXe siècle ni télégraphie, ni électrochimie, ni électrotechnique. Les physiciens, forcés de choisir, ne sont donc pas guidés dans leur choix uniquement par l'utilité. Comment donc font-ils pour choisir entre les faits naturels? Nous pouvons le dire aisément : les faits qui les intéressent, ce sont ceux qui peuvent conduire à la découverte d'une loi ; ce sont donc ceux qui sont analogues à beaucoup d'autres faits, qui ne nous apparaissent pas comme isolés, mais comme étroitement groupés avec d'autres. Le fait isolé frappe tous les yeux, ceux du vulgaire comme ceux du savant. Mais ce que le vrai physicien seul sait voir, c'est le lien qui unit plusieurs faits dont l'analogie est profonde, mais cachée. L'anecdote de la pomme de Newton n'est probablement pas vraie, mais elle est symbolique ; parlons-en donc comme si elle était vraie. Eh bien, nous devons croire qu'avant Newton bien des hommes avaient vu tomber des pommes; aucun n'avait rien su en conclure. Les faits seraient stériles s'il n'y avait des esprits capables de choisir entre eux en discernant ceux derrière lesquels il se cache quelque chose et de reconnaître ce qui se cache derrière, des esprits qui sous le fait brut sentiront l'âme du fait.

En Mathématiques nous faisons tout à fait la même chose; des éléments variés dont nous disposons, nous pouvons faire sortir des millions de combinaisons différentes; mais une de ces combinaisons, tant qu'elle est isolée, est absolument dépourvue de valeur; nous nous sommes souvent donné beaucoup de peine pour la construire, mais cela ne sert absolument à rien, si ce n'est peut-être à donner un sujet de devoir pour l'enseignement secondaire. Il en sera tout autrement le jour où cette combinaison prendra place dans une classe de combinaisons analogues et où nous aurons remarqué cette analogie; nous ne serons plus en présence d'un fait, mais d'une loi. Et, ce jour-là, le véritable inventeur, ce ne sera pas l'ouvrier qui aura patiemment édifié quelques-unes de ces combinaisons, ce sera celui qui aura mis en évidence leur parenté. Le premier n'aura vu que le fait brut, l'autre seul aura senti l'âme du fait. Souvent, pour affirmer cette parenté, il lui aura suffi d'inventer un mot nouveau, et ce mot aura été créateur; l'histoire de la Science nous fournirait une foule d'exemples qui vous sont familiers.

Le célèbre philosophe viennois Mach a dit que le rôle de la Science est de produire l'économie de pensée, de même que la machine produit l'économie d'effort. Et cela est très juste. Le sauvage calcule avec ses doigts ou en assemblant de petits cailloux. En apprenant aux enfants la table de multiplication, nous leur épargnons pour plus tard d'innombrables manœuvres de cailloux. Quelqu'un autrefois a reconnu, avec des cailloux ou autrement, que 6 fois 7 font 42 et il a eu l'idée de noter le résultat, et c'est pour cela que nous n'avons pas besoin de recommencer. Celui-là n'a pas perdu son temps si même il ne calculait que pour son plaisir; son opération ne lui a pris que deux minutes, elle en aurait exigé en tout deux milliards, si un milliard d'hommes avait dû la recommencer après lui.

L'importance d'un fait se mesure donc à son rendement, c'est-à-dire à la quantité de pensée qu'elle nous permet d'économiser.

En Physique, les faits à grand rendement sont ceux qui rentrent dans une loi très générale, parce qu'ils permettent d'en prévoir un très grand nombre d'autres, et il n'en est pas autrement en Mathématiques. Je me suis livré à un calcul compliqué et je suis arrivé péniblement à un résultat; je ne serai pas payé de ma peine si je ne suis devenu par là capable de prévoir les résultats d'autres calculs analogues et de les diriger à coup sûr en évitant les tâtonnements auxquels j'ai dû me résigner la première fois. Je n'aurai pas perdu mon temps, au contraire, si ces tâtonnements mêmes ont fini par me révéler l'analogie profonde du problème que je viens de traiter avec une classe beaucoup plus étendue d'autres problèmes; s'ils m'en ont montré à la fois les ressemblances et les différences, si en un mot ils m'ont fait entrevoir la possibilité d'une généralisation. Ce n'est pas alors un résultat nouveau que j'aurai acquis, c'est une force nouvelle.

Une formule algébrique qui nous donne la solution d'un type de problèmes numériques, pourvu qu'on remplace à la fin les lettres par des nombres, est l'exemple simple qui se présente tout d'abord à l'esprit. Grâce à elle un seul calcul algébrique nous épargne la peine de recommencer sans cesse de nouveaux calculs numériques. Mais ce n'est là qu'un exemple grossier; tout le monde sent qu'il y a des analogies qui ne peuvent s'exprimer par une formule et qui sont les plus précieuses.

Si un résultat nouveau a du prix, c'est quand en reliant des éléments connus depuis longtemps, mais jusque-là épars et paraissant étrangers les uns aux autres, il introduit subitement l'ordre là où régnait l'apparence du désordre. Il nous permet alors de voir d'un coup d'œil chacun de ces éléments et la place qu'il occupe dans l'ensemble. Ce fait nouveau non seulement est précieux par lui-même, mais lui seul donne leur valeur à tous les faits anciens qu'il relie. Notre esprit est infirme comme le sont nos sens; il se perdrait dans la complexité du monde si cette complexité n'était harmonieuse, il n'en verrait que les détails à la façon d'un myope et il serait forcé d'oublier chacun de ces détails avant d'examiner le suivant, parce qu'il serait incapable de tout embrasser. Les seuls faits dignes de notre attention sont ceux qui introduisent de l'ordre dans cette complexité et la rendent aussi accessible.

Les mathématiciens attachent une grande importance à l'élégance de leurs méthodes et de leurs résultats; ce n'est pas là du pur dilettantisme. Qu'est-ce qui nous donne en effet dans une solution, dans une démonstration, le sentiment de l'élégance? C'est l'harmonie des diverses parties, leur symétrie, leur heureux balancement; c'est en un mot tout ce qui y met de l'ordre, tout ce qui leur donne de l'unité, ce qui nous permet par conséquent d'y voir clair et d'en comprendre l'ensemble en même temps que les détails. Mais, précisément, c'est là aussi ce qui lui donne un grand rendement; en effet, plus nous verrons cet ensemble clairement et d'un seul coup d'œil, mieux nous apercevrons ses analogies avec d'autres objets voisins, plus par conséquent nous aurons de chances de deviner les généralisations possibles. L'élégance peut provenir du sentiment de l'imprévu par la rencontre inattendue d'objets qu'on n'est pas accoutumé à rapprocher; là encore elle est féconde, puisqu'elle nous dévoile ainsi des parentés jusque-là méconnues; elle est féconde même quand elle ne résulte que du contraste entre la simplicité des moyens et la complexité du problème posé; elle nous fait alors réfléchir à la raison de ce contraste, et le plus souvent elle nous fait voir que cette raison n'est pas le hasard et qu'elle se trouve dans quelque loi insoupçonnée. En un mot, le sentiment de l'élégance mathématique n'est autre chose que la satisfaction due à je ne sais quelle adaptation entre la solution qu'on vient de découvrir et les besoins de notre esprit, et c'est à cause de cette adapta-

tion même que cette solution peut être pour nous un instrument. Cette satisfaction esthétique est par suite liée à l'économie de pensée. C'est ainsi que les cariatides de l'Erechthéion, par exemple, nous semblent élégantes parce qu'elles portent un lourd fardeau avec souplesse et pour ainsi dire allègrement et qu'elles nous donnent ainsi le sentiment de l'économie de l'effort.

C'est pour la même raison que, quand un calcul un peu long nous a conduits à quelque résultat simple et frappant, nous ne sommes pas satisfaits tant que nous n'avons pas montré que nous aurions *pu prévoir,* sinon ce résultat tout entier, du moins ses traits les plus caractéristiques. Pourquoi? Qu'est-ce qui nous empêche de nous contenter d'un calcul qui nous a appris, semble-t-il, tout ce que nous désirions savoir? C'est parce que, dans des cas analogues, le long calcul ne pourrait pas resservir, et qu'il n'en est pas de même du raisonnement souvent à demi intuitif qui aurait pu nous permettre de prévoir. Ce raisonnement étant court, on en voit d'un seul coup toutes les parties, de sorte qu'on aperçoit immédiatement ce qu'il y faut changer pour l'adapter à tous les problèmes de même nature qui peuvent se présenter. Et puisqu'il nous permet de prévoir si la solution de ces problèmes sera simple, il nous montre tout au moins si le calcul mérite d'être entrepris.

Ce que nous venons de dire suffit pour montrer combien il serait vain de chercher à remplacer par un procédé mécanique quelconque la libre initiative du mathématicien. Pour obtenir un résultat qui ait une valeur réelle, il ne suffit pas de moudre des calculs ou d'avoir une machine à mettre les choses en ordre; ce n'est pas seulement l'ordre, c'est l'ordre inattendu qui vaut quelque chose. La machine peut mordre sur le fait brut, l'âme du fait lui échappera toujours.

Depuis le milieu du siècle dernier, les mathématiciens sont de plus en plus soucieux d'atteindre à l'absolue rigueur; ils ont bien raison et cette tendance s'accentuera de plus en plus. En Mathématiques la rigueur n'est pas tout, mais sans elle il n'y a rien ; une démonstration qui n'est pas rigoureuse, c'est le néant. Je crois que personne ne contestera cette vérité. Mais si on la prenait trop à la lettre, on serait amené à conclure qu'avant 1820, par exemple, il n'y avait pas de Mathématiques; ce serait manifestement excessif; les géomètres de ce temps sous-entendaient volontiers ce que nous

expliquons par de prolixes discours; cela ne veut pas dire qu'ils ne le voyaient pas du tout; mais ils passaient là-dessus trop rapidement et, pour le bien voir, il aurait fallu qu'ils prissent la peine de le dire.

Seulement est-il toujours nécessaire de le dire tant de fois? ceux qui les premiers se sont préoccupés avant tout de la rigueur nous ont donné des raisonnements que nous pouvons essayer d'imiter; mais, si les démonstrations de l'avenir doivent être bâties sur ce modèle, les Traités de Mathématiques vont devenir bien longs; et si je crains les longueurs, ce n'est pas seulement parce que je redoute l'encombrement des bibliothèques, mais parce que je crains qu'en s'allongeant, nos démonstrations perdent cette apparence d'harmonie dont j'ai expliqué tout à l'heure le rôle utile.

C'est à l'économie de pensée qu'on doit viser, ce n'est donc pas assez de donner des modèles à imiter. Il faut qu'on puisse après nous se passer de ces modèles et, au lieu de répéter un raisonnement déjà fait, le résumer en quelques lignes. Et c'est à quoi l'on a déjà réussi quelquefois; par exemple, il y avait tout un type de raisonnements qui se ressemblaient tous et qu'on retrouvait partout; ils étaient parfaitement rigoureux, mais ils étaient longs. Un jour on a imaginé le mot d'*uniformité* de la convergence et ce mot seul les a rendus inutiles; on n'a plus eu besoin de les répéter, puisqu'on pouvait les sous-entendre. Les coupeurs de difficultés en quatre peuvent donc nous rendre un double service: c'est d'abord de nous apprendre à faire comme eux au besoin, mais c'est surtout de nous permettre le plus souvent possible de ne pas faire comme eux, sans pourtant rien sacrifier de la rigueur.

Nous venons de voir par un exemple quelle est l'importance des mots en Mathématiques, mais j'en pourrais citer beaucoup d'autres. On ne saurait croire combien un mot bien choisi peut économiser de pensée, comme disait Mach. Je ne sais si je n'ai pas déjà dit quelque part que la Mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il faut s'entendre. Il convient que ces choses, différentes par la matière, soient semblables par la forme, qu'elles puissent pour ainsi dire se couler dans le même moule. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux, on n'a rien à y

changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes.

Il y a un exemple qui se présente tout d'abord à l'esprit, ce sont les quaternions, sur lesquels je n'ai pas à insister. Un mot bien choisi suffit le plus souvent pour faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage; c'est pour cela qu'on a imaginé les quantités négatives, les quantités imaginaires, les points à l'infini, que sais-je encore? Et les exceptions, ne l'oublions pas, sont pernicieuses, parce qu'elles cachent les lois.

Eh bien, c'est l'un des caractères auxquels on reconnaît les faits à grand rendement, ce sont ceux qui permettent ces heureuses innovations de langage. Le fait brut est alors quelquefois sans grand intérêt, on a pu le signaler bien des fois sans avoir rendu grand service à la Science; il ne prend de valeur que le jour où un penseur mieux avisé aperçoit le rapprochement qu'il met en évidence et le symbolise par un mot.

Les physiciens d'ailleurs agissent absolument de même; ils ont inventé le mot d'*énergie*, et ce mot a été prodigieusement fécond, parce que lui aussi créait la loi en éliminant les exceptions, parce qu'il donnait le même nom à des choses différentes par la matière et semblables par la forme.

Parmi les mots qui ont exercé la plus heureuse influence, je signalerai ceux de *groupe* et d'*invariant*. Ils nous ont fait apercevoir l'essence de bien des raisonnements mathématiques; ils nous ont montré dans combien de cas les anciens mathématiciens considéraient des groupes sans le savoir, et comment, se croyant bien éloignés les uns des autres, ils se trouvaient tout à coup rapprochés sans comprendre pourquoi.

Nous dirions aujourd'hui qu'ils avaient envisagé des groupes isomorphes. Nous savons maintenant que dans un groupe la matière nous intéresse peu, que c'est la forme seule qui importe et que, quand on connaît bien un groupe, on connaît par cela même tous les groupes isomorphes; et grâce à ces mots de *groupe* et d'*isomorphisme* qui résument en quelques syllabes cette règle subtile et la rendent promptement familière à tous les esprits, le passage est immédiat et peut se faire en économisant tout effort de pensée. L'idée de groupe se rattache d'ailleurs à celle de transformation;

pourquoi attache-t-on tant de prix à l'invention d'une transformation nouvelle? parce que d'un seul théorème elle nous permet d'en tirer dix ou vingt; elle a la même valeur qu'un zéro ajouté à la droite d'un nombre entier.

Voilà ce qui a déterminé jusqu'ici le sens du mouvement de la Science mathématique, et c'est aussi bien certainement ce qui le déterminera dans l'avenir. Mais la nature des problèmes qui se posent y contribue également. Nous ne pouvons oublier quel doit être notre but; selon moi ce but est double; notre Science confine à la fois à la Philosophie et à la Physique, et c'est pour nos deux voisines que nous travaillons; aussi nous avons toujours vu et nous verrons encore les mathématiciens marcher dans deux directions opposées.

D'une part, la Science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créée, d'autant plus que c'est celle de ses créations pour laquelle il a fait le moins d'emprunts au dehors. C'est pourquoi certaines spéculations mathématiques sont utiles, comme celles qui visent l'étude des postulats, des géométries inaccoutumées, des fonctions à allures étranges. Plus ces spéculations s'écarteront des conceptions les plus communes, et par conséquent de la nature et des applications, mieux elles nous montreront ce que l'esprit humain peut faire, quand il se soustrait de plus en plus à la tyrannie du monde extérieur, mieux par conséquent elles nous le feront connaître en lui-même.

Mais c'est du côté opposé, du côté de la nature, qu'il faut diriger le gros de notre armée.

Là nous rencontrons le physicien ou l'ingénieur qui nous disent: « Pourriez-vous m'intégrer telle équation différentielle? j'en aurais besoin d'ici à huit jours en vue de telle construction qui doit être terminée pour telle date. — Cette équation, répondons-nous, ne rentre pas dans l'un des types intégrables vous savez qu'il n'y en a pas beaucoup. — Oui, je le sais, mais alors à quoi servez-vous? » Le plus souvent, il suffirait de s'entendre; l'ingénieur, en réalité, n'a pas besoin de l'intégrale en termes finis; il a besoin de connaître l'allure générale de la fonction intégrale, ou simplement il voudrait un certain chiffre qui se déduirait facilement de cette intégrale si on la connaissait. Ordinairement on ne la connaît pas, mais on

pourrait calculer ce chiffre sans elle, si l'on savait au juste de quel chiffre l'ingénieur a besoin et avec quelle approximation.

Autrefois on ne considérait une équation comme résolue que quand on avait exprimé la solution à l'aide d'un nombre fini de fonctions connues; mais cela n'est possible qu'une fois sur cent à peine. Ce que nous pouvons toujours faire, ou plutôt ce que nous devons toujours chercher à faire, c'est de résoudre le problème *qualitativement* pour ainsi dire, c'est-à-dire de chercher à connaître la forme générale de la courbe qui représente la fonction inconnue.

Il reste ensuite à trouver la solution quantitative du problème; mais, si l'inconnue ne peut être déterminée par un calcul fini, on peut la représenter toujours par une série infinie convergente qui permet de la calculer. Cela peut-il être regardé comme une vraie solution? On raconte que Newton communiqua à Leibnitz un anagramme à peu près comme ceci: *aaaaabbbbeeeeii*, etc. Leibnitz, naturellement, n'y comprit rien du tout; mais nous qui avons la clef, nous savons que cet anagramme veut dire, en le traduisant dans le langage moderne : Je sais intégrer toutes les équations différentielles, et nous sommes amenés à nous dire que Newton avait bien de la chance ou qu'il se faisait de singulières illusions. Il voulait dire tout simplement qu'il pouvait former (par la méthode des coefficients indéterminés) une série de puissances satisfaisant formellement à l'équation proposée.

Une semblable solution aujourd'hui ne nous satisferait plus, et cela pour deux raisons: parce que la convergence est trop lente, et parce que les termes se succèdent sans obéir à aucune loi. Au contraire, la série Θ nous paraît ne rien laisser à désirer, d'abord parce qu'elle converge très vite (cela, c'est pour le praticien qui désire avoir son nombre le plus promptement possible) et ensuite parce que nous apercevons d'un coup d'œil la loi des termes (cela, c'est pour satisfaire les besoins esthétiques du théoricien).

Mais alors il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a seulement des problèmes *plus ou moins* résolus, selon qu'ils le sont par une série de convergence plus ou moins rapide, ou régie par une loi plus ou moins harmonieuse. Il arrive toutefois qu'une solution imparfaite nous achemine vers une solution meilleure. Quelquefois la série est de convergence si lente que

le calcul est impraticable et qu'on n'a réussi qu'à démontrer la possibilité du problème.

Et alors l'ingénieur trouve cela dérisoire, et il a raison, puisque cela ne l'aidera pas à terminer sa construction pour la date fixée. Il se préoccupe peu de savoir si cela sera utile aux ingénieurs du XXIIe siècle ; nous, nous pensons autrement et nous sommes quelquefois plus heureux d'avoir économisé un jour de travail à nos petits-fils qu'une heure à nos contemporains.

Quelquefois en tâtonnant, empiriquement pour ainsi dire, nous arrivons à une formule suffisamment convergente. Que voulez-vous de plus? nous dit l'ingénieur ; et nous, malgré tout, nous ne sommes pas satisfaits ; nous aurions voulu *prévoir* cette convergence. Pourquoi ? parce que, si nous avions su la prévoir une fois, nous saurions la prévoir une autre fois. Nous avons réussi, c'est peu de chose à nos yeux si nous n'avons sérieusement l'espoir de recommencer.

A mesure que la Science se développe, il devient plus difficile de l'embrasser tout entière ; alors on cherche à la couper en morceaux, à se contenter de l'un de ces morceaux : en un mot, à se spécialiser. Si l'on continuait dans ce sens, ce serait un obstacle fâcheux aux progrès de la Science. Nous l'avons dit, c'est par des rapprochements inattendus entre ses diverses parties que ses progrès peuvent se faire. Trop se spécialiser, ce serait s'interdire ces rapprochements. Espérons que des Congrès comme celui-ci, en nous mettant en rapports les uns avec les autres, nous ouvriront des vues sur le champ du voisin, nous obligeront à le comparer au nôtre, à sortir un peu de notre petit village, et seront ainsi le meilleur remède au danger que je viens de signaler.

Mais je me suis trop attardé à des généralités, il est temps d'entrer dans le détail.

Passons en revue les diverses sciences particulières dont l'ensemble forme les Mathématiques ; voyons ce que chacune d'elles a fait, où elle tend et ce qu'on peut en espérer. Si les vues qui précèdent sont justes, nous devons voir que les grands progrès du passé se sont produits lorsque deux de ces sciences se sont rapprochées, lorsqu'on a pris conscience de la similitude de leur forme, malgré la dissemblance de leur matière, lorsqu'elles se sont modelées l'une sur l'autre, de telle façon que chacune d'elles puisse profiter des

conquêtes de l'autre. Nous devons en même temps entrevoir, dans des rapprochements du même genre, les progrès de l'avenir.

L'Arithmétique.

Les progrès de l'Arithmétique ont été plus lents que ceux de l'Algèbre et de l'Analyse, et il est aisé de comprendre pourquoi. Le sentiment de la continuité est un guide précieux qui fait défaut à l'arithméticien; chaque nombre entier est séparé des autres, il a pour ainsi dire son individualité propre; chacun d'eux est une sorte d'exception et c'est pourquoi les théorèmes généraux seront plus rares dans la théorie des nombres, c'est pourquoi aussi ceux qui existent seront plus cachés et échapperont plus longtemps aux chercheurs.

Si l'Arithmétique est en retard sur l'Algèbre et sur l'Analyse, ce qu'elle a de mieux à faire c'est de chercher à se modeler sur ces sciences afin de profiter de leur avance. L'arithméticien doit donc prendre pour guide les analogies avec l'Algèbre. Ces analogies sont nombreuses, et si, dans bien des cas, elles n'ont pas encore été étudiées d'assez près pour devenir utilisables, elles sont au moins pressenties depuis longtemps et le langage même des deux sciences montre qu'on les a aperçues. C'est ainsi qu'on parle de nombres transcendants et qu'on se rend compte ainsi que la classification future de ces nombres a déjà pour image la classification des fonctions transcendantes, et cependant on ne voit pas encore très bien comment on pourra passer d'une classification à l'autre; mais, si on l'avait vu, cela serait déjà fait, et ce ne serait plus l'œuvre de l'avenir.

Le premier exemple qui me vient à l'esprit est la théorie des congruences, où l'on trouve un parallélisme parfait avec celle des équations algébriques. Certainement on arrivera à compléter ce parallélisme, qui doit subsister par exemple entre la théorie des courbes algébriques et celle des congruences à deux variables. Et quand les problèmes relatifs aux congruences à plusieurs variables seront résolus, ce sera un premier pas vers la solution de beaucoup de questions d'analyse indéterminée.

Un autre exemple, où l'analogie toutefois n'a été aperçue qu'après coup, nous est fourni par la théorie des corps et des idéaux. Pour

en avoir la contre-partie, considérons les courbes tracées sur une surface; aux nombres existants correspondront les intersections complètes, aux idéaux les intersections incomplètes, aux idéaux premiers les courbes indécomposables; les diverses classes d'idéaux ont aussi leurs analogues.

Nul doute que cette analogie ne puisse éclairer la théorie des idéaux, ou celle des surfaces, ou peut-être toutes deux à la fois.

La théorie des formes, et en particulier celle des formes quadratiques, est intimement liée à celle des idéaux. Si parmi les théories arithmétiques elle a été l'une des premières à prendre figure, c'est quand on est parvenu à y introduire l'unité par la considération des groupes de transformations linéaires.

Ces transformations ont permis la classification et par conséquent l'introduction de l'ordre. Peut-être en a-t-on tiré tout le fruit qu'on en pouvait espérer; mais, si ces transformations linéaires sont les parentes des perspectives en Géométrie, la Géométrie analytique nous fournit bien d'autres transformations (comme par exemple les transformations birationnelles d'une courbe algébrique) dont on aura avantage à chercher les analogues arithmétiques. Celles-ci formeront sans aucun doute des groupes discontinus dont on devra d'abord étudier le domaine fondamental qui sera la clef de tout. Dans cette étude, je ne doute pas qu'on n'ait à se servir de la *Geometrie der Zahlen* de Minkowski.

Une idée dont on n'a pas encore tiré tout ce qu'elle contient, c'est l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres par Hermite. On sait maintenant ce qu'elle signifie. Prenons pour point de départ deux formes F et F′, la seconde quadratique définie, et appliquons-leur une même transformation; si la forme F′ transformée est réduite, on dira que la transformation est réduite, et aussi que la forme F transformée est réduite. Il en résulte que, si la forme F peut se transformer en elle-même, elle pourra avoir plusieurs réduites; mais cet inconvénient est essentiel et ne peut être évité par aucun détour; il n'empêche pas d'ailleurs que ces réduites ne permettent la classification des formes. Il est clair que cette idée, qui n'a été jusqu'ici appliquée qu'à des formes et à des transformations très particulières, peut être étendue à des groupes de transformations non linéaires, car elle a une portée beaucoup plus grande et n'a pas été épuisée.

Un domaine arithmétique où l'unité semble faire absolument défaut, c'est la théorie des nombres premiers; on n'a trouvé que des lois asymptotiques et l'on n'en doit pas espérer d'autres; mais ces lois sont isolées et l'on n'y peut parvenir que par des chemins différents qui ne semblent pas pouvoir communiquer entre eux. Je crois entrevoir d'où sortira l'unité souhaitée, mais je ne l'entrevois que bien vaguement; tout se ramènera sans doute à l'étude d'une famille de fonctions transcendantes qui permettront, par l'étude de leurs points singuliers et l'application de la méthode de M. Darboux, de calculer asymptotiquement certaines fonctions de très grands nombres.

L'Algèbre.

La théorie des équations algébriques retiendra encore longtemps l'attention des géomètres; les côtés par où l'on peut l'aborder sont nombreux et divers; le plus important est certainement la théorie des groupes, sur laquelle nous reviendrons. Mais il y a aussi la question du calcul numérique des racines et celle de la discussion du nombre des racines réelles. Laguerre a montré que tout n'était pas dit sur ce point avec Sturm. Il y a lieu d'étudier un système d'invariants ne changeant pas de signe quand le nombre des racines réelles reste le même. On peut aussi former des séries de puissances représentant des fonctions qui admettront pour points singuliers les diverses racines d'une équation algébrique (par exemple des fonctions rationnelles dont le dénominateur est le premier membre de cette équation); les coefficients des termes d'ordre élevé nous fourniront l'une des racines avec une approximation plus ou moins grande; il y a là le germe d'un procédé de calcul numérique dont on pourra faire une étude systématique.

Il y a une quarantaine d'années, c'était l'étude des invariants des formes algébriques qui semblait absorber l'Algèbre entière; elle est aujourd'hui délaissée; la matière cependant n'est pas épuisée; seulement il faut l'étendre, en ne se bornant plus par exemple aux invariants relatifs aux transformations linéaires, mais en abordant ceux qui se rapportent à un groupe quelconque. Les théorèmes anciennement acquis nous en suggéreront ainsi d'autres plus généraux

qui viendront se grouper autour d'eux, de même qu'un cristal se nourrit dans une solution. Et quant à ce théorème de Gordan que le nombre des invariants distincts est limité, et dont Hilbert a si heureusement simplifié la démonstration, il me semble qu'il nous conduit à nous poser une question beaucoup plus générale; si l'on a une infinité de polynomes entiers, dépendant algébriquement d'un nombre fini d'entre eux, peut-on toujours les déduire par addition et multiplication d'un nombre fini d'entre eux?

Il ne faut pas croire que l'Algèbre soit terminée parce qu'elle nous fournit des règles pour former toutes les combinaisons possibles; il reste à chercher les combinaisons intéressantes, celles qui satisfont à telle ou telle condition. Ainsi se constituera une sorte d'analyse indéterminée où les inconnues ne seront plus des nombres entiers, mais des polynomes. C'est alors cette fois l'Algèbre qui prendra modèle sur l'Arithmétique, en se guidant sur l'analogie du nombre entier, soit avec le polynome entier à coefficients quelconques, soit avec le polynome entier à coefficients entiers.

Les équations différentielles.

On a déjà beaucoup fait pour les équations différentielles linéaires et il ne reste qu'à parfaire ce qui est commencé. Mais, en ce qui concerne les équations différentielles non linéaires, on est beaucoup moins avancé. L'espoir d'une intégration à l'aide des fonctions connues est perdu depuis longtemps; il faut donc étudier pour elles-mêmes les fonctions définies par ces équations différentielles et d'abord tenter une classification systématique de ces fonctions; l'étude du mode de croissance dans le voisinage des points singuliers fournira sans doute les premiers éléments de cette classification, mais nous ne serons satisfaits que quand on aura trouvé un certain groupe de transformations (par exemple de transformations de Cremona) qui jouera par rapport aux équations différentielles le même rôle que le groupe des transformations birationnelles pour les courbes algébriques. Nous pourrons alors ranger dans une même classe toutes les transformées d'une même équation. Nous aurons encore pour guide l'analogie avec une théorie déjà faite, celle des transformations birationnelles et du genre d'une courbe algébrique.

On peut se proposer de ramener l'étude de ces fonctions à celle des fonctions uniformes, et cela de deux manières : on sait que $y = f(x)$; on peut, quelle que soit la fonction $f(x)$, exprimer y et x par les fonctions uniformes d'une variable auxiliaire t; mais, si $f(x)$ est la solution d'une équation différentielle, dans quel cas les fonctions uniformes auxiliaires satisferont-elles elles-mêmes à des équations différentielles? Nous ne savons pas non plus dans quels cas l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$F(x, y) = \text{constante arbitraire},$$

$F(x, y)$ étant uniforme.

J'insisterai sur la discussion qualitative des courbes définies par une équation différentielle. Dans le cas le plus simple, celui où l'équation est du premier ordre et du premier degré, cette discussion se ramène à la détermination du nombre des cycles limites. Elle est très délicate et ce qui peut nous la faciliter, c'est l'analogie avec la recherche du nombre des racines réelles d'une équation algébrique; quand un fait quelconque pourra mettre en évidence la nature de cette analogie, nous serons certains d'avance qu'il sera fécond.

Les équations aux dérivées partielles.

Notre connaissance des équations aux dérivées partielles a fait récemment un progrès considérable par suite des découvertes de M. Fredholm. Or, si l'on examine de près l'essence de ces découvertes, on voit qu'elles ont consisté à modeler cette théorie difficile sur une autre beaucoup plus simple, celle des déterminants et des systèmes d'équations du premier degré. Dans la plupart des problèmes de Physique mathématique, les équations à intégrer sont linéaires; elles servent à déterminer des fonctions inconnues de plusieurs variables et ces fonctions sont continues. Pourquoi? parce que nous avons écrit les équations en regardant la matière comme continue. Mais la matière n'est pas continue, elle est formée d'atomes, et, si nous avions voulu écrire les équations comme l'aurait fait un observateur de vue assez perçante pour voir les atomes, nous n'aurions pas eu un petit nombre d'équations *différentielles* servant à déterminer certaines *fonctions* inconnues,

nous aurions eu un grand nombre d'équations *algébriques* servant à déterminer un grand nombre de *constantes* inconnues. Et ces équations algébriques auraient été linéaires, de sorte qu'on aurait pu, avec une patience infinie, leur appliquer directement la méthode des déterminants.

Mais comme la brièveté de notre vie ne nous permet pas le luxe d'une patience infinie, il faut procéder autrement, il faut passer à la limite en supposant la matière continue. Il y a deux manières de généraliser la théorie des équations du premier degré, en passant à la limite. On peut considérer une infinité d'équations discrètes, avec une infinité, également discrète, d'inconnues. C'est par exemple ce qu'a fait Hill dans sa théorie de la Lune. On a alors des déterminants infinis qui sont aux déterminants ordinaires ce que les séries sont aux sommes finies.

On peut prendre une équation aux dérivées partielles, représentant pour ainsi dire une infinité continue d'équations, et s'en servir pour déterminer uue fonction inconnue, représentant une infinité continue d'inconnues. On a alors d'autres déterminants infinis, qui sont aux déterminants ordinaires ce que les intégrales sont aux sommes finies. C'est là ce qu'a fait Fredholm ; son succès provient d'ailleurs du fait suivant : si dans un déterminant les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, et que les autres éléments soient considérés comme homogènes de premier ordre, on peut ordonner le développement du déterminant en réunissant en un seul groupe l'ensemble des termes homogènes de même degré. Le déterminant infini de Fredhlom se prêtait à cette façon d'ordonner et il est arrivé qu'on obtenait ainsi une série convergente

Cette analogie, qui a certainement guidé Fredholm, a-t-elle ainsi donné tout ce qu'elle doit donner? Certainement non ; si le succès vient de la forme linéaire des équations, on doit pouvoir appliquer des idées du même genre à tous les problèmes relatifs à des équations de forme linéaire, et même aux équations différentielles ordinaires, puisque leur intégration peut toujours se ramener à celle d'une équation *linéaire* aux dérivées partielles du premier ordre.

On a abordé il y a quelque temps le problème de Dirichlet et les autres problèmes connexes par un autre moyen, en revenant à

l'idée primitive de Dirichlet et en cherchant le minimum d'une intégrale définie, mais cette fois par des procédés rigoureux. Je ne doute pas qu'on arrive sans grande difficulté à rapprocher les deux méthodes l'une de l'autre, à se rendre compte de leurs rapports mutuels, et je ne doute pas non plus que l'une et l'autre n'ait beaucoup à y gagner. Grâce à M. Hilbert qui a été doublement initiateur, on marche dans cette voie.

Les fonctions abéliennes.

On sait quelle est la principale question qu'il nous reste à résoudre en ce qui concerne les fonctions abéliennes. Les fonctions abéliennes engendrées par les intégrales relatives à une courbe algébrique ne sont pas les plus générales ; elles ne sont qu'un cas particulier, et c'est ce qu'on peut appeler les fonctions abéliennes spéciales. Quels sont leurs rapports avec les fonctions générales et comment peut-on classer ces dernières? Il y a peu de temps encore la solution semblait bien lointaine. Je considère aujourd'hui le problème comme virtuellement résolu, depuis que MM. Castelnuovo et Enriques ont publié leur récent Mémoire sur les intégrales de différentielles totales des variétés à plus de deux dimensions. Nous savons maintenant qu'il y a des fonctions abéliennes attachées à une courbe et d'autres à une surface, et qu'il ne sera jamais nécessaire de s'élever jusqu'aux variétés de plus de deux dimensions. En combinant cette donnée avec celles qui résultent des travaux de M. Wirtinger, on viendra sans doute à bout de toutes les difficultés.

Théorie des fonctions.

C'est surtout des fonctions de deux et de plusieurs variables que je voudrais parler. L'analogie avec les fonctions d'une seule variable est un guide précieux, mais insuffisant; il y a entre les deux sortes de fonctions une différence essentielle, et toutes les fois qu'on tente une généralisation en passant des unes aux autres, on rencontre un obstacle inattendu dont on a parfois triomphé par des artifices spéciaux, mais qui souvent aussi est demeuré jusqu'ici infranchissable. Nous devons donc rechercher les faits qui sont de nature à nous éclairer sur l'essence de cette différence entre les

fonctions d'une variable et celles qui en contiennent plusieurs. Il faudra d'abord regarder de près les artifices qui ont réussi dans certains cas particuliers, afin de voir ce qu'ils peuvent avoir de commun. Pourquoi la représentation conforme est-elle le plus souvent impossible dans un domaine à quatre dimensions et que faut-il mettre à la place? La véritable généralisation des fonctions à une variable n'est-elle pas dans les fonctions harmoniques à quatre variables, dont les parties réelles des fonctions de deux variables ne sont que des cas particuliers? Pourra-t-on tirer parti pour l'étude des fonctions transcendantes à plusieurs variables de ce qu'on sait des fonctions algébriques ou rationnelles, ou, en d'autres termes, dans quel sens peut-on dire que les fonctions transcendantes à deux variables sont aux fonctions transcendantes à une variable ce que les fonctions rationnelles à deux variables sont aux fonctions rationnelles à une variable?

Est-il vrai que, si $z = f(x, y)$, on peut, quelle que soit la fonction f, exprimer à la fois x, y, z en fonctions uniformes de deux variables auxiliaires, ou, pour employer une expression qui commence à être consacrée par l'usage, peut-on *uniformiser* les fonctions de deux variables, comme on uniformise les fonctions d'une variable? Je me borne à poser la question, dont un avenir prochain nous donnera peut-être la solution.

Théorie des groupes.

La théorie des groupes est un sujet étendu sur lequel il y aurait beaucoup à dire.

Il y a bien des sortes de groupes, et, quelle que soit la classification adoptée, on en trouve toujours de nouveaux qui n'y rentrent pas. Je veux me borner et je ne parlerai ici que des groupes continus de Lie et des groupes discontinus de Galois, qu'on a coutume de qualifier, les uns et les autres, de groupes d'ordre fini, quoique le mot n'ait pas tout à fait le même sens pour les uns et pour les autres.

Dans la théorie des groupes de Lie, on est guidé par une analogie spéciale; une transformation finie est le résultat de la combinaison d'une infinité de transformations infinitésimales. Le cas le plus simple est celui où ces transformations infinitésimales se

réduisent à une multiplication par $1+\varepsilon$, ε étant très petit. La répétition de ces transformations engendre alors la fonction exponentielle; c'est comme cela que Neper y est arrivé. Nous savons que la fonction exponentielle peut-être représentée par une série très simple et très convergente, et l'analogie peut alors nous montrer la voie à suivre. Cette analogie peut d'ailleurs être exprimée par un symbolisme spécial, sur lequel vous m'excuserez de ne pas insister ici. On est déjà très avancé grâce à Lie, Killing et Cartan; il ne reste plus qu'à simplifier les démonstrations, coordonner et classifier les résultats.

L'étude des groupes de Galois est beaucoup moins avancée; et cela s'explique; c'est pour la même raison que l'Arithmétique est moins avancée que l'Analyse, car la continuité a donné de grandes facilités dont on a su profiter. Mais heureusement il y a entre les deux théories un parallélisme manifeste et l'on devra s'efforcer de le mettre de mieux en mieux en évidence. L'analogie est tout à fait pareille à celle que nous avons signalée entre l'Arithmétique et l'Algèbre, et l'on en pourra tirer le même parti.

La Géométrie.

Il semble que la Géométrie ne puisse rien contenir qui ne soit déjà dans l'Algèbre ou dans l'Analyse, que les faits géométriques ne soient autre chose que les faits algébriques ou analytiques exprimés dans un autre langage. On pourrait donc croire qu'après la revue que nous venons de passer, il ne nous restera plus rien à dire qui se rapporte spécialement à la Géométrie. Ce serait méconnaître l'importance même d'un langage bien fait, ne pas comprendre ce qu'ajoute aux choses elles-mêmes la façon d'exprimer ces choses et par conséquent de les grouper.

D'abord les considérations géométriques nous amènent à nous poser de nouveaux problèmes; ce sont bien, si l'on veut, des problèmes analytiques, mais que nous ne nous serions jamais posés à propos d'Analyse. L'Analyse en profite cependant comme elle profite de ceux qu'elle est obligée de résoudre pour satisfaire aux besoins de la Physique.

Un grand avantage de la Géométrie, c'est précisément que les

sens y peuvent venir au secours de l'intelligence et aident à deviner la route à suivre, et bien des esprits préfèrent ramener les problèmes d'Analyse à la forme géométrique. Malheureusement nos sens ne peuvent nous mener bien loin, et ils nous faussent compagnie dès que nous voulons nous envoler en dehors des trois dimensions classiques. Est-ce à dire que, sortis de ce domaine restreint où ils semblent vouloir nous enfermer, nous ne devons plus compter que sur l'Analyse pure et que toute Géométrie à plus de trois dimensions est vaine et sans objet? Dans la génération qui nous a précédés, les plus grands maîtres auraient répondu « oui »; nous sommes aujourd'hui tellement familiarisés avec cette notion, que nous pouvons en parler, même dans un cours d'université, sans provoquer trop d'étonnement.

Mais à quoi peut-elle servir? Il est aisé de le voir : elle nous donne d'abord un langage très commode, qui exprime en termes très concis ce que le langage analytique ordinaire dirait en phrases prolixes. De plus, ce langage nous fait nommer du même nom ce qui se ressemble et affirme des analogies qu'il ne nous permet plus d'oublier. Il nous permet donc encore de nous diriger dans cet espace qui est trop grand pour nous et que nous ne pouvons voir, en nous rappelant sans cesse l'espace visible qui n'en est qu'une image imparfaite sans doute, mais qui en est encore une image. Ici encore, comme dans tous les exemples précédents, c'est l'analogie avec ce qui est simple qui nous permet de comprendre ce qui est complexe.

Cette Géométrie à plus de trois dimensions n'est pas une simple Géométrie analytique, elle n'est pas purement quantitative, elle est aussi qualitative et c'est par là surtout qu'elle devient intéressante. L'importance de l'*Analysis Situs* est énorme et je ne saurais trop y insister; le parti qu'en a tiré Riemann, l'un de ses principaux créateurs, suffirait à le démontrer. Il faut qu'on arrive à la construire complètement dans les espaces supérieurs; on aura alors un instrument qui permettra réellement de voir dans l'hyperespace et de suppléer à nos sens.

Les problèmes de l'*Analysis Situs* ne se seraient peut-être pas posés si l'on n'avait parlé que le langage analytique; ou plutôt, je me trompe, ils se seraient posés certainement, puisque leur solution est nécessaire à une foule de questions d'Analyse; mais ils se

seraient posés isolément, les uns après les autres, et sans qu'on puisse apercevoir leur lien commun.

Ce qui a surtout contribué aux récents progrès de la Géométrie, c'est l'introduction de la notion de transformations et de groupes. C'est grâce à elle que la Géométrie n'est plus un assemblage de théorèmes plus ou moins curieux qui se succèdent et ne se ressemblent pas, mais qu'elle a conquis une unité. Et d'un autre côté, l'histoire des Sciences ne doit pas oublier que c'est à propos de Géométrie qu'on a commencé à étudier systématiquement les transformations continues, de sorte que les géomètres purs ont contribué pour leur part au développement de l'idée de groupe, si utile aux branches des Mathématiques.

L'étude des groupes de points sur une courbe algébrique, à la façon de Brill et Noether, nous donnera encore des résultats utiles, soit directement, soit en servant de modèle à d'autres théories analogues. C'est ainsi que nous voyons se développer tout un Chapitre de la Géométrie, où les courbes tracées sur une surface jouent un rôle semblable à celui des groupes de points sur une courbe. Par là, on peut dès aujourd'hui espérer que vont s'éclaircir les derniers mystères qui se rapportent à l'étude des surfaces et qui paraissaient si tenaces.

Les géomètres ont donc un vaste champ à moissonner, et je n'ai garde d'oublier la Géométrie énumérative et surtout la Géométrie infinitésimale, cultivée avec tant d'éclat par M. Darboux, et à laquelle M. Bianchi a apporté tant de contributions utiles. Si je ne m'étends pas davantage sur ce sujet, c'est que je n'aurais plus rien à vous apprendre après la brillante Conférence de M. Darboux.

Le cantorisme.

J'ai parlé plus haut du besoin que nous avons de remonter sans cesse aux premiers principes de notre Science et du profit qu'en peut tirer l'étude de l'esprit humain. C'est ce besoin qui a inspiré deux tentatives qui ont tenu une très grande place dans l'histoire la plus récente des Mathématiques. La première est le Cantorisme, qui a rendu à la Science les services que l'on sait. Un des traits caractéristiques du cantorisme, c'est qu'au lieu de s'élever au général en bâtissant des constructions de plus en plus compliquées,

et de finir par construction, il part du *genus supremum* et ne définit, comme auraient dit les scholastiques, que *per genus proximum et differentiam specificam*. De là l'horreur qu'il a quelque temps inspirée à certains esprits, à Hermite par exemple, dont l'idée favorite était de comparer les Sciences mathématiques aux Sciences naturelles. Chez la plupart d'entre nous ces préventions s'étaient dissipées, mais il est arrivé qu'on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes, qui auraient comblé de joie Zénon d'Élée et l'école de Mégare. Et alors chacun de chercher le remède. Je pense pour mon compte, et je ne suis pas le seul, que l'important c'est de ne jamais introduire que des êtres qu'on puisse définir complètement en un nombre fini de mots. Quel que soit le remède adopté, nous pouvons nous promettre la joie du médecin appelé à suivre un beau cas pathologique.

La recherche des postulats.

On s'est efforcé, d'autre part, d'énumérer les axiomes et les postulats plus ou moins dissimulés qui servent de fondement aux diverses théories mathématiques. M. Hilbert a obtenu les résultats les plus brillants. Il semble d'abord que ce domaine soit bien limité et qu'il n'y ait plus rien à y faire quand l'inventaire sera terminé, ce qui ne saurait tarder. Mais, quand on aura tout énuméré, il y aura bien des manières de tout classer; un bon bibliothécaire trouve toujours à s'occuper, et chaque classification nouvelle sera instructive pour le philosophe.

J'arrête cette revue, que je ne saurais songer à rendre complète pour une foule de raisons, et d'abord parce que j'ai déjà trop abusé de votre attention. Je pense que ces exemples auront suffi pour vous montrer par quel mécanisme les Sciences mathématiques ont progressé dans le passé, et dans quel sens elles doivent marcher dans l'avenir.

CORRESPONDANCE.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. RAFFY.

M. Bounitzky a publié récemment dans le *Bulletin* (t. XXXI, 1907, p. 250) un intéressant article qu'il intitule : *Sur les solutions singulières des équations de Raffy*. Quand ce travail a paru, j'ignorais que les équations auxquelles il se rapporte et que j'avais considérées en 1897 (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXV) eussent été signalées avant cette époque.

Je vois dans le *Bulletin* de 1908 (IIe Partie, p. 7) qu'elles ont été étudiées par M. Dixon dans les *Philosophical Transactions of the R. Society of London* pour l'année 1895 (t. CLXXXVI, A, Part I, publié en 1896). La priorité de M. Dixon n'est donc pas douteuse. L. R.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ARRHENIUS (Svante). — *Worlds in the making. The evolution of the Universe*. In-8°, 244 p. avec fig. London, Harper. 6 sh.

BOURGEOIS (R.). — *Géodésie élémentaire*. In-18, 450 p. av. 153 fig. Paris, Doin. Cartonné toile : 5 fr.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. IV. Bd. in 4 Teilbdn. Mechanik. Red. von Fel. Klein u. Conr. Müller. 1. Teilbd. 1. Abtg. 4. Heft. In-8°. Leipzig, Teubner. 7 m. 80 pf.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Éd. française. Réd. sous la direction de JULES MOLK. T. I, fasc. 3. In-8°, Leipzig, Teubner, et Paris, Gauthier-Villars. 5 m.

Geelmuyden (H.). — *Laerebog i Astronomie.* In-8°. Christiania, Cammermeyer. 10 kr.

Hanni (L.). — *Kinematische Interpretation der Maxwellschen Gleichungen m. Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie.* Gr. in-8°. 22 p. Wien, Hölder. 70 pf.

Lindemann (F.). — *Ueber das sogenannte letzte Fermatsche Theorem.* Gr. in-8°. München, Franz. 1 m. 20 pf.

Prang (C.). — *Determinanten.* I. *Hauptsätze.* II. *Einleitg. in die analyt. Geometrie des Raumes unter Anwendg. der Determinanten.* 2. Aufl. Gr. in-8°, VI-65 p. av. fig. Berlin, Mayer et Müller. Cart.: 2 m.

Puiseux (P.). — *La Terre et la Lune. Forme extérieure et structure interne.* In-8°, 180 p. av. fig. et pl. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

Schrön (A.). — *Tables de logarithmes à sept décimales, pour les nombres depuis* 1 *jusqu'à* 108000 *et pour les fonctions trigonométriques de dix en dix secondes.* Nouveau tirage. Gr. in-8°, XIV-554 p. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Sylvester (James-J.). — *Collected mathematical Papers.* Vol. 2. 1854-1873. In-8°, 747 p. av. 2 pl. Cambridge, University Press. 18 sh.

Verhandlungen der vom 20. *bis* 28. IX. 1906 *in Budapest abgehaltenen* 15. *allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung.* Red. von H.-G. van Sande Bakhuysen. 1 Tl. In-8°, 404 p. av. 20 pl. et cartes. Berlin, G. Reimer. 6 m.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgeg. von Mor. Cantor. IV. Bd. Von 1759 bis 1799. 5. Lfg. In-8°. Leipzig, Teubner. 6 m. 80 pf.

Le Bon (G.). — *The evolution of forces.* Gr. in-8°, 404 p. London, Paul. 5 sh.

Le Bon (G.). — *La naissance et l'évanouissement de la matière.* In-16, 80 p. Paris, *Mercure de France.* 75 c.

Al-Battani, sive Albatenii *Opus astronomicum ad fidem codicis escurialensis arabice editum latine versum, adnotationibus instructum.* Pars secunda. Versio Tabularum omnium cum animadversionibus glossario, indicibus, acura di C. A. Nallino. In-4°, XXXI-413 p. Milano. (Pubblicazioni del R. Osservatori di Brera, n° 40.)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHLESINGER (L.). — VORLESUNGEN UEBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. 1 volume in-8°, 333 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

Les conséquences de la belle théorie qu'a fondée L. Fuchs continuent de se développer; après le *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, que M. Schlesinger a achevé de publier il y a environ 10 ans, et qui conserve toute sa valeur, voici qu'il nous donne un nouveau Livre, très différent du premier par la façon dont le sujet est abordé et développé. Naturellement les propositions fondamentales de la théorie ne peuvent manquer de se trouver dans le nouveau Livre; mais elles sont présentées, le plus souvent, d'une façon très différente, et, d'un autre côté, certains sujets qui sont développés dans le *Manuel*, ne sont pas traités dans ces *leçons*.

Au lieu de partir d'une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, l'auteur part d'un système d'équations du premier ordre,

$$(1) \qquad \frac{dy_\alpha}{dx} = a_{1,\alpha}y_1 + a_{2,\alpha}y_2 + \ldots + a_{n,\alpha}y_n \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n);$$

l'exposition de la théorie générale y gagne en simplicité et en symétrie.

En supposant réelles la variable indépendante x et les fonctions $a_{\beta,\alpha}$ de cette variable indépendante, la méthode d'interpolation s'applique d'une façon remarquablement simple à la démonstration du théorème d'existence : les étapes de cette démonstration reproduisent les étapes de la démonstration classique pour l'existence de l'intégrale définie. Mais l'intérêt principal de cette méthode consiste peut-être en ce qu'elle conduit d'une façon naturelle à la conception de ces matrices intégrales que M. Volterra a considérées en elles-mêmes dans les *Memorie della Società italiana delle Scienze* (1) et dans les *Rendiconti del Circolo*

(1) T. VI, 1887; t. XII, 1899.

matematico di Palermo [1], et à une notation qui rappelle heureusement celle des intégrales définies ou indéfinies. En posant $d_{\beta,\alpha} = 0$ ou 1 suivant que β et α sont différents ou égaux, M. Schlesinger est amené à représenter par le symbole

$$[\eta_{\beta,\alpha}(x)] = \int_p^x [a_{\beta,\alpha}(x)\,dx + \delta_{\beta,\alpha}]$$

une matrice de n^2 fonctions $\eta_{\beta,\alpha}$ de x, telle que les éléments d'une ligne constituent une solution du système différentiel proposé et telles qu'on ait

$$\eta_{\beta,\alpha}(p) = \delta_{\beta,\alpha}.$$

La solution générale du système différentiel sera la matrice

$$(y_{\beta,\alpha}) = \int a_{\beta,\alpha}\,dx + \delta_{\beta,\alpha}.$$

en supposant que les éléments d'une ligne soient une solution du système différentiel et que le déterminant de la matrice ne soit pas nul. Ce sera encore une matrice intégrale, analogue à une intégrale indéfinie ; elle se déduira de la première matrice par composition avec une matrice formée d'éléments constants à déterminants non nuls. Cette dernière jouera ainsi le rôle de la constante d'intégration, avec cette différence qu'elle est multiplicative au lieu d'être additive.

En conservant la signification précédente à la matrice $[y_{\beta,\alpha}]$ et en désignant par $[y_{\beta,\alpha}]^{-1}$ la matrice qui, composée avec $[y_{\beta,\alpha}]$, donne la matrice unité $[\delta_{\beta,\alpha}]$, on peut évidemment écrire la matrice $[a_{\beta,\alpha}]$ des coefficients sous la forme

$$(a_{\beta,\alpha}) = (y_{\beta,\alpha})^{-1}\left(\frac{dy_{\beta,\alpha}}{dx}\right);$$

l'analogie avec les dérivées logarithmiques apparaît. Les fonctions $y_{\beta,\alpha}$ étant quelconques, le second membre de l'égalité précédente sera dit *la matrice dérivée par rapport à x de* $[y_{\beta,\alpha}]$. On prévoit ainsi, sans que j'insiste davantage, une sorte de calcul différentiel et intégral des matières dont les éléments sont des fonctions de x. C'est cette théorie que M. Volterra avait fondée de son

---

(1) T. II, 1888.

côté, et que M. Schlesinger développe dans la mesure où il en a besoin; elle se présente pour lui comme l'expression de la nature des solutions du système différentiel considéré, de même que la théorie des déterminants peut être regardée comme ayant son origine dans la résolution d'un système d'équations linéaires. La notation des matrices, leur composition, les règles auxquelles je viens de faire allusion domineront toutes les parties de son Livre où il n'y a pas lieu de s'attacher spécialement à l'étude d'une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre.

L'auteur a d'abord considéré le cas d'une variable réelle; l'extension à la variable complexe, où l'on a à considérer les solutions d'un système intégrable à deux variables indépendantes, est fort intéressante; l'analogie se poursuit; on a alors, au lieu d'intégrales curvilignes, affaire à des matrices intégrales, prises le long d'un chemin et, indépendantes de ce chemin, sous certaines conditions, à des matrices monogènes, etc. Le caractère des points singuliers, l'équation caractéristique relative à chacun de ces points, les substitutions fondamentales relatives aux coupures, l'étude des cas où les coefficients sont constants ou de la forme $\frac{A_{\beta,\alpha}}{x-a}$, a et $A_{\beta,\alpha}$ étant des constantes, l'équation déterminante, les formes normales des solutions autour d'un point singulier qui n'est pas un point d'indétermination, se présentent d'une façon simple et symétrique.

L'auteur s'arrête, comme il convient, sur ce théorème de Fuchs qui donne la condition nécessaire et suffisante pour que les solutions d'une équation différentielle linéaire, dont les coefficients sont des fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier $x = a$, ne soient pas indéterminées en ce point. A ce théorème capital est rattachée l'intéressante remarque de M. Sauvage relative à un système différentiel de premier ordre, tel que celui qui a été considéré au début : lorsque le point $x = a$ est, pour les fonctions $a_{\beta,\alpha}$, un pôle du premier ordre, c'est-à-dire quand les fonctions $a_{\beta,\alpha}$ peuvent être mises sous la forme

$$a_{\beta,\alpha} = \frac{A_{\beta,\alpha}}{x-a} + \Psi_{\beta,\alpha},$$

en désignant par $A_{\beta,\alpha}$ une constante (qui peut être nulle) et par $\Psi_{\beta,\alpha}$ une fonction holomorphe pour $x = a$, le point $x = a$

n'est pas un point d'indétermination pour la solution. Dans le cas où les $a_{\beta,\alpha}$ ont la forme qu'on vient de dire, le système différentiel est dit *canonique* pour $x = a$. Il n'est pas d'ailleurs nécessaire qu'un système soit canonique pour que le point $x = a$ ne soit pas un point d'indétermination.

M. Schlesinger désigne sous le nom de *complètement* (*schlechthin*) *canoniques* les systèmes qui sont canoniques pour tous les points singuliers y compris le point ∞. Il donne le nom de *problème de Riemann* à la question suivante :

On donne arbitrairement r points $a_1, a_2, \ldots, a_r$; on trace les coupures (a_1, ∞), (a_2, ∞),...., (a_r, ∞); le système différentiel (1), si l'on y suppose

$$a_{\beta,\alpha} = \frac{A_{\beta,\alpha}^{(1)}}{x - a_1} + \frac{A_{\beta,\alpha}^{(2)}}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_{\beta,\alpha}^{(r)}}{x - a_r},$$

en désignant par $A_{\beta,\alpha}^{(1)}, A_{\beta,\alpha}^{(2)}, \ldots, A_{\beta,\alpha}^{(r)}$ des constantes, sera un système complètement canonique; la matrice intégrale sera uniforme dans le plan coupé : si la variable traverse une coupure, il en résultera une substitution fondamentale; peut-on choisir les constantes $A_{\beta,\alpha}^{(i)}$ de façon que les diverses substitutions fondamentales soient données?

La solution de ce problème exige d'abord une étude approfondie des systèmes différentiels, en particulier des systèmes complètement canoniques, dont les coefficients dépendent d'un paramètre, étude où l'on remarquera en particulier l'introduction des *séries paramétriques normales* et les représentations asymptotiques des solutions. Quant au *problème de Riemann*, M. Schlesinger montre, d'une façon générale, que la réponse à la question posée est affirmative et que la solution, sous certaines conditions de convergence, est fournie par les fonctions zètafuchsiennes. Enfin, un dernier et important Chapitre est consacré à l'étude des solutions d'un système complètement canonique considérées comme fonctions des points d'embranchement $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Je n'ai pu, dans cette rapide analyse, qu'indiquer sommairement quelques-uns des sujets traités par M. Schlesinger; je souhaite qu'elle suffise pour faire pressentir au lecteur l'importance de ces leçons, justement dédiées à la mémoire de L. Fuchs.

J. T.

MONTESSUS (R. DE). — LEÇONS ÉLÉMENTAIRES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS. 1 volume in-8°, VI-191 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

L'Ouvrage de M. de Montessus contient à la fois un exposé théorique des principes du Calcul des probabilités et un résumé de ses principales applications; l'auteur, s'adressant comme il le déclare dans son Avant-Propos aux curieux des choses savantes, a voulu non seulement leur permettre d'approfondir la notion souvent confuse du hasard, mais aussi les initier aux nombreux problèmes pratiques où elle intervient et que les recherches des mathématiciens ont permis de résoudre.

Après une Introduction dans laquelle se trouvent précisés de façon souvent originale les caractères des événements dus au hasard, ainsi que la définition de la probabilité, M. de Montessus aborde l'étude des notions fondamentales; il donne la définition de la probabilité totale, de la probabilité composée, les applique à quelques problèmes simples afin de les faire mieux comprendre, et expose enfin la théorie des épreuves répétées; les démonstrations de ces deux Chapitres ont l'avantage de n'emprunter leurs éléments qu'aux théories généralement enseignées en mathématiques spéciales et en mathématiques élémentaires; pour être comprises, elles n'exigent aucune érudition spéciale, et pourtant aucune précision nécessaire n'est omise. Le lecteur se trouve ainsi conduit sans efforts à l'exposé des applications les plus curieuses des probabilités, qui forme la partie la plus importante et la plus attrayante de l'Ouvrage.

Ce sont tout d'abord quelques problèmes relatifs aux jeux de hasard : roulette, petits chevaux, baccara; un aperçu sur quelques jeux savants, whist, piquet et écarté, intéressera toute personne qui a quelque plaisir à manier les cartes. Après avoir consacré le Chapitre suivant aux problèmes dans lesquels la probabilité est considérée comme une fonction continue d'une variable indépendante, l'auteur expose les éléments de la théorie des erreurs et les principales conséquences de la loi de Gauss. L'importance pratique de cette dernière est mise en évidence par son application au tir des armes à feu; densité moyenne des points de chute

des projectiles dans une région donnée, réglage du tir d'un canon en portée et en direction, en un mot, les notions usuelles de l'artillerie sont précisées dans une théorie simple et toujours appuyée sur des résultats numériques. L'Ouvrage se termine par un Chapitre consacré à la théorie des assurances, où l'on trouvera non seulement les principes du calcul des primes et des réserves, mais un exposé sommaire du fonctionnement d'une Compagnie. On voit par cette analyse que M. de Montessus a touché à tous les sujets; cette diversité met heureusement en évidence l'importance pratique du Calcul des probabilités; elle éveille la curiosité du lecteur, et plus d'un sera sans doute amené à faire usage des Notes bibliographiques qui terminent chaque Chapitre pour approfondir les problèmes qui auront particulièrement retenu son intérêt. GALBRUN.

MÉLANGES.

SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS MÉROMORPHES PAR DES SÉRIES DE POLYNOMES TAYLORIENS;

PAR M. A. BUHL.

J'ai indiqué dans les *Comptes rendus* (16 mars 1908) une nouvelle manière de représenter une fonction méromorphe $F(x)$ par une série de polynomes s_n, cette notation désignant les $n+1$ premiers termes du développement taylorien de $F(x)$ valable dans le voisinage de l'origine. Ces résultats me semblent s'ajouter de manière intéressante à ceux obtenus par M. G. Mittag-Leffler dans ses Mémoires des *Acta mathematica,* et plus particulièrement dans celui du Tome XXIX.

Je me suis placé dans le cas d'une fonction méromorphe et non dans le cas général d'une branche uniforme appartenant à une fonction quelconque, parce que ce que je perdais ainsi en généralité était gagné d'autre part par la découverte de propriétés prenant une physionomie particulièrement simple et élégante dans le cas d'une fonction uniforme n'ayant que l'infini pour point essentiel. J'ai pu montrer ainsi, avec le maximum de simplicité, comment l'on pouvait former des développements valables pour un ensemble dénombrable de valeurs de x, s'étendant cependant dans tout le champ complexe, sans faire usage de transcendantes plus compliquées que des fonctions entières bien connues, telles que la fonction σ. J'attire particulièrement l'attention sur les conditions de dérivabilité des nouvelles séries.

1. Soit $F(x)$ une fonction méromorphe de pôles *simples* a_k de résidus A_k, définie dans le voisinage de l'origine par un développement taylorien dont s_n désigne la somme des $n+1$ premiers termes. Cette fonction sera considérée dans un contour C aussi grand que possible, mais ne contenant aucun a_k. La façon la plus simple d'obtenir C est de tracer l'étoile de M. Mittag-Leffler, formée de coupures rectilignes issues des a_k et opposées à l'origine; C, qui entoure d'abord l'origine, peut grandir indéfiniment en s'étoilant entre les coupures sans jamais les franchir.

Soit $f(\xi)$ une fonction *entière* dont c_n désigne le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme du développement taylorien, valable dans un contour Γ qui peut grandir sans aucune restriction.

Sous les conditions $|\xi| < |\zeta|$, $|\xi x| < |\zeta z|$, on a, comme je l'ai montré dans ce *Bulletin* (juin 1907),

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \frac{F(z) f(\zeta)\, dz\, d\zeta}{(\zeta-\xi)\left(z-\frac{\xi x}{\zeta}\right)}.$$

L'intégration en z est immédiatement possible et donne

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right) \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta-\xi}.$$

On peut toujours imaginer que Γ soit un cercle dont le centre

est à l'origine et dont le rayon $|\zeta|$ est assez grand pour que les inégalités précédentes soient vérifiées, quels que soient ξ, x, z. Aux singularités a_k de $F(x)$ correspondent les singularités $\zeta_k = \frac{\xi x}{a_k}$ pour $F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)$, lesquelles singularités sont toutes dans Γ. Si (Γ) désigne l'intégrale précédente et si (γ) est une intégrale analogue prise le long d'un contour γ entourant l'origine d'aussi près qu'on voudra, on aura

$$(\Gamma) - (\gamma) = F(x) f(\xi) - \sum_k f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right) \frac{x A_k}{a_k(x - a_k)},$$

le sigma étant relatif à tous les pôles ζ_k compris entre Γ et γ. Finalement, (2) donne

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \sum_k \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)} \frac{x A_k}{a_k(x - a_k)} \\ - \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{f(\xi)} \int_\gamma F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right) \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\xi - \zeta}. \end{aligned} \right.$$

Je vais étudier en détail les trois parties bien distinctes dont se compose le second membre de cette formule fondamentale.

2. J'examine d'abord le premier sigma de (3). Soit $c_n = \gamma_n \xi^n$. Pour n croissant indéfiniment $\lim \sqrt[n]{\gamma_n} = 0$. Considérons, d'autre part, le cercle où converge le développement taylorien de $F(x)$, cercle qui a l'origine pour centre et est inclus dans l'étoile définie plus haut; on aura $|a_n| r^n < g$, si r est le module d'un x inclus dans ledit cercle et si g est une constante finie. Donc $|a_n| < g r^{-n}$ et, quel que soit x,

$$|s_n| < g\left(1 + \frac{|x|}{r} + \ldots + \frac{|x|^n}{r^n}\right) = g \frac{|x|^n}{r^n} \frac{1 - \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n+1}}{1 - \frac{r}{|x|}}.$$

On conclut de là que $\sqrt[n]{s_n}$ est une quantité finie, quel que soit x; par suite, $\sqrt[n]{\gamma_n s_n}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Quels que soient ξ et x, le premier sigma de (3) a donc un sens (G. Mittag-Leffler, *Acta mathematica*, t. XXIX, p. 167).

3. Je passe à l'étude de l'intégrale, qui constitue la troisième partie du second membre de (3). Ce terme n'existe pas si $F(x)$ est une fraction rationnelle.

Si $F(x)$ est une fonction méromorphe, les a_k n'ont pour point limite que le point à l'infini. Entre deux pôles a_k et a_{k+1} se suivant immédiatement en module, on peut faire passer deux circonférences α_k et α_{k+1} ayant l'origine pour centre et formant une couronne de Laurent, dans laquelle on a

$$F(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha_{k+1}} F(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{u}{z^2} + \ldots\right) dz$$
$$+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha_k} F(z)\left(\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \ldots\right) dz$$

si $|a_k| < |u| < |a_{k+1}|$. Posant $u = \frac{\xi x}{\zeta}$, on a le moyen de représenter $F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)$ pour $\left|\frac{\xi x}{a_{k+1}}\right| < \zeta < \left|\frac{\xi x}{a_k}\right|$, c'est-à-dire pour ζ circulant sur le contour γ qui, pour des valeurs de k de plus en plus grandes, enserre l'origine d'aussi près qu'on veut. Dans le voisinage du même point, on a aussi

$$f(\zeta) = \gamma_0 + \gamma_1\zeta + \ldots, \qquad \frac{1}{\xi - \zeta} = \frac{1}{\xi} + \frac{\zeta}{\xi^2} + \ldots,$$

d'où finalement, par un calcul facile,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\xi - \zeta}$$
$$= \sum_{n=1}^{n=\infty}(\gamma_0 + \gamma_1\xi + \ldots + \gamma_{n-1}\xi^{n-1})\frac{x^n}{2i\pi}\int_{\alpha_{k+1}}\frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$

On démontrerait sans peine que cette série converge, quel que soit ξ fini en module et pour x à l'intérieur du cercle α_{k+1} qui, au début du raisonnement, peut être aussi grand qu'on veut.

Étudions maintenant le quotient de l'expression précédente par $f(\xi)$.

En s'appuyant d'une part sur ce qu'*il existe au moins une direction où une fonction entière $f(\xi)$ croît indéfiniment en module avec $|\xi|$*, sa croissance étant alors plus rapide que celle de n'importe quel polynome, d'autre part sur la convergence de la

série dont le terme général (indépendant de ξ) est le coefficient du polynome en ξ dans la formule précédente, on voit sans peine que le quotient étudié tend vers zéro quand $|\xi|$ croît dans les conditions indiquées.

4. Il est donc démontré qu'on peut s'affranchir du dernier terme de (3) et considérer le sigma en k de la même formule comme une série convergente. La chose paraît d'ailleurs pouvoir résulter directement de l'étude du rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)$ à $f(\xi)$, que j'appellerai pour abréger *rapport fondamental*. En effet, x étant quelconque, k peut être assez grand pour que $\frac{x}{a_k}$ soit aussi voisin de zéro qu'on le voudra, et alors le numérateur du rapport fondamental croîtra avec ξ moins vite que le dénominateur. Il me paraît inutile d'insister davantage sur ce point, car, dans la suite, nous n'aurons que des rapports fondamentaux identiquement nuls; mais, indépendamment des applications qui vont suivre, il m'a semblé bien intéressant d'étudier la formule (3) en elle-même. *Il y a là, pour la représentation d'une fonction méromorphe* $F(x)$, *un nouveau développement dépendant d'une fonction arbitraire* $f(\xi)$, développement sur lequel il y a peut-être encore beaucoup à dire.

5. *Nouvelle étude du rapport fondamental.* — Si ce rapport pouvait toujours être nul, la formule (3) se réduirait alors à des formules de l'un des types

$$(4)\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)}, \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)},$$

suivant qu'il est nécessaire ou non de faire croître indéfiniment ξ.

M. E. Borel a d'abord formé de telles expressions pour $f(\xi) = e^{\xi}$. Alors on trouve très facilement que le rapport fondamental ne tend vers zéro pour ξ croissant indéfiniment que si x est dans un certain polygone de sommabilité. Ici même (juin 1907) je suis revenu sur ce point d'une manière fort simple.

M. G. Mittag-Leffler (*Acta mathematica*, t. XXIX) est allé beaucoup plus loin et a créé une fonction entière $f(\xi)$ pour

laquelle x peut circuler dans toute l'étoile. La conférence faite par le célèbre géomètre de Stockholm au récent Congrès international de Mathématiques (Rome, avril 1908) a montré à nouveau le grand intérêt de la question. D'une manière grossière, mais qui fait joliment image, on peut dire que M. Mittag-Leffler a construit une fonction $f(\xi)$ qui croît incomparablement plus vite dans une seule direction privilégiée issue de l'origine que dans toute autre issue du même point.

Dans ces conditions, si ξ tend vers l'infini dans la direction privilégiée, $f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)$ croît incomparablement moins vite que $f(\xi)$ si x et a_k sont d'arguments différents ou ont même argument avec la condition $|x| < |a_k|$. Alors des formules du type (4) représentent F dans tout le plan, sauf sur les rayons d'une étoile formée de demi-droites issues des a_k et opposées à l'origine.

Je vais exposer maintenant une tout autre manière de procéder, laquelle a, par rapport à celle de M. Mittag-Leffler, des inconvénients et des avantages.

6 *Représentation d'une fraction rationnelle. Inutilité d'une croissance indéfinie de* ξ. — Je prends d'abord un exemple extrêmement simple. Soient

$$F(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f(\xi) = \sin\frac{\pi\xi}{2}.$$

La formule (3) devient

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} + \frac{\sin\frac{\pi\xi x}{2}}{\sin\frac{\pi\xi}{2}}\,\frac{x}{1-x}.$$

Soient

$$(5) \qquad x = \frac{2x_1}{2p+1}, \qquad \xi = (2k+1)(2p+1),$$

x_1, p, k étant des entiers. Alors $\sin\frac{\pi\xi x}{2}$ est toujours nul et $\sin\frac{\pi\xi}{2}$ ne l'est jamais. Donc

$$\frac{1}{1-x} = \frac{\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\frac{1-x}{1!} - \left(\frac{\pi\xi}{2}\right)^3\frac{1-x+x^2-x^3}{3!} + \left(\frac{\pi\xi}{2}\right)^5\frac{1+\ldots+x^5}{5!} - \ldots}{\frac{\pi\xi}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)^5 - \ldots}.$$

Cette formule n'est valable que si x et ξ ont des valeurs réelles définies par (5). Je vais généraliser.

7. *Emploi de la fonction* σ. — Considérons toujours une fraction rationnelle ayant des pôles quelconques $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et proposons-nous de la représenter dans tout le champ complexe. Je considère la fonction σ de Weierstrass construite de manière à admettre pour zéros tous les sommets du quadrillage orthogonal formé par les axes et des parallèles à ceux-ci d'abscisses et d'ordonnées $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$.

Cette fonction admet le développement

$$\sigma\xi = \xi + \star - \frac{g_2\xi^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3\xi^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2\xi^9}{2^9.3^2.5.7} - \ldots,$$

où les hypothèses précédentes rendent réels les invariants g_2 et g_3. Je désignerai toujours les termes de cette série par $c_0, c_1, c_2, \ldots$, sans supprimer, pour plus de symétrie, les termes nuls ayant pour indices $0, 2, 3, 4, 6, \ldots$.

Posons

$$(6)\quad a_k = \frac{1}{p}(a_{k1} - ia_{k2}), \qquad x = \frac{1}{p}(x_1 - ix_2), \qquad \xi_n = \prod_1^n (a_{k1}^2 + a_{k2}^2);$$

p est un entier réel et positif; a_{k1} et a_{k2} sont des entiers réels dont l'un est pair, l'autre impair; x_1 et x_2 sont des entiers pairs. Alors ξ, pris égal à ξ_n, est toujours impair, et l'on voit facilement que $\frac{\xi x}{a_k}$ est un entier complexe dont les deux parties sont paires. Dans ces conditions, $\sigma\frac{\xi x}{a_k}$ est nul et $\sigma\xi$ ne l'est pas. La formule (3) donne alors

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{\sigma\xi}.$$

S'il s'agit maintenant d'une fonction méromorphe, le produit ξ_n diverge, mais garde toujours, de même que $\frac{\xi x}{a_k}$, la même nature arithmétique. On a, dans ce cas,

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{\sigma\xi}.$$

Dans de telles formules, x peut circuler dans tout le champ complexe, mais les x, les a_k et ξ ne peuvent cependant être pris dans l'ensemble continu de toutes les valeurs complexes; ces quantités doivent être définies par les égalités (6) et, à ce titre, elles appartiennent seulement à un ensemble dénombrable. C'est là un inconvénient par rapport à la méthode de M. Mittag-Leffler, mais il ne faut pas en exagérer l'importance.

Comme p est aussi grand qu'on veut, les éléments de l'ensemble dénombrable dont nous disposons s'approchent autant qu'on veut des éléments du premier ensemble. En d'autres termes, $F(x)$ est déterminé en un point quelconque du plan, soit exactement, soit par ses valeurs en des points aussi rapprochés qu'on voudra du point considéré.

8. *Indétermination formelle.* — Les développements précédents peuvent évidemment être obtenus d'une infinité de manières, la fonction σ n'ayant été choisie que pour raisonner rapidement sur un exemple simple. Si l'on prenait une fonction dont la distribution des zéros serait différente, il faudrait remplacer les égalités (7) par d'autres conditions. Plus simplement, on pourrait, dans ce qui précède, remplacer σ par le produit de σ par une fonction entière dépourvue de zéros, qui croîtrait indéfiniment le long de la partie positive de l'axe réel.

9. *Cas où* $F(x)$ *présente des pôles multiples.* — Les termes du sigma en k de (3) ont été calculés en supposant que les pôles $\zeta_k = \frac{\xi x}{a_k}$ de $F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)$ étaient du premier ordre.

Plus généralement, pour un pôle d'ordre m, le terme correspondant dudit sigma serait, d'après une formule élémentaire et bien connue, la valeur pour $\zeta = \frac{\xi x}{a_k}$ de l'expression

$$\frac{1}{(m-1)!} D^{m-1}\left[F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta-\xi}\left(\zeta-\frac{\xi x}{a_k}\right)^m\right].$$

Sans aucun calcul, on voit que c'est là une expression linéaire et homogène par rapport aux quantités

$$f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right),\quad f^{1}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right),\quad \ldots,\quad f^{m-1}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right).$$

Le fait de s'arranger à annuler toujours la première de ces expressions n'entraîne pas, en général, qu'il en soit de même des suivantes; mais cela aura cependant lieu si tous les zéros de $f(\xi)$ sont d'ordre m. Donc, *les formules* (4) *ayant lieu comme il a été expliqué précédemment pour* $F(x)$ *n'ayant que des pôles simples, ces formules auront encore lieu si les pôles de* $F(x)$ *deviennent d'ordre* m, *à la condition de remplacer* $f(\xi)$ *par une fonction ayant les mêmes zéros élevés à l'ordre* m. La manière la plus simple d'arriver au but sera de remplacer $f(\xi)$ par $[f(\xi)]^m$.

10. *Dérivabilité.* — Les formules de l'un des types (4) sont-elles dérivables, c'est-à-dire peut-on conclure de ces formules

$$(7) \qquad F^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n^m}{f(\xi)} \qquad \text{ou} \qquad F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n^m}{f(\xi)}.$$

Au premier abord, la question semble ne présenter aucun sens, puisque ces formules ne sont pas définies pour un ensemble continu de valeurs de x. Mais, d'après le paragraphe précédent, si $F(x)$ n'a que des pôles simples, $F^{(m)}(x)$ a des pôles d'ordre $m+1$ et les formules (7) sont valables si les zéros de $f(\xi)$ sont élevés au même ordre. Donc, *si l'on construit les formules* (4) *à l'aide d'une fonction* $f(\xi)$ *dont tous les zéros sont d'ordre* $m+1$, *ces formules sont* m *fois dérivables.*

C'est là un exemple précis (et je crois que l'on n'en connaît pas encore beaucoup) de séries de polynomes dérivables dans des conditions qui leur sont particulières. En outre, le résultat paraît être d'une élégance bien remarquable.

11. Enfin je tiens à signaler dès maintenant, comme nouveau travail relatif aux questions précédentes, un autre Mémoire *Sur la sommabilité des séries d'une variable réelle ou complexe*, qui paraîtra dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* probablement avant la fin de 1908. J'y montre que tout ce qui précède peut être obtenu sans avoir recours à la théorie des intégrales curvilignes. J'avoue que je n'ai pas, autant que les disciples de Weierstrass, le désir de m'affranchir des méthodes de Cauchy,

et je trouve qu'il est tout aussi harmonieux d'écrire la formule (1) comme généralisant l'intégrale simple de Cauchy que de former directement des séries de polynomes généralisant la série de Taylor prise pour point de départ. L'intérêt consistera donc à comparer deux méthodes qui ne doivent nullement s'exclure réciproquement. Je viens de constater que M. R. Baire exprime une opinion analogue a propos des généralités de la théorie des fonctions analytiques vues selon Cauchy ou selon Weierstrass, dans la Préface du second Volume de ses *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, 1908.

Je mentionne aussi que, ayant étudié l'intégrale double de (1) en intégrant d'abord par rapport à z puis par rapport à ζ, M. A. Costabel a étudié la même formule en intervertissant l'ordre des intégrations et que, d'autre part, cet auteur a ajouté d'intéressants résultats à l'étude de certaines régions de sommabilité (*Enseignement mathématique*, t. X, 1908).

SUR UNE CLASSE DE FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. H. ANDOYER.

Dans cette Note, je me propose de résoudre le problème général suivant :

Étudier la fonction continue, de forme générale

$$(1)\qquad \cfrac{\alpha_1}{\beta_1 + \cfrac{\alpha_2}{\beta_2 + \cfrac{\alpha_3}{\beta_3 + \cdots}}}$$

dans laquelle α_n et β_n sont des fractions du premier degré par rapport à n, de sorte qu'on a, à partir de $n = 1$,

$$\alpha_n = \frac{\alpha(n-1) + \alpha'}{\gamma(n+1) - \gamma'}, \qquad \beta_n = \frac{\beta n + \beta'}{\gamma(n-1) + \gamma'},$$

α, β, γ, α', β', γ' étant des constantes.

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite de rang n et faisons aussi, suivant l'habitude,

$$\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0}, \qquad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}.$$

On a, pour déterminer P_n et Q_n, les relations de récurrence, valables à partir de $n = 1$,

$$P_n = \beta_n P_{n-1} + \alpha_n P_{n-2}, \qquad Q_n = \beta_n Q_{n-1} + \alpha_n Q_{n-2},$$

de sorte que les P_n et Q_n sont deux solutions distinctes de l'équation aux différences

$$(2) \qquad y_n = \beta_n y_{n-1} + \alpha_n y_{n-2};$$

pour les P_n, les conditions initiales sont

$$y_{-1} = 1, \qquad y_0 = 0;$$

pour les Q_n, au contraire, on a

$$y_{-1} = 0, \qquad y_0 = 1.$$

L'équation (2) s'écrit

$$y_n[\gamma(n+1) + \gamma'] - y_{n-1}(\beta n + \beta') - y_{n-2}[\alpha(n-1) + \alpha'] = 0;$$

c'est une équation aux différences, linéaire et homogène du second ordre, dont les coefficients sont du premier degré par rapport à n. On peut donc l'intégrer par la méthode de Laplace.

Cherchons à cet effet une solution de la forme

$$y_n = \int_L x^n u\, dx,$$

u étant une fonction inconnue de x, indépendante de n, et L un chemin d'intégration à déterminer dans le plan qui sert à représenter la variable complexe x. Remarquons que l'on a

$$(n+1)y_n = [x^{n+1} u]_L - \int_L x^{n+1}\, du,$$

en désignant, en général, par $[\varphi]^L$ la différence des valeurs que prend une fonction φ à l'extrémité et à l'origine du chemin L.

Transformant de cette façon l'équation (2), on voit qu'on peut

la vérifier en égalant séparément à zéro la quantité sous le signe $\int$ et la partie tout intégrée, ce qui donne les deux conditions

$$(3)\qquad x(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,du = u(\alpha'+\beta' x+\gamma' x^2)\,dx,$$

$$(4)\qquad [x^{n-1}u(\alpha+\beta x+\gamma x^2)]_L = 0.$$

L'équation différentielle (3) déterminera u, et la condition (4) fait connaître les chemins L.

Plaçons-nous dans le cas le plus général; et soient x', x'' les racines distinctes, dont aucune n'est nulle ni infinie, de l'équation

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2 = 0.$$

L'équation (3) s'écrit

$$\frac{du}{u\,dx} = \frac{p}{x} + \frac{p'}{x-x'} + \frac{p''}{x-x''},$$

les cinq constantes p, p', p'', x', x'' remplaçant α, β, γ, α', β', γ', et l'on a d'ailleurs sans peine

$$\alpha_n = -\frac{x'x''(n-p-1)}{n-p-p'-p''-1},\qquad \beta_n = \frac{x'(n-p-p'')-x''(n-p-p')}{n-p-p'-p''-1}.$$

On a alors, en désignant par C une constante arbitraire,

$$u = Cx^p(x-x')^{p'}(x-x'')^{p''},$$

$$y_n = C\int_L x^{n+p}(x-x')^{p'}(x-x'')^{p''}\,dx,$$

avec la condition

$$[x^{n+p-1}(x-x')^{p'+1}(x-x'')^{p''+1}]_L = 0.$$

On est donc ramené à des intégrales hypergéométriques, et l'on pourra, dans tous les cas, trouver deux chemins L distincts, ouverts ou fermés, fournissant deux valeurs distinctes pour y_n.

D'après les propriétés connues des fonctions hypergéométriques, on pourra mettre les solutions y_n sous un grand nombre de formes différentes; nous nous bornerons ici aux suivantes.

Prenons d'abord comme chemin d'intégration le rayon qui va de l'origine O au point x'' dans le plan des x. On peut, en négligeant des constantes et en assujettissant les exposants à des conditions qu'il est inutile de détailler, mettre y_n sous la forme

$$x''^n\int_0^1 t^{n+p}(1-t)^p\left(1-\frac{tx''}{x'}\right)^{p'}dt$$

ou sous la forme équivalente, à une constante près,

$$x'^n \int_0^1 t^{p'} (1-t)^{n+p} \left(1 - t\frac{x''}{x'}\right)^{-n-p-p'-p''-2} dt.$$

Il en résulte une solution qu'on peut écrire, avec les notations ordinaires,

$$I''_n = x''^n \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+p+p''+2)} F\left(-p', n+p+1, n+p+p''+2, \frac{x''}{x'}\right)$$

ou sous la forme équivalente, à un facteur constant près,

$$J''_n = x''^n \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+p+p''+2)} F\left(n+p+p'-p''+2, p''+1, n+p+p''+2, \frac{x''}{x'}\right).$$

De même, prenons pour second chemin d'intégration le prolongement du rayon Ox' depuis le point x' jusqu'à l'infini; on aura les intégrales équivalentes

$$x'^n \int_0^1 t^{-n-p-p'-p''-2} (1-t)^{p'} \left(1 - t\frac{x''}{x'}\right)^{p''} dt$$

ou

$$x'^n \int_0^1 t^{p'} (1-t)^{-n-p-p'-p''-2} \left(1 - t\frac{x''}{x'}\right)^{n+p} dt,$$

d'où une seconde solution qu'on peut mettre sous l'une des deux formes

$$I'_n = x'^n \frac{\Gamma(-n-p-p'-p''-1)}{\Gamma(-n-p-p'')}$$
$$\times F\left(-p'', -n-p-p'-p''-1, -n-p-p'', \frac{x''}{x'}\right)$$

ou

$$J'_n = x'^n \frac{\Gamma(-n-p-p'-p''-1)}{\Gamma(-n-p-p'')} F\left(-n-p, p'+1, -n-p-p'', \frac{x''}{x'}\right).$$

Les solutions I'_n ou J'_n, I''_n ou J''_n ont été obtenues sous certaines conditions; mais on vérifie sans peine, *a posteriori*, qu'elles constituent toujours des solutions de l'équation aux différences (2), pourvu qu'elles aient un sens, c'est-à-dire que les séries hypergéométriques qui y figurent soient convergentes.

On pourrait craindre que les formules ne devinssent illusoires si $n+p+1$, ou $n+p+p''+2$, prend une valeur entière néga-

tive ou nulle, et aussi si $n+p+p'+p''+1$, ou $n+p+p''$, prend une valeur entière positive ou nulle; mais il est facile de voir qu'on pourra toujours lever la difficulté en multipliant préalablement, s'il est nécessaire, par un facteur constant les formes adoptées.

Les numérateurs P_n et les dénominateurs Q_n des réduites de la fraction continue (1) peuvent être pris, si l'on choisit par exemple I'_n et I''_n comme solutions fondamentales, sous la forme

$$P_n = AI'_n + BI''_n, \qquad Q_n = CI'_n + DI''_n,$$

A, B, C, D étant des constantes déterminées par les conditions initiales

$$1 = AI'_{-1} + BI''_{-1}, \qquad 0 = CI'_{-1} + DI''_{-1},$$
$$0 = AI'_0 + BI''_0, \qquad 1 = CI'_0 + DI''_0,$$

d'où

$$\frac{A}{I''_0} = \frac{B}{-I'_0} = \frac{C}{-I''_{-1}} = \frac{D}{I'_{-1}} = \frac{1}{I'_{-1}I''_0 - I''_{-1}I'_0}$$

Si x' et x'' sont de modules différents, on peut supposer $|x''| < |x'|$; les séries I'_n, J'_n, I''_n, J''_n sont alors convergentes, et l'on peut associer indifféremment I'_n ou J'_n avec I''_n ou J''_n.

Si l'on a $|x'| = |x''|$, I'_n et I''_n convergent si la partie réelle de $p'+p''$ est supérieure à -2, tandis que J'_n et J''_n convergent si la partie réelle de $p'+p''$ est négative; donc on peut encore toujours trouver deux séries convergentes comme solutions distinctes de l'équation (2).

Plaçons-nous dans le cas général où l'on a $|x''| < |x'|$. Les valeurs asymptotiques pour n infini de I'_n, I''_n, J'_n, J''_n sont respectivement

$$I' = x'^n(-n)^{-p'-1}\left(1-\frac{x''}{x'}\right)^{p''}, \qquad I'' = x''^n n^{-p''-1}\left(1-\frac{x''}{x'}\right)^{p'},$$

$$J' = x'^n(-n)^{-p-1}\left(1-\frac{x''}{x'}\right)^{p''-1}, \qquad J'' = x''^n n^{-p''-1}\left(1-\frac{x''}{x'}\right)^{-p'-1}.$$

Le rapport de I'' ou J'' à I' ou J' est donc nul; par suite, $\frac{P_n}{Q_n}$ a une limite f, valeur de la fraction continue (1), et en associant ensemble les solutions I'_n et I''_n, ou bien J'_n et J''_n, on a pour f la double valeur

$$f = \frac{A}{C} = -\frac{I''_0}{I''_{-1}} \qquad \text{ou bien} \qquad f = -\frac{J''_0}{J''_{-1}}.$$

La fraction (1) est donc convergente et a pour valeur

$$f = -\frac{px''}{p+p''+1}\,\frac{F\left(-p', p+1, p+p''+2, \frac{x''}{x'}\right)}{F\left(-p', p, p+p''+1, \frac{x''}{x'}\right)}$$

$$= -\frac{px''}{p+p''+1}\,\frac{F\left(p+p'+p''+2, p''+1, p-p''-2, \frac{x''}{x'}\right)}{F\left(p+p'+p''+1, p''+1, p+p''+1, \frac{x''}{x'}\right)}.$$

On en déduit inversement

$$\frac{F(a, b+1, c+1, x)}{F(a, b, c, x)} = \cfrac{\dfrac{c}{c-a+1}}{\dfrac{c+(b-a+1)x}{c-a+1} - \cfrac{\dfrac{(b+1)x}{c-a+2}}{\dfrac{(c+1)+(b-a+2)x}{c-a+2} - \cfrac{\dfrac{(b-2)x}{c-a+3}}{\dfrac{(c+2)+(b-a-3)x}{c-a+3} - \cdots}}}$$

$$= \cfrac{\dfrac{c}{b+1}}{\dfrac{c+(b-a+1)x}{b+1} - \cfrac{\dfrac{(c-a+1)x}{b+2}}{\dfrac{(c+1)+(b-a+2)x}{b+2} - \cfrac{\dfrac{(c-a+2)x}{b+3}}{\dfrac{(c+2)+(b-a+3)x}{b+3} - \cdots}}}$$

Si les modules de x' et x'' sont égaux, x' et x'' restant distinctes, les considérations précédentes ne s'appliquent plus aussi simplement, et il est à prévoir que la fraction donnée n'est pas toujours convergente. Nous pouvons au moins le vérifier dans le cas particulier où α_n et β_n sont, en réalité, indépendants de n, de sorte que la fraction donnée est simplement périodique. Dans ce cas, on a

$$\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'+\gamma},$$

et il en résulte

$$p' = p'' = -1.$$

Par suite, f est égal à $-x''$ lorsque $|x''| < |x'|$.

D'ailleurs, ici, on a toujours

$$J'_n = x'^n, \qquad J''_n = x''^n, \qquad \frac{P_n}{Q_n} = -\frac{(x'^n - x''^n)x'x''}{x'^{n+1} - x''^{n+1}},$$

et l'on voit qu'il n'y a pas de limite pour $\frac{P_n}{Q_n}$ lorsqu'on a $|x''| = |x'|$.

Examinons maintenant les différents cas particuliers qui peuvent se présenter lorsque l'équation $\alpha + \beta x - \gamma x^2 = 0$ n'a plus deux racines distinctes dont aucune n'est ni nulle ni infinie.

1° On a $\gamma = 0$. On arrive à ce cas particulier en faisant x' et p' infinis, de façon que le rapport $\frac{x'}{p'}$ garde une valeur finie q. Alors

$$\frac{du}{u\,dx} = -\frac{1}{q} + \frac{p}{x} + \frac{p''}{x - x''}, \qquad y_n = C\int_L e^{-\frac{x}{q}} x^{n+p}(x - x'')^{p''}\,dx,$$

$$\left[e^{-\frac{x}{q}} x^{n+p-1}(x - x'')^{p''+1}\right]_L = 0,$$

$$\alpha_n = -q x''(n + p - 1), \qquad \beta_n = q(n + p + p'') + x''.$$

Introduisons la série toujours convergente, forme dégénérée de F,

$$G(\beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\beta}{1.\gamma} x + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots;$$

on peut alors répéter tout ce qui a été dit dans le cas général en faisant un passage à la limite convenable; en particulier, la fraction donnée est convergente et a pour valeur

$$f = -\frac{p x''}{p + p'' + 1}\,\frac{G\left(p+1,\, p+p''+2,\, -\frac{x''}{q}\right)}{G\left(p,\, p+p''+1,\, -\frac{x''}{q}\right)}$$

$$= -\frac{p x''}{p + p'' + 1}\,\frac{G\left(p''+1,\, p+p''+2,\, \frac{x''}{q}\right)}{G\left(p''-1,\, p+p''+1,\, \frac{x''}{q}\right)}.$$

2° On a $\alpha = 0$. Ici x'' devient nul; p et p'' deviennent infinis, mais px'' et $p + p''$ gardent les valeurs finies $-r$ et r'. On a

$$\frac{du}{u\,dx} = \frac{r}{x^2} + \frac{r'}{x} + \frac{p'}{x - x'}, \qquad y_n = C\int_L e^{-\frac{r}{x}} x^{n+r'}(x - x')^{p'}\,dx,$$

$$\left[e^{-\frac{r}{x}} x^{n+r'}(x - x')^{p'+1}\right]_L = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{r x'}{n + p' + r' + 1}, \qquad \beta_n = \frac{x'(n + r') - r}{n + p' + r' + 1}.$$

On peut encore répéter ce qui a été dit dans le cas général avec un passage à la limite convenable; la fraction donnée est conver-

gente, sa valeur est

$$f = \frac{r}{r'+1}\,\frac{G\left(-p',\ r'+2,\ -\frac{r}{x'}\right)}{G\left(-p',\ r'+1,\ -\frac{r}{x'}\right)} = \frac{r}{r'+1}\,\frac{G\left(p'+r'+2,\ r'+2,\ \frac{r}{x'}\right)}{G\left(p'+r'+1,\ r'+1,\ \frac{r}{x'}\right)}.$$

3° $\alpha = \gamma = 0$. C'est la réunion des deux cas précédents. On a

$$\frac{du}{u\,dx} = -\frac{1}{q} - \frac{r}{x^2} + \frac{r'}{x}, \qquad y_n = C\int_L e^{-\frac{x}{q}-\frac{r}{x}}\,x^{n+r'}\,dx,$$

$$\left[e^{-\frac{x}{q}-\frac{r}{x}}\,x^{n+r'}\right]_L = 0, \qquad \alpha_n = qr, \qquad \beta_n = q(n+r').$$

Faisons encore

$$J(\gamma, x) = 1 + \frac{x}{1.\gamma} + \frac{x^2}{1.2.\gamma(\gamma+2)} + \ldots;$$

c'est la fonction de Bessel, aux notations près. On peut encore répéter ce qui a été dit; la fraction donnée est convergente et a pour valeur

$$f = \frac{r}{r'+1}\,\frac{J\left(r'+2,\ \frac{r}{q}\right)}{J\left(r'+1,\ \frac{r}{q}\right)};$$

ce résultat est bien connu.

4° Supposons $x' = x''$. Ici, p' et p'' deviennent infinis; mais $p'(x'-x'') = s'$ et $p'+p'' = s''$ restent finis. On a

$$\frac{du}{u\,dx} = \frac{p}{x} + \frac{s'}{(x-x')^2} + \frac{s''}{x-x'}, \qquad y_n = C\int_L e^{-\frac{s'}{x-x'}}\,x^{n+p}(x-x')^{s''}\,dx,$$

$$\left[e^{-\frac{s'}{x-x'}}\,x^{n+p-1}(x-x')^{s''+2}\right]_L = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{-x'^2(n+p-1)}{n+p+s''+1}, \qquad \beta_n = \frac{x'(2n+2p+s'')-s'}{n+p+s''+1}.$$

En partant dans le cas général de solutions y_n sous forme de fonctions hypergéométriques procédant suivant les puissances de $x'-x''$, et passant à la limite, on trouve de même les solutions particulières suivantes :

$$x'^n\,G\left(-n-p,\ s'+2,\ \frac{s'}{x'}\right)$$

équivalente à

$$x'^n\,G\left(n-p+s''+2,\ s''+2,\ -\frac{s'}{x'}\right),$$

et

$$(-x')^n\,\Gamma(-n-p-s''-1)\,\Gamma(n-p+1)\,G\left(-n-p-s''-1,\ -s'',\ \frac{s'}{x'}\right)$$

équivalente à

$$(-x')^n\,\Gamma(-n-p+s''-1)\,\Gamma(n+p+1)\,G\left(n-p-1,\ -s'',\ -\frac{s}{x'}\right).$$

La comparaison de ces solutions pour n infini ne donne rien de général; d'ailleurs elles se confondent pour $s''=-1$.

On pourra avoir des résultats plus nets en gardant y_n sous la forme d'intégrale et étudiant directement cette intégrale. Cette méthode peut d'ailleurs être appliquée dans tous les cas.

Si actuellement α_n et β_n sont indépendants de n, de sorte que la fraction donnée est périodique simple, on a $s'=0$, $s''=-2$; les solutions deviennent x'^n et nx'^n; la fraction a pour valeur $-x'$.

5° $\beta=\gamma=0$. On procède directement :

$$\frac{du}{u\,dx}=\frac{\alpha'}{\alpha x}+\frac{\beta'}{\alpha}-\frac{\alpha'}{\alpha}x,\qquad y_n=C\int_{\cdot 1}^{\cdot}e^{\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\gamma}{2\alpha}x^2}x^{n-\frac{\alpha}{\alpha}}\,dx,$$

$$\left[e^{\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\gamma}{2\alpha}x^2}x^{n+1-\frac{\alpha}{\alpha}}\right]_1=0.$$

6° $\alpha=\beta=0$. De même

$$\frac{du}{u\,dx}=-\frac{\alpha'}{\gamma x^3}-\frac{\beta'}{\gamma x^2}+\frac{\gamma'}{\gamma x},\qquad y_n=C\int_{\cdot 1}^{\cdot}e^{\frac{\beta}{\gamma x}-\frac{\alpha}{2\gamma x^2}}x^{n+\frac{\gamma}{\gamma}}\,dx,$$

$$\left[e^{\frac{\beta}{\gamma x}-\frac{\alpha}{2\gamma x^2}}x^{n+1+\frac{\gamma}{\gamma}}\right]_1=0.$$

Les applications des résultats précédents peuvent être beaucoup multipliées; nous allons en choisir quelques-unes relatives aux développements en fraction continue les plus connus. Auparavant nous ferons deux observations sur la transformation des fractions continues.

En premier lieu, supposons qu'on multiplie α_n par $\omega_{n-1}\omega_n$ et β_n par ω_n, les ω_n étant des quantités quelconques; P_n se trouve multiplié par $\omega_0\omega_1\ldots\omega_n$ et Q_n par $\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$; la fraction $\frac{P_n}{Q_n}$ est donc simplement multipliée par ω_0, ainsi que la valeur F de la fraction continue, si elle existe.

En second lieu, envisageons trois réduites successives, *mais non consécutives*, quelconques, $\frac{P_n}{Q_n}$, $\frac{P_{n+p}}{Q_{n+p}}$, $\frac{P_{n+p+q}}{Q_{n+p+q}}$, de sorte que p et q sont des entiers positifs. Les numérateurs et les dénomi-

nateurs satisfont séparément à l'équation

$$y_{n+p+q} = \lambda y_n + \mu y_{n+p},$$

où l'on a

$$\lambda = \frac{(-1)^{p-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{n+p}\,N(\alpha_{n+p+1}, \beta_{n+p+1}; \ldots; \alpha_{n+p+q}, \beta_{n+p+q})}{N(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}; \ldots; \alpha_{n+p}, \beta_{n+p})},$$

$$\mu = \frac{N(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}; \alpha_{n+2}, \beta_{n+2}; \ldots; \alpha_{n+p+q}, \beta_{n+p+q})}{N(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}; \ldots; \alpha_{n+p}, \beta_{n+p})},$$

en désignant généralement par $N(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_h, b_h)$ le numérateur de la dernière réduite de la fraction continue limitée

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_h}{b_h}}}.$$

En réalité, d'ailleurs, λ et μ sont indépendants de α_{n+1} et β_{n+1}.

Cette remarque permet de former une nouvelle fraction continue qui aurait pour réduites consécutives les réduites de la fraction donnée prises seulement d'intervalle en intervalle.

Voici maintenant les applications :

1° $\alpha_n = 1$, $\beta_n = \frac{4n-2}{x}$.

On est dans le cas particulier (3°) avec

$$q = \frac{4}{x}, \qquad r = \frac{x}{4}, \qquad r' = -\frac{1}{2};$$

donc

$$f = \frac{x}{2}\,\frac{J\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{16}\right)}{J\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{16}\right)}.$$

Mais

$$J\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{16}\right) = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}, \qquad J\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{16}\right) = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x};$$

donc

$$f = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = i \operatorname{tang} \frac{x}{2i}.$$

On a le même résultat en considérant la fraction

$$\cfrac{x}{2 + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \ddots}}}$$

2° Soit la fraction

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2p-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(p+1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2(p+2)+\ldots}}}}}}}}$$

avec $p=1$.

Il faut d'abord la transformer.

Prenons les réduites de trois en trois à partir de la première et marquons-les successivement des indices -1, 0, 1, 2, ... A partir de $n=1$, leurs numérateurs et dénominateurs vérifient l'équation

$$y_n=(4n+6)y_{n-1}+y_{n-2}.$$

Les réduites considérées seront donc les réduites successives et consécutives de la nouvelle fraction

$$1-\cfrac{2}{7-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{14-\cfrac{1}{18-\ldots}}}}$$

d'après l'exemple précédent, sa valeur est $e-2$.

3° Soit

$$\cfrac{1}{3p-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1^*}{1-\cfrac{1^*}{3p-\cfrac{1^*}{12p-6-\cfrac{1}{3(p+1)-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1^*}{1-\cfrac{1^*}{3(p-1)-\cfrac{1^*}{12(p-1)-6+\ldots}}}}}}}}}}$$

avec $p=1$.

Prenons seulement les réduites qui correspondent aux termes marqués d'un astérisque et numérotons-les à partir de $n = 1$. On voit que ce sont les réduites successives de la fraction plus simple

$$\cfrac{2}{5 - \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}.7 - \cfrac{1}{2.9 - \cfrac{2}{11 - \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}.13 - \cfrac{1}{2.15 - \ldots}}}}}}$$

équivalente à

$$\cfrac{4}{10 - \cfrac{4}{14 - \cfrac{4}{18 + \ldots}}}$$

de valeur $e^2 - 7$ d'après ce qui précède.

4° Soit

$$\cfrac{\cfrac{x}{(p-1)(p-2)}}{1 - \cfrac{x}{p-2} + \cfrac{\cfrac{2x}{(p-2)(p-3)}}{1 - \cfrac{x}{p-3} - \cfrac{\cfrac{3x}{(p-3)(p-4)}}{1 - \cfrac{x}{p-4} - \ldots}}}$$

Cette fraction est égale à $\frac{f}{p-1}$ en faisant

$$f = \cfrac{x}{p - x - 2 - \cfrac{2x}{p - x - 3 - \cfrac{3x}{p - x - 4 - \ldots}}}$$

On est dans le cas particulier (1°) et

$$f = \frac{x}{p-2} \frac{G(2, p-3, x)}{G(1, p-2, x)};$$

si p est entier, ceci dépend de e^x, comme on le voit sans peine; pour $p = -1$, $f = x$.

5° Soit la fraction

$$\cfrac{1^2}{2 - \cfrac{5^2}{2 - \cfrac{5^2}{2 - \cdots}}}$$

équivalente à

$$\cfrac{1}{\cfrac{3}{\cfrac{2}{3} + \cfrac{5}{\cfrac{2}{5} - \cfrac{7}{\cfrac{2}{7} - \cdots}}}}$$

On est ici dans le cas général avec

$$x' = 1, \qquad x'' = -1, \qquad p = \frac{1}{2}, \qquad p' = -1, \qquad p'' = 0.$$

La solution I_n est constante; on a aussi la solution

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{1-t}\, dt;$$

I_n tend vers zéro pour n infini et, par suite, la fraction a une valeur

$$f = -\frac{I''_0}{I''_{-1}} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt\sqrt{t}}{1-t}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}} = \frac{4}{\pi} - 1.$$

6° On a la fraction

$$\cfrac{\cfrac{1}{2s^2}}{1 - \cfrac{\cfrac{2}{2s^2}}{1 + \cfrac{\cfrac{3}{2s^2}}{1 - \cdots}}}$$

On est dans le cas particulier (5°): on peut prendre pour y_n les deux solutions

$$I'_n = \int_0^{+\infty} e^{2s^2 + s^2 + s^2} x^{2s+1}\, dx, \qquad I_n = \int_0^{x} e^{2s^2 + s^2 + s^2} x^{2s+1}\, dx;$$

$\frac{\Gamma''_n}{\Gamma'_n}$ tend vers zéro et la fraction a une valeur

$$f = -\frac{\Gamma''_0}{\Gamma''_{-1}} = \frac{-\int_0^{-\infty} e^{2s^2x - s^2x^2}\, x\, dx}{\int_0^{-\infty} e^{2s^2x - s^2x^2}\, dx} = -1 + \frac{e^{-s^2}}{2s\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx},$$

d'où le développement connu pour $\int_s^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

7° On a la fraction

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{s}}{1 + \cfrac{\frac{1}{s}}{1 + \cfrac{\frac{2}{s}}{1 + \cfrac{\frac{2}{s}}{1 + \cfrac{\frac{3}{s}}{1 + \cfrac{\frac{3}{s}}{1 + \cfrac{\frac{3}{s}}{1 + \cdots}}}}}}}}$$

avec $s > 0$.

En ne prenant que les réduites de deux en deux, à partir de la seconde, on a d'abord la fraction équivalente

$$\cfrac{1}{\frac{1}{s} + 1 - \cfrac{\frac{1}{s^2}}{\frac{3}{s} + 1 - \cfrac{\frac{4}{s^2}}{\frac{5}{s} + 1 - \cfrac{\frac{9}{s^2}}{\frac{7}{s} + 1 - \cdots}}}}$$

ou encore

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{s} + f}$$

avec

$$f = -\cfrac{\frac{1}{2s^2}}{\cfrac{3+s}{2s} - \cfrac{3s^2}{\cfrac{5+s}{3s} - \cfrac{\frac{3}{4s^2}}{\cfrac{7+s}{4s} - \cdots}}}.$$

On est ici dans le cas particulier (4°) avec

$$x' = \frac{1}{s}, \qquad p = 1, \qquad s' = -1, \qquad s'' = -1.$$

On a une solution

$$I'_n = \frac{1}{s^n} G(n-2, 1, s);$$

une autre est

$$I''_n = \frac{1}{s^n} \int_s^\infty \frac{e^{-t}(t-s)^{n+1}}{t^{n+2}};$$

$\frac{I''_n}{I'_n}$ tend vers zéro pour n infini et, par suite, f existe et a pour valeur

$$f = -\frac{\int_s^\infty e^{-t}\frac{t-s}{t^2}\,dt}{s\int_s^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt} = -1 - \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s\int_s^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t}}.$$

Par suite, la fraction donnée est égale à

$$\frac{s}{e^{-s}} \int_s^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t};$$

c'est le développement connu du logarithme intégral.

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS FINIS ET CONTINUS;

PAR J. CLAIRIN, à Lille.

$x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_h$ désignant $n+h$ variables, soit (G) un groupe continu de transformations engendré par les

r transformations infinitésimales

$$(1) \qquad X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_r f,$$

linéairement indépendantes; il peut exister des fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_r$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_h$ telles qu'on ait identiquement

$$V_1 X_1 f + V_2 X_2 f + \ldots + V_r X_r f = 0;$$

je me propose d'établir que, si l'on prolonge le groupe (G) jusqu'à un ordre t suffisamment élevé et si l'on représente par

$$X_1^{(t)} f, \quad X_2^{(t)} f, \quad \ldots, \quad X_r^{(t)} f$$

les transformations (1) prolongées, h des variables, $z_1, z_2, \ldots, z_h$ par exemple, étant considérées comme des fonctions des n autres, il n'existe aucun système de fonctions $W_1, W_2, \ldots, W_r$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_h$ et des dérivées de $z_1, z_2, \ldots z_h$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfassent à l'équation

$$(2) \qquad W_1 X_1^{(t)} f + W_2 X_2^{(t)} f + \ldots + W_r X_r^{(t)} f = 0.$$

Nous considérerons $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_h$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $n+h$ dimensions, et, pour abréger, nous désignerons par la lettre M_p toute multiplicité définie à l'aide de h relations permettant d'exprimer $z_1, z_2, \ldots, z_h$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En chaque point d'une telle multiplicité, les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_h$ et des dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ jusqu'à un certain ordre α définissent un élément d'ordre α appartenant à la multiplicité.

A une multiplicité M_p quelconque les transformations du groupe (G) font correspondre une famille (F) de ∞^r multiplicités analogues, définies par un système d'équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \\ z_2 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_h = \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \end{array} \right.$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont des paramètres arbitraires.

Désignons par μ_i le nombre des dérivées d'ordre i d'une fonction

de n variables et posons, pour éviter les longueurs d'écriture,

$$h(1 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_t) = \mathrm{T},$$

t représentant un nombre entier et positif.

En écrivant les conditions pour qu'un élément donné d'ordre $t+1$ appartienne à une multiplicité M_p de la famille (F), nous obtenons $\mathrm{T} + h\mu_{t+1}$ équations indépendantes, puisque dans chacune d'elles figure une quantité que ne renferment pas les autres. Imaginons qu'on ait pris t assez grand pour qu'on puisse résoudre r' des T premières équations, qui expriment que la multiplicité contient l'élément d'ordre t supportant l'élément donné d'ordre $t+1$, par rapport à r' des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, et pour qu'en remplaçant par leurs valeurs ces r' quantités dans les équations restantes on obtienne $\mathrm{T} - r' + h\mu_{t+1}$ équations indépendantes de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ auxquelles doivent satisfaire les coordonnées d'un élément d'ordre $t+1$ situé sur l'une des M_p de la famille considérée.

Ces multiplicités M_p sont donc des intégrales d'un système de $\mathrm{T} - r' + h\mu_{t+1}$ équations aux dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à $t+1$: ces équations peuvent toujours être résolues par rapport aux $h\mu_{t+1}$ dérivées d'ordre $t+1$, et les dérivées d'ordre inférieur sont liées par $\mathrm{T} - r'$ relations. Les intégrales d'un pareil système ne peuvent, dans aucun cas, dépendre de plus de r' constantes arbitraires : les valeurs initiales de $z_1, z_2, \ldots, z_h$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre t, les valeurs de ces T quantités satisfaisant à $\mathrm{T} - r'$ conditions indépendantes, comme il vient d'être expliqué. Les multiplicités définies par les équations (3) dépendent de r constantes et non d'un nombre moindre si l'on a choisi arbitrairement la multiplicité dont ont été déduites toutes les autres à l'aide des transformations du groupe (G); r' ne peut donc être inférieur à r, c'est-à-dire qu'il ne peut exister qu'un nombre fini de M_p de la famille (F) [1] qui contiennent un élément quelconque d'ordre t.

Cela posé, s'il existait des fonctions $W_1, W_2, \ldots, W_r$ satisfaisant à la condition (2), chaque élément d'ordre t resterait in-

---

[1] Plus exactement, ces multiplicités ne peuvent dépendre de paramètres variant d'une manière continue.

variant lorsqu'on lui appliquerait toutes les transformations d'un sous-groupe de (G) dont l'ordre serait égal au nombre des systèmes linéairement indépendants de fonctions $W_1, W_2, \ldots, W_r$: en appliquant à une multiplicité M_p de la famille (F) les transformations d'un sous-groupe qui laisse invariant un élément d'ordre t de cette M_p, on trouverait une infinité de multiplicités de la famille contenant cet élément, ce qui est impossible.

La proposition énoncée au début de cette Note est donc démontrée. Il en résulte, en particulier, que *le nombre des invariants différentiels d'un groupe de transformations fini et continu est exactement égal, du moins si l'ordre de ces invariants est assez élevé, à la différence entre le nombre total des variables, dépendantes et indépendantes, et des dérivées d'ordre inférieur ou égal à l'ordre considéré et l'ordre du groupe donné* [1]; cela arrive notamment quand l'ordre des invariants cherchés est supérieur ou égal à l'ordre du groupe : si l'on donne en effet à t la valeur r, le système de T équations étudié plus haut peut toujours être résolu par rapport aux inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Le raisonnement qui précède s'applique à r transformations infinitésimales linéairement indépendantes quelconques. Quels que soient $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$, la transformation infinitésimale

$$\lambda_1 X_1 f + \ldots + \lambda_r X_r f,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ désignent r constantes, engendre un groupe à un paramètre ; l'ensemble de ces groupes forme un système de transformations dépendant de r paramètres qui permettent de déduire de toute M_p une famille de ∞^r multiplicités analogues. Il n'y a qu'à répéter ce qui précède pour montrer l'impossibilité de l'existence d'une relation telle que (2) dès que t est assez grand.

---

[1] M. Engel m'a écrit qu'il a plusieurs fois indiqué dans son Cours ce théorème dont ni l'énoncé ni la démonstration n'ont été publiés jusqu'ici. D'après les renseignements que M. Engel a bien voulu me communiquer, la démonstration qu'il donne diffère de la précédente.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FEHR (H.), FLOURNOY (Th.), CLAPARÈDE (Ed.). — Enquête de l'enseignement mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens. — 1 volume in-8°, 125 pages. Paris, Gauthier-Villars; Genève, Georg et Cie, 1908.

La mode est aux enquêtes; quelques journalistes en vivent; on fait des enquêtes sur les sujets les plus sérieux ou les plus folâtres; des lecteurs naïfs y cherchent la vérité; des philosophes espèrent en tirer parti pour mieux connaître les hommes.

Il s'agit tout d'abord de bien poser les questions et d'obtenir des réponses sincères, puis d'interpréter les réponses. Sur ces divers points, on peut, pour ce qui concerne l'enquête dirigée par M. Fehr, avec la collaboration de MM. Flournoy et Claparède, avoir toute confiance. Les questions étaient intelligemment posées; la façon dont les réponses sont classées, résumées, discutées, manifeste une fois de plus, chez les auteurs de l'enquête, cette compétence, cette parfaite conscience, cette prudence et cette acuité dans la critique que leurs travaux antérieurs avaient déjà permis d'apprécier. Il n'était pas possible de tirer davantage des réponses qu'on leur a envoyées. Quant à la sincérité de ces réponses, il serait fort injurieux de la mettre en doute, et, d'ailleurs, elle se montre toute nue.

« Notre étude est basée, disent les enquêteurs, sur les documents provenant de plus d'une centaine de mathématiciens appartenant, pour la plupart, au temps présent. » Les enquêteurs ne disent pas combien ils avaient envoyé de questionnaires; mais il suffit de penser à la production mathématique, au nombre des périodiques et de leurs collaborateurs habituels pour être bien sûr que ceux qui ont répondu ne forment qu'une petite fraction

de ceux qui ont été interrogés. Leur qualité, qui a des degrés, est excellente et, sans doute, elle apparaîtrait mieux encore si l'on pouvait tenir compte de ceux qui ont souhaité que leurs noms ne fussent pas livrés à la publicité. Si même toute comparaison de ce genre n'était pas très impertinente, l'ignorance où l'on est de beaucoup de noms ne permettrait pas de porter quelque jugement sur la valeur respective de ceux qui ont répondu et de ceux qui ne l'ont pas fait. Ces derniers sont assurément la très grande majorité. Est-ce paresse, timidité, modestie, oubli, indifférence ou dédain pour les enquêtes, incapacité ou dégoût de la réflexion sur soi-même? Voilà un nouveau sujet d'enquête, à laquelle on devrait, pour leur apprendre, soumettre les mauvais correspondants. Et si l'on s'adressait à des physiciens, à des chimistes, à des naturalistes, à des lettrés, à des artistes, la proportion de ceux qui répondent serait-elle plus ou moins forte que pour les mathématiciens? Cette proportion dépend-elle des diverses sciences, des arts, voire des branches d'une même science? Ceux qui font de la Chimie organique réagissent-ils mieux, ou moins bien, à l'interview que ceux qui s'adonnent à la Chimie minérale? Que dire des architectes, des poètes, des musiciens, des peintres ou des comédiens? Voilà de belles questions.

Revenons à celles qui concernent les mathématiciens. Trop souvent, le petit nombre des réponses et leur variété ne permettent pas de tirer des conclusions. S'il semble établi que la plupart des mathématiciens aiment la musique et la promenade à pied, on trouve parmi eux du goût, de l'indifférence, de la répugnance pour les spéculations philosophiques et religieuses; la tendance de celui-ci « ressemblerait à celle de Pascal, un des plus beaux exemplaires d'*homme vivant* et *sentant* »; celui-là se proclame profondément antireligieux; la distinction entre les visuels, auditifs, moteurs, etc., n'a pas été bien saisie; les uns travaillent le matin, les autres le soir; les uns régulièrement, les autres par à-coups; certains ont besoin de silence, d'autres sont aidés par les bruits extérieurs, par une musique lointaine, mais pas mélancolique; il en est un qui réfléchit en laissant errer ses mains sur le piano et en chantant; ceux-ci ont besoin de 8 heures de sommeil au moins, celui-là se contente de 6 heures. La plupart pratiquent et recommandent la sobriété; un mange beaucoup.

On ne s'étonnera pas de les voir attribuer plus ou moins d'importance à la lecture, plus ou moins d'avantages ou d'inconvénients à l'érudition; souvent, en lisant la signature, on peut prévoir la réponse. On ne s'étonnera pas non plus si ceux qui étudient les travaux des autres les étudient d'une façon active, en reconstruisant eux-mêmes les développements et les démonstrations.

Le goût des Mathématiques se manifeste habituellement de bonne heure. L'un de ceux qui ont répondu et dont on regrette de ne pas savoir le nom a, sur ce point, des souvenirs qui remontent au temps où il avait trois ans et demi.

Un point qui se rattache à cette précocité des grands mathématiciens, et sur lequel il aurait été, je le reconnais, quelque peu délicat de les interroger, n'a pas été touché par l'enquête : A quel âge ont-ils eu leurs idées maîtresses? Mon frère (mais il ne parlait que des morts) soutenait volontiers qu'ils avaient toujours été en possession de ces idées avant 30 ans; assurément, il n'entendait pas par là qu'après cet âge de 30 ans un Euler ou un Lagrange n'avait plus rien fait de bon, mais qu'ils avaient surtout développé les conséquences de leurs grandes découvertes.

Une autre question fort intéressante est celle de l'hérédité. Il y a eu des familles de mathématiciens, cela n'est pas douteux; mais les enquêteurs reconnaissent qu'il est bien difficile de tirer des réponses qu'ils ont reçues quelque renseignement précis; le fait d'avoir eu un fils, un cousin ou un neveu reçu, par exemple, à l'École Polytechnique constitue un document insuffisant; l'aptitude à apprendre des Mathématiques est, à ce que je crois, assez commune; et l'habileté des maîtres, des entraîneurs, est si grande, qu'ils font réussir aux concours des jeunes gens chez lesquels cette aptitude est fort médiocre. Quant à la faculté créatrice, que les concours n'ont pas la prétention de mettre en lumière, elle est trop rare pour qu'on puisse espérer recueillir beaucoup de faits probants. Sans compter que cette faculté, là même où elle existe, ne se manifeste pas toujours : elle reste en puissance, elle ne passe pas à l'acte. Le milieu n'a pas été favorable; les circonstances où elle se serait développée ne se sont pas produites. Il est certain que, dans notre système d'éducation, avec nos mœurs, le talent mathématique a moins de chance de se développer chez les femmes que chez les hommes, et cette simple remarque me semble enlever

beaucoup de valeur aux observations d'après lesquelles ce talent viendrait, comme le voulait Möbius, du côté paternel. Les réponses à l'enquête sont, toutefois, favorables à cette opinion de Möbius.

Les questions relatives à la découverte, à la part du hasard, de l'inspiration, étaient assurément des plus intéressantes. M. Flournoy se plaint du laconisme des réponses. Il observe d'ailleurs que les mots *hasard*, *inspiration* sont fort élastiques, et cela explique « que le rôle du hasard puisse être jugé tantôt considérable, tantôt insignifiant ou même nul, selon qu'on pense au hasard des rencontres *extérieures* (conversations, lectures, etc.) ou au hasard *interne* du cours des idées, lequel naturellement n'est fortuit qu'en apparence et se ramène en réalité soit à l'effet du travail intérieur, soit au facteur imprévisible de l'inspiration ». Si laconiques qu'aient été les réponses, il est remarquable qu'elles s'accordent assez bien avec les conclusions que M. Poincaré a développées dans sa conférence à l'Institut psychologique : La découverte est toujours précédée par un grand effort de pensée qui souvent est long et paraît infructueux; elle surgit parfois, comme une illumination soudaine, avec un caractère de certitude qui trompe rarement, alors qu'on ne croit pas penser au problème posé; n'importe quand, à la promenade, pendant une lecture, une conversation, assez fréquemment au réveil. Il s'agit, bien entendu, non des résultats d'un calcul, mais d'une idée directrice, d'une méthode, d'un choix heureux, d'un rapprochement, d'une clef qui va sûrement ouvrir la porte devant laquelle on a épuisé ses efforts. Le travail conscient n'est pas fini; il reste à suivre l'idée, à en développer logiquement les conséquences. La réalité d'un travail inconscient, qui, chez quelques-uns, aboutit à la découverte, n'en est pas moins mise hors de doute. Les réponses négatives ne valent pas contre les observations positives d'un grand nombre de mathématiciens éminents, contre celles de M. Poincaré en particulier. Le travail inconscient peut très bien se produire chez ceux même qui n'ont jamais rien trouvé qu'en y pensant consciemment, puisque, aussi bien, le travail inconscient ne peut être observé directement. Beaucoup d'autres observations conduisent à affirmer ce travail; mais il est, à coup sûr, intéressant de le constater nettement dans la recherche mathématique et d'en connaître quelques conditions et quelques caractères. Dure-t-il

longtemps? persiste-t-il? Intervient-il dans les cas, assez fréquents, où un mathématicien qui a abandonné le problème sur lequel il s'est vainement acharné, qui l'a presque oublié, reprend ce problème avec des forces nouvelles et en vient à bout? Est-il plus intense dans la jeunesse que dans l'âge mur? Les enquêteurs voudraient sans doute en savoir bien davantage : ils ne sont pas les seuls. Bien étranges sont les prolongements et les dessous mystérieux de la pensée; mais cette pensée est-elle moins étrange lorsqu'elle est pleinement consciente et n'a-t-elle plus de quoi s'étonner d'elle-même?

Faut-il parler des rêves, sur lesquels M. Maillet avait déjà fait une enquête [1]? La pauvreté intellectuelle des rêves est chose banale; ils sont assurément plus riches en sensations : les sensations de tension, d'effort, de fatigue, de joie dont s'accompagne le travail intellectuel, son insuccès ou sa réussite, peuvent très bien y trouver place et se mélanger avec des impressions visuelles, calculs ou figures, d'un caractère mathématique. Mais il faut se défier, comme l'a montré M. Foucault, de la façon dont tout cela se déforme et s'organise au réveil et dans le souvenir.

Les excellents conseils aux jeunes gens ne manquent pas : écouter de bons professeurs, étudier les grands maîtres, ne lire que des chefs-d'œuvre, acquérir des connaissances dans les branches les plus diverses des Mathématiques; prendre un sujet spécial, le plus à son goût, et qui ne soit pas épuisé; poursuivre quelque problème par ses propres forces; ne pas faire de Mathématiques si l'on n'en est pas épris et si l'on ne veut pas se contenter de rester pauvre dans les biens de ce monde; travailler sérieusement, publier peu; ne pas trop écrire si l'on n'est pas Abel ou Galois; ne pas négliger son devoir professionnel; ne pas trop fumer; avoir du génie; pratiquer sur soi-même la règle de la division en moyenne et extrême raison. J. T.

---

(1) *Bulletin de la Société philomathique*, 1906.

MÉLANGES.

DÉTERMINATION ET INTÉGRATION D'UNE CERTAINE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AYANT POUR POINT SINGULIER UN CENTRE;

Par M. Henri DULAC.

1. Étant donnée une équation différentielle

$$Y(x,y)\,dy + X(x,y)\,dx = 0, \tag{1}$$

où X et Y sont des fonctions de X et de Y holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$, mais ayant des termes du premier degré en x et y, on sait qu'en général cette équation peut, au moyen d'un changement linéaire de variables, se mettre sous la forme

$$(x + \ldots)\,dy + (-\lambda y + \ldots)\,dx = 0, \tag{2}$$

où nous n'écrivons dans les quantités entre parenthèses que les termes du premier degré en x et y. Le cas où λ est un nombre rationnel négatif $\left(\lambda = -\frac{p}{q}\right)$ offre un intérêt particulier [1]. Si nous cherchons à mettre l'intégrale générale de l'équation (2) sous la forme $\varphi(x,y) = C$, $\varphi(x,y)$ vérifie l'équation

$$(qx + \ldots)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (py + \ldots)\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{3}$$

On peut essayer de vérifier cette équation au moyen d'une fonction φ holomorphe et nulle pour $x = y = 0$ et dont les termes

---

[1] Poincaré, *Journal de Mathématiques*, 1885, p. 170. — Bendixson, *Stockholm Ofversigt*, 1895. — Dulac, *Journal de l'École Polytechnique*, 1903, p. 21.

de moindre degré se réduisent à $x^p y^q$. On ne rencontre de difficulté que lorsqu'on arrive à la détermination du coefficient du terme en $x^{2p} y^{2q}$. En général, on est alors arrêté par une impossibilité. Si une condition est vérifiée, il n'en est pas ainsi et l'on peut prendre arbitrairement ce coefficient. Les mêmes circonstances se présenteront ensuite pour le terme $x^{3p} y^{3q}$, pour le terme $x^{4p} y^{4q}$, etc. Ce n'est donc que dans le cas où une infinité de conditions sont vérifiées que (3) admet une solution de la forme indiquée. Il ne passe alors par l'origine que deux intégrales de l'équation (1). On est dans le cas d'un *centre* [1]. Si, au contraire, les conditions dont nous avons parlé ne sont pas toutes vérifiées, on est dans le cas d'un *foyer :* étant donnée une valeur x_0, on peut prendre une infinité de valeurs initiales y_0 et faire tendre x vers o de telle manière que l'intégrale $y(x)$ relative à ces valeurs initiales x_0, y_0 tende vers o avec x. La distinction théorique entre un *centre* et un *foyer* est ainsi très nettement établie, mais il n'est pas toujours possible de décider, dans la pratique, laquelle des deux circonstances se présente. Tout d'abord, les conditions successives dont nous avons parlé deviennent rapidement très pénibles à former. En second lieu, si X et Y sont quelconques, ces conditions en nombre infini sont toutes distinctes : en effet, dans les conditions successives qu'on rencontre interviennent des coefficients de termes de degrés de plus en plus élevés de X et Y. Il est donc impossible, si les coefficients des développements de X et Y sont quelconques, de décider, au bout d'un nombre fini d'opérations, si l'on est ou non dans le cas d'un *centre*. Il n'en est pas nécessairement ainsi lorsque les coefficients de X et Y présentent entre eux des relations. En particulier, si X et Y sont des polynomes de degré donné, le nombre des conditions distinctes pour qu'il y ait centre est nécessairement fini. Il est facile, en effet, de former des équations de la forme (1) où X et Y aient le degré donné et pour lesquelles l'origine soit *centre*. Il existe donc des systèmes de valeurs attribués aux coefficients des polynomes X et Y, systèmes tels que toutes les conditions pour qu'il y ait centre soient vérifiées. *Le nombre*

---

[1] J'emploie, comme je l'ai indiqué dans le Mémoire cité, le mot *centre* avec un sens plus étendu que celui employé d'abord par M. Poincaré.

des conditions distinctes est donc fini (¹). On peut, par suite, se proposer de reconnaître si une équation (1) donnée admet ou non un *centre*, ou, ce qui revient au même, on peut, en se donnant le degré de X et Y, se proposer de former toutes les équations pour lesquelles l'origine est un centre. Ce problème, dont il ne semble pas possible de donner une solution générale, présente déjà d'assez grandes difficultés de calcul, lorsqu'on se donne la valeur $\lambda = -\frac{p}{q}$, ainsi que le degré n de X et Y. Je me propose de montrer ces difficultés (²) en traitant complètement le cas où l'on a $\lambda = -1$ (³) et $n = 2$, cas où les calculs paraissent pourtant devoir être plus simples que dans les autres cas.

J'ai pu montrer que *toutes les équations considérées pour lesquelles l'origine est centre sont de l'une des formes indiquées au n° 7*. Chacune des formes d'équation contient un certain nombre de coefficients, qui peuvent prendre n'importe quelles valeurs sans qu'on cesse d'avoir un centre.

Je montre de plus que, dans chacun de ces cas, *l'intégration de l'équation peut se faire en termes finis*. Cette circonstance présente un certain intérêt, parce que, en dehors de l'intégration formelle qu'elle fournit de certains types d'équations, il est remarquable de constater que les conditions pour qu'il y ait centre entraînent, si elles sont vérifiées, l'intégration de l'équation. Il y a une coïncidence curieuse au premier abord, mais cependant explicable entre certains des cas examinés et les cas où des circonstances particulières permettent l'intégration de l'équation au moyen des méthodes données par M. Darboux (⁴).

(¹) *Voir* PAINLEVÉ, *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, II, A 4 *a*, Note 113, p. 220.

(²) Des difficultés du même genre se présentent lorsque, considérant une équation (1) où les termes de degré minimum de X et Y sont de degré q, supérieur au premier, on cherche dans quel cas l'intégrale générale de l'équation peut se mettre sous la forme

$$A_0^{\lambda_0} A_1^{\lambda_1} \ldots A_q^{\lambda_q} = C,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_q$ sont des fonctions holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$. *Voir* les Mémoires que j'ai publiés : *Journal de l'École Polytechnique*, 1903, p. 98 ; *Annales de Grenoble*, 1905, p. 18.

(³) Le cas de $\lambda = -1$ offre un intérêt particulier. C'est son étude qui a donné naissance à la dénomination de *centres* et à leur théorie.

(⁴) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1878, Mélanges.

Le problème que nous examinons nous donne un nouvel exemple d'intégration d'une catégorie d'équations formées, non en vue de satisfaire à une méthode d'intégration donnée, mais seulement en vue de vérifier des conditions analytiques données.

Si, considérant le cas de l'équation (2) où X et Y sont des polynomes, on se demande quelle conséquence relative à ce cas général on peut tirer de l'étude du cas particulier que nous avons traité, il paraîtra probable que, dès que le degré de X et Y dépasse le second, la formation et la résolution des équations exprimant qu'il y a centre sont pratiquement irréalisables, à moins que le problème ne puisse être abordé par une tout autre méthode que celle employée.

2. Écrivons l'équation (1) sous la forme

$$(ax + by + \ldots)\,dy = (a'x + b'y + \ldots)\,dx. \tag{4}$$

On sait que, si la forme quadratique

$$(ax + by)\,y - (a'x + b'y)\,x \tag{5}$$

est le produit de deux facteurs linéaires $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$, et si l'on fait le changement de variables

$$x' = \alpha x + \beta y, \qquad y' = \gamma x + \delta y, \tag{6}$$

l'équation devient

$$(\lambda_1 x' + \ldots)\,dy' = (\lambda_2 y' + \ldots)\,dx',$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation

$$\lambda^2 - (a - b')\lambda + ab' - ba' = 0. \tag{7}$$

Nous nous proposons de considérer le cas particulier où le rapport des deux racines de cette équation est égal à -1. On a $a + b' = 0$. Nous supposerons, bien entendu, en même temps que la forme (5) ne soit pas un carré parfait, ou, ce qui revient au même, que l'équation (7) n'ait pas ses deux racines égales à 0. Il faudra donc qu'on ait

$$a = -b', \qquad a^2 - ba' = 0$$

Nous obtenons alors l'équation

$$(8) \qquad (x' + \ldots)\,dy + (y' + \ldots)\,dx' = 0.$$

La méthode suivie s'applique aussi bien au cas de racines λ_1, λ_2 réelles qu'au cas des racines imaginaires.

Si l'on a une équation à coefficients réels et qu'on ne veuille employer que des changements de variables réels, on pourra, dans le cas où les racines de (7) sont imaginaires, ramener l'équation (4) à la forme

$$(9) \qquad (y' + \ldots)\,dy' + (x' + \ldots)\,dx' = 0$$

employée par M. Poincaré. Il suffira de prendre pour $\alpha x + \beta y$ et $\gamma x + \delta y$ deux facteurs imaginaires conjugués de (5) et de poser

$$x' + iy' = \alpha x + \beta y, \qquad x' - iy' = \gamma x + \delta y.$$

Ce changement de variables peut également être employé dans tous les cas; mais, s'il semble indispensable d'employer la forme d'équation (9) pour étudier les intégrales réelles, il nous sera plus commode, pour les résultats que nous avons en vue et qui sont relatifs à la forme analytique de l'intégrale générale, de nous servir de la forme d'équation (8). Pour déduire des résultats relatifs à cette équation des conséquences relatives à (9), nous n'aurons qu'à remplacer x' par $x' + iy'$ et y' par $x' - iy'$ [1].

Si nous considérons maintenant, comme nous l'avons dit, le cas où les coefficients de dy et de dx sont des polynomes du second degré, nous voyons que, le changement de variables indiqué étant fait, nous pouvons prendre l'équation sous la forme

$$(10) \quad (x + a'y^2 + b'xy + c'x^2)\,dy + (y + ax^2 + bxy + cy^2)\,dx = 0.$$

Nous allons chercher à déterminer tous les systèmes de valeurs de a, b, c, a', b', c' tels qu'on ait un centre, c'est-à-dire tels que

---

[1] Le cas signalé par M. Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 1885, p. 193; *voir* aussi LIAPOUNOFF, *Annales de Toulouse*, t. XIX, 1907, p. 353), cas où l'équation (9) a nécessairement un centre à l'origine, revient, si l'on emploie la forme d'équation (8),

$$[x' + f(x', y')]\,dy + [y' + \varphi(x', y')]\,dx' = 0,$$

au cas où l'on a $f(x, y) = \varphi(y, x)$. Nous rencontrerons ce cas au n° 8.

l'équation aux dérivées partielles

$$(11)\qquad (x + a'y^2 + b'xy + c'x^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (y + ax^2 + bxy + cy^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

puisse être vérifiée par un développement de la forme

$$(12)\qquad \varphi = xy + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots,$$

φ_3, φ_4, ... étant des polynomes en x et y homogènes et de degré égal à l'indice. En cherchant les conditions nécessaires pour qu'il y ait centre, nous pousserons, suivant les cas, le calcul jusqu'à la détermination des termes de φ_6 ou de φ_8. Les conditions ainsi obtenues seront suffisantes, comme nous le vérifierons par l'intégration.

Remarquons que, sans changer la forme de l'équation (10), ni la forme de l'intégrale générale (12), nous pourrons remplacer x par hx et y par ky. L'équation (10) devient

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} & x + \left(\frac{a'k^2}{h}y^2 + b'kxy + c'hx^2\right)dy \\ & + \left(y + \frac{ah^2}{k}x^2 + bhxy + ck^2y^2\right)dx = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit immédiatement que, si dans (12) deux coefficients sont différents de 0, on peut, en choisissant convenablement h et k, faire en sorte que les coefficients correspondants de (13) soient égaux à 1. Cette remarque nous servira dans la suite à simplifier certains calculs. On pourrait employer également la substitution de hx à x et de hy à y pour établir, *a priori*, la forme des conditions pour qu'il y ait centre. On se servirait de considérations d'homogénéité en attribuant à b et a, par exemple, les dimensions respectives h, h^2k^{-1}.

3. *Recherche des différents types d'équations pour lesquelles il y a centre.* — L'équation (11) s'écrit

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (ax^2 + bxy + cy^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - (a'y^2 + b'xy + c'x^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Le polynome φ_3 est déterminé par la relation

$$x\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} = (ax^2 + bxy + cy^2)x - (a'y^2 + b'xy + c'x^2)y.$$

d'où

$$\varphi_3 = \frac{a}{3}x^3 + (b - c')x^2y + (b' - c)xy^2 + \frac{a'}{3}y^3.$$

Nous avons ensuite

$$(14)\quad x\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} = (ax^2 + bxy + cy^2)\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} - (a'y^2 + b'xy + c'x^2)\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}.$$

Le premier membre de (14) ne contient pas de terme en x^2y^2, il doit donc en être de même du second. On obtient ainsi la condition

$$(15)\qquad bc = b'c'.$$

On remarquera la symétrie qui se présente dans les calculs : les deux derniers termes de φ_3 se déduisent des deux premiers en permutant x, a, b, c respectivement avec y, a', b', c'; les deux produits qui sont dans le second membre de (14) se déduisent l'un de l'autre par la même règle. Cette remarque simplifie les calculs et permet des vérifications.

Distinguons maintenant les cas suivants :

1° *On a* $cc' \neq 0$. On peut alors, d'après ce qui a été dit, faire $c = 1$, $c' = 1$; on aura $b = b'$. Nous écrivons l'équation sous la forme

$$(A)\qquad (x + x^2 + \mu xy + by^2)\,dy + (y + y^2 + \mu xy + ax^2)\,dx = 0.$$

2° *On a* $c = 0$, $c' \neq 0$. Il en résulte qu'on a $b' = 0$. Nous écrirons l'équation sous la forme

$$(B)\qquad (x + x^2 + a'y^2)\,dy + (y + ax^2 + bxy)\,dx = 0.$$

En permutant le rôle de x et de y, nous considérerons en même temps le cas où l'on a $c \neq 0$, $c' = 0$, $b = 0$.

3° *On a* $c = 0$, $c' = 0$. L'équation s'écrit

$$(C)\qquad (x + a'y^2 + b'xy)\,dy + (y + ax^2 + bxy)\,dx = 0.$$

Examinant ensuite chacun des trois types d'équation, nous allons chercher quelles sont les nouvelles relations qui doivent être vérifiées pour qu'il y ait centre. Nous serons obligés de refaire pour chacun de ces cas des calculs analogues. On pourrait penser qu'il y a avantage à faire une fois pour toutes ces calculs avec une

équation du type général (10). Il m'a semblé qu'il était plus court et plus sûr de traiter séparément chacun des trois cas : dans chacun d'eux se présentent des simplifications que ne comporte pas le cas général.

Nous remarquerons que, pour les équations (A), (B), (C), le coefficient du terme en x^2y^2 dans φ_1 peut être pris arbitrairement; il en sera de même pour le terme en x^3y^3 si une nouvelle condition est vérifiée, et ainsi de suite. Nous pourrons toujours prendre ces coefficients arbitraires égaux à zéro. J'ai démontré en effet (*Journal de l'École Polytechnique*, 1905, p. 22) que les valeurs qu'on peut donner à ces constantes arbitraires n'interviennent pas dans les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'on ait un centre. Cette remarque, bien que n'étant pas indispensable, abrège des calculs déjà suffisamment longs.

4. *Équations du type* (A). — L'intégrale générale de l'équation (A) est donnée par

$$x\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = (y^2 + \mu xy + ax^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - (x^2 + \mu xy + by^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}.$$

Nous avons

$$\varphi_3 = \frac{a}{3}x^3 + (\mu - 1)x^2y + (\mu - 1)xy^2 + \frac{by^3}{3}.$$

En posant ensuite

$$a = \alpha(\mu - 1), \qquad b = \beta(\mu - 1),$$

nous obtenons successivement

$$\varphi_4 = (\mu - 1)(\mu - 2)\left(\frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\alpha + 1}{2}x^3y + \frac{\beta + 1}{2}xy^3 + \frac{\beta}{4}y^4\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{2\varphi_5}{(\mu-1)(\mu-2)} = {} & \frac{\alpha^2(\mu-1) + \alpha(\mu-3)}{5}x^5 + \frac{\mu - 3 - \alpha(\mu+3)}{3}x^4y \\ & - [\alpha\beta(\mu-1) - 2\alpha + 1 - 3\mu]x^3y^2 \\ & + [\alpha\beta(\mu-1) - 2\beta + 1 - 3\mu]x^2y^3 \\ & + \frac{\mu - 3 - \beta(\mu+3)}{3}xy^4 + \frac{\beta^2(\mu-1) + \beta(\mu-3)}{5}y^5.\end{aligned}$$

φ_6 est ensuite donné par l'identité

$$x\frac{\partial\varphi_6}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi_6}{\partial y} = [y^2 + \mu xy + \alpha(\mu-1)x^2]\frac{\partial\varphi_5}{\partial y} - [x^2 + \mu xy + \beta(\mu-1)]\frac{\partial\varphi_5}{\partial x};$$

en remarquant que le second membre ne doit pas contenir de terme en x^3y^3, on obtient la condition

$$(\mu-2)(\mu-1)\mu(2\mu+1)(\alpha-\beta)=0,$$

qui revient à

$$(\mu-2)\mu(2\mu+1)(a-b)=0.$$

Suivant que nous annulons l'un ou l'autre des quatre facteurs du premier membre de cette équation, nous obtenons les quatre catégories suivantes d'équations, pour lesquelles il peut y avoir centre :

1° $a=b$. On a l'équation

$$(A_1)\quad (x+x^2+\mu xy+ay^2)\,dy+(y+y^2+\mu xy+ax^2)\,dx=0.$$

2° $\mu=2$. On a l'équation

$$(A_2)\quad (x+x^2+2xy+by^2)\,dy+(y+y^2+2xy+ax^2)\,dx=0.$$

3° $\mu=0$. On a l'équation

$$(A_3)\qquad (x+x^2+by^2)\,dy+(y+y^2+ax^2)\,dx=0.$$

4° $2\mu+1=0$. On a l'équation

$$(A'_4)\quad \left(x+x^2-\frac{xy}{2}+by^2\right)dy+\left(y+y^2-\frac{xy}{2}+ax^2\right)dx=0.$$

Si l'on continue les calculs pour (A_1), (A_2), (A_3) et si l'on détermine φ_7 et φ_8, on voit qu'aucune nouvelle condition ne se présente dans la détermination de φ_8. Il n'en est pas ainsi pour l'équation (A'_4); pour qu'on puisse déterminer φ_8, il faut qu'on ait $ab=\frac{1}{4}$.

En changeant, dans A'_4, x en $2x$ et y en $2y$, nous pourrons écrire cette équation sous la forme

$$(A_4)\quad (x+2x^2-xy+by^2)\,dy+(y+2y^2-xy+ax^2)\,dx=0,$$

avec la condition

$$ab=1.$$

5. *Équations du type* (B). — L'équation est

$$(x+x^2+a'y^2)\,dy+(y+ax^2+bxy)\,dx=0.$$

Nous pouvons distinguer les deux cas suivants :

1° $a' = 0$. On a l'équation linéaire en y

$$(B_1) \qquad (x + x^2)\,dy + (y - ax^2 - bxy)\,dx = 0.$$

2° $a' \neq 0$. On peut alors, comme nous l'avons dit, supposer $a' = 1$, et l'on a l'équation

$$(x + x^2 + y^2)\,dy + (y + ax^2 + bxy)\,dx = 0.$$

En opérant, comme précédemment, on obtient successivement

$$\varphi_3 = \frac{ax^3}{3} + (b-1)x^2y - \frac{y^3}{3},$$

$$\varphi_4 = (b-2)\left[\frac{ax^4}{4} + (b-1)x^2y - xy^3\right],$$

$$\varphi_5 = (b-2)\left[\frac{a(b-3)}{5}x^5 + \frac{(b-3)(b-1)}{3}x^4y + ax^3y^3 - 2x^2y^3 + \frac{y^5}{5}\right].$$

Pour qu'on puisse déterminer $\varphi_6(x, y)$, il faut qu'on ait

$$(b-2)\,b\,(2b+1) = 0;$$

de là les cas suivants :

(α). *On a* $b = 2$. L'équation devient

$$(B_2) \qquad (x + x^2 + y^2)\,dy + (y + ax^2 + 2xy)\,dx = 0.$$

(β). *On a* $b = 0$. L'équation devient

$$(B_3) \qquad (x + x^2 + y^2)\,dy + (y + ax^2)\,dx = 0.$$

(γ). *On a* $b = -\frac{1}{2}$. Si l'on fait $b = -\frac{1}{2}$ dans les expressions déjà obtenues pour φ_3, φ_4, φ_5, et si l'on calcule φ_6 et φ_7, on trouve que la condition, pour que φ_8 existe, est

$$a = 0.$$

En changeant x en $2x$ et y en $y\sqrt{2}$ dans l'équation obtenue, on obtient l'équation

$$(B_4) \qquad (x + 2x^2 + y^2)\,dy + (y - xy)\,dx = 0.$$

6. *Équations du type* (C). — On a l'équation

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (ax^2 + bxy)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - (a'x^2 + b'xy)\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

On obtient

$$\varphi_3 = \frac{a}{3}x^3 + bx^2y + b'xy^2 + \frac{a'y^3}{3},$$

$$\varphi_4 = \frac{ab}{4}x^4 + \frac{ab' + b^2}{2}x^3y + \frac{ba' + b'^2}{2}xy^3 + \frac{a'b'}{4}y^4,$$

$$\varphi_5 = \frac{a(ab' + b^2)}{5}x^5 + \frac{b(b^2 - ab')}{5}x^4y + b(aa' - 3bb')x^3y^2$$
$$+ b'(aa' - 3bb')x^2y^3 + b'(b'^2 - ba')xy^4 + \frac{a'(ba' + b'^2)}{5}y^5.$$

En cherchant à calculer φ_6, on obtient la condition

$$ab'^3 - b^3a' = 0,$$

d'où les trois cas suivants :

1° *On a* $bb' \neq 0$. On peut alors supposer $b = 1$, $b' = 1$; on a alors $a = a'$ et l'équation devient

$$(C_1) \qquad (x + xy + ay^2)\,dy + (y + xy + ax^2)\,dx = 0.$$

2° *On a* $b' = 0$, $b \neq 0$. On a, par suite, $a' = 0$, et l'équation devient

$$(C_2) \qquad x\,dy + (y + xy + ax^2)\,dx = 0.$$

En permutant les rôles de x et de y, nous considérerons comme rentrant dans ce cas le cas où l'on a $b = 0$, $b' \neq 0$.

3° *On a* $b = 0$, $b' = 0$. On obtient l'équation

$$(C_3) \qquad (x + a'y^2)\,dy + (y + ax^2)\,dx = 0.$$

7. *Classement des équations obtenues.* — Écrivons, avec de légers changements dans les notations, les onze équations obtenues :

$$(A_1) \quad (x + x^2 + \mu xy + ay^2)\,dy + (y + y^2 + \mu xy + ax^2)\,dx = 0,$$
$$(A_2) \quad (x + x^2 + 2xy + by^2)\,dy + (y + y^2 + 2xy + ax^2)\,dx = 0,$$
$$(A_3) \quad (x + x^2 + by^2)\,dy + (y + y^2 + ax^2)\,dx = 0,$$
$$(A_4) \quad (x + 2x^2 - xy + by^2)\,dy + (y + 2y^2 - xy + ax^2)\,dx = 0$$
$$(\text{avec } ab = 1),$$
$$(B_1) \quad (x + x^2)\,dy + (y + ax^2 + bxy)\,dx = 0,$$
$$(B_2) \quad (x + x^2 + y^2)\,dy + (y + ax^2 + 2xy)\,dx = 0,$$
$$(B_3) \quad (x + x^2 + y^2)\,dy + (y + ax^2)\,dy = 0,$$
$$(B_4) \quad (x + 2x^2 + y^2)\,dy + (y - xy)\,dx = 0,$$
$$(C_1) \quad (x + xy + ay^2)\,dy + (y + xy + ax^2)\,dx = 0,$$
$$(C_2) \quad x\,dy + (y + xy + ax^2)\,dx = 0,$$
$$(C_3) \quad (x + by^2)\,dy + (y + ax^2)\,dx = 0.$$

Nous pouvons grouper ces équations de telle manière que dans chaque groupe on ait similitude de forme :

1° Les premiers membres des équations (A_2) et (B_2) sont des différentielles exactes; leur intégration est immédiate et montre que $x = 0$, $y = 0$ est bien un centre.

2° Les équations (A_1) et (C_1) ne changent pas lorsqu'on permute x et y.

3° Les équations (B_1) et (C_2) sont linéaires en y.

4° Les équations (A_3), (B_3), (C_3) rentrent dans la forme générale

$$(x + \alpha x^2 + \beta y^2)\,dy + (y + b x^2 + a y^2)\,dx = 0.$$

5° et 6° Nous considérons enfin les équations A_4 et B_4

Avant de passer à l'intégration de ces diverses équations, qui nous permettra de vérifier qu'on a bien un centre, voyons sous quelle forme se présentent les équations (10) correspondantes, lorsqu'on n'a pas remplacé au préalable x par hx et y par ky, de manière à donner la valeur 1 à certains coefficients. Pour obtenir cette forme, il suffit de remplacer, dans les équations obtenues, x par hx et y par ky.

1° Les équations A_2 et B_2 prennent la forme

$$\text{(I)}\quad (x + h x^2 + 2kxy + \beta y^2)\,dy + (y + k y^2 + 2hxy + \alpha x^2)\,dx = 0;$$

pour (B_2) on a $k = 0$.

2° En posant $a = \alpha hk$, les équations A_1 et C_1 deviennent respectivement

$$\text{(II)}\quad (x + h x^2 + \mu kxy + \alpha k^2 y^2)\,dy + (y + k y^2 + \mu hxy + \alpha h^3 x^2)\,dx = 0,$$
$$\text{(III)}\quad (x + k xy + \alpha k^3 y^2)\,dy \qquad + (y + hxy + \alpha h^3 x^2)\,dx \qquad = 0.$$

3° Quelles que soient les valeurs de h et de k, les équations (B_1) et (C_2) sont de la forme

$$\text{(IV)}\qquad (x + c x^2)\,dy + (y + a x^2 + bxy)\,dx = 0.$$

4° De même les équations (A_3), (B_3), (C_3) sont toujours de la forme

$$\text{(V)}\qquad (x + \alpha x^2 + \beta y^2)\,dy + (y + a y^2 + b x^2)\,dx = 0.$$

5° L'équation (A_4) prend la forme

$$(\text{VI})\quad (x - 2hx^2 - kxy + \beta y^2)\,dy + (y + 2ky^2 - hxy + \alpha x^2)\,dx = 0,$$

avec la condition

$$\alpha\beta = hk.$$

6° L'équation (B_4) prend la forme

$$(\text{VII})\qquad (x + 2hx^2 + \beta y^2)\,dy + (y - hxy)\,dx = 0.$$

Il faut ajouter à ces équations celles qui s'en déduisent en changeant x en y et y en x.

8. *Intégration des équations* (II) *et* (III). — Nous prendrons ces deux équations sous les formes réduites (A_1) et (C_1), ou plutôt sous la forme

$$(16)\quad (x + bx^2 + \mu xy + ay^2)\,dy + (y + by^2 + \mu xy + ax^2)\,dx = 0,$$

qui comprend (A_1) et (C_1) comme cas particuliers.

Posons

$$xy = u, \qquad x + y = v;$$

l'équation devient

$$(1 + bv - av)\,du + (\mu u - bu - au + av^2)\,dv = 0,$$

qui, en posant

$$b - a = \beta, \qquad \mu - b - a = \alpha,$$

s'écrit

$$(17)\qquad (1 + \beta v)\frac{du}{dv} + \alpha u + av^2 = 0.$$

L'intégrale générale $\psi(u, v) = C$ de cette équation sera donnée par

$$(1 + \beta v)\frac{\partial\psi}{\partial v} = (\alpha u + av^2)\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Sans même intégrer cette équation, on peut mettre en évidence qu'on a toujours un centre. En effet, cette équation admet pour solution une fonction holomorphe pour $u = 0$, $v = 0$, et qui se réduit à u pour $v = 0$. En remplaçant u et v par leurs valeurs, cette solution donne bien la forme de développement convenant à un centre. Il est facile d'obtenir explicitement ce développement.

On a

$$(18)\quad \varphi(x,y) = u\left[1 + \alpha v + \frac{\alpha(\alpha-\beta)v^2}{1.2} + \frac{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)}{1.2.3}v^3 + \ldots\right]$$
$$+ a\left[\frac{v^3}{3} + \frac{\alpha-\beta}{1}\frac{v^4}{4} + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)}{1.2}\frac{v^5}{5}\right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)(\alpha-3\beta)}{1.2.3}\frac{v^6}{6} + \ldots\right],$$

développement qui est convergent pour $|\beta(x+y)| < 1$.

On arrive à la même conclusion en intégrant l'équation linéaire (17). On obtient

$$(19)\quad \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)u + a[\alpha(\alpha+\beta)v^2 - 2\alpha v + 2]}{(1+\beta v)^{-\frac{\alpha}{\beta}}} = \text{const.}$$

En retranchant 2 aux deux membres et développant le premier membre en série de Mac-Laurin, on obtient bien la forme d'intégrale qui convient à un centre. Nous laisserons de côté les cas particuliers faciles à traiter où l'on a

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta) = 0.$$

Dans ces cas, l'intégrale en termes finis se présente sous une forme un peu différente de (19), mais la forme (18) d'intégrale générale subsiste toujours.

9. *Intégration des équations* (IV). — Nous avons l'équation

$$(20)\qquad (x + cx^2)\,dy + (y + ax^2 + bxy)\,dx = 0.$$

Si nous considérons d'abord le cas où c n'est pas nul, nous pouvons supposer $c = 1$ pour simplifier l'écriture. Nous obtenons immédiatement l'intégrale générale

$$\frac{b(b^2-1)xy + ab(b-1)x^2 - 2a(b-1)x + 2a}{(1+x)^{1-b}} = \text{const.}$$

En retranchant $2a$ aux deux membres et développant le premier en série de Mac-Laurin, on obtient la forme d'intégrale convenant à un centre.

Dans le cas où l'on a

$$b(b^2-1) = 0.$$

on aurait une forme un peu différente d'intégrale avec un terme en $\log(1+x)$; mais, en développant encore en série, on voit encore qu'on a un centre. Par exemple, si l'on a $b=0$, on a pour intégrale générale

$$\frac{xy+ax^2+2ax-2a(1+x)\log(1+x)}{1+x}=\text{const.}$$

Si nous considérons ensuite le cas où $c=0$, c'est-à-dire le cas de l'équation (C_1), nous avons l'intégrale

$$(b^3xy-ab^2x^2-2abx-2a)\,e^{-bx}=\text{const.}$$

Le cas où l'on a en même temps $b=0$ sera considéré dans la suite.

10. *Intégration des équations* (V). — Soit l'équation

$$(x+\alpha x^2+\beta y^2)\,dy+(y+ay^2+bx^2)\,dx=0. \tag{21}$$

Cherchons si cette équation admet pour solution une droite

$$1+ux+vy=0.$$

Il faut pour cela qu'on ait

$$(x+\alpha x^2+\beta y^2)\,u-(y+ay^2+bx^2)\,v\equiv(ux-vy)(1+ux+vy). \tag{22}$$

On doit donc avoir

$$\alpha u-bv=u^2, \tag{23}$$

$$av-\beta u=v^2. \tag{24}$$

Considérons dans ces équations u et v comme les coordonnées d'un point. Ces deux équations représentent deux paraboles passant par l'origine et qui auront en général trois autres points d'intersection distincts. Il y a donc, en général, trois droites qui sont des solutions particulières de l'équation (21). Pour obtenir les solutions communes aux deux équations (23) et (24), on peut former l'équation homogène

$$(av-\beta u)\,u^2-(\alpha u-bv)\,v^2=0, \tag{25}$$

qui donne les rapports des quantités u et v relatives aux points communs. Cette équation ne diffère que par le changement de u

en y et de v en $-x$ de l'équation

$$(26) \qquad (\alpha x^2 + \beta y^2)\, y + (a y^2 + b x^2)\, x = 0,$$

qui donne les points singuliers à l'infini de l'équation (21).

En examinant les différents cas qui peuvent se présenter dans l'intersection des deux paraboles (23) et (24) nous sommes amenés à étudier les cas suivants :

1° *Les paraboles se coupent en trois points distincts autres que l'origine.* — Soient u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 les coordonnées des trois points d'intersection et f_1, f_2, f_3 les premiers membres des équations des trois droites correspondantes. Il est toujours possible de trouver trois nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dont aucun n'est nul et tels qu'on ait

$$\lambda_1(u_1 x - v_1 y) + \lambda_2(u_2 x - v_2 y) + \lambda_3(u_3 x - v_3 y) = 0.$$

On a donc, d'après l'identité (22), où u et v sont remplacés successivement par u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3,

$$\begin{aligned}(x + \alpha x^2 + \beta y^2)&\left(\frac{\lambda_1 u_1}{f_1} + \frac{\lambda_2 u_2}{f_2} + \frac{\lambda_3 u_3}{f_3}\right)\\ -(y + a y^2 + b x^2)&\left(\frac{\lambda_1 v_1}{f_1} + \frac{\lambda_2 v_2}{f_2} + \frac{\lambda_3 v_3}{f_3}\right) = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que l'équation (21) admet pour intégrale générale [1]

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} = \text{const.}$$

On vérifie facilement qu'en retranchant 1 aux deux membres de cette égalité et en développant le premier membre en série, ce développement prend, en vertu des relations que vérifient les u, les v, les λ, la forme qui convient à un centre.

2° *Les paraboles sont tangentes à l'origine et se coupent en deux autres points distincts entre eux.* — On voit immédiatement que, pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait

$$(27) \qquad a\alpha = b\beta.$$

---

[1] On verra, en consultant le Mémoire cité de M. Darboux, que les procédés d'intégration employés dans ce cas et dans les suivants sont l'application des méthodes données dans ce Mémoire.

Soient u_1, v_1; u_2, v_2 les coordonnées des deux points d'intersection autres que l'origine, communs aux deux paraboles; f_1 et f_2 les droites correspondantes. Remarquons que, d'après (27), on a

$$(x + \alpha x^2 + \beta y^2)\, a - (y + a y^2 + b x^2)\, \beta \equiv a x - \beta y.$$

On peut trouver des nombres λ, μ, ν dont aucun n'est nul et tels qu'on ait

$$\lambda (u_1 x - v_1 y) + \mu (u_2 x - v_2 y) + \nu (a x - \beta y) = 0.$$

Nous avons par suite l'identité

$$(x + \alpha x^2 + \beta y^2) \left(\frac{\lambda u_1}{f_1} + \frac{\mu u_2}{f_2} + \nu a \right)$$
$$- (y + a y^2 + b x^2) \left(\frac{\lambda v_1}{f_1} + \frac{\mu v_2}{f_2} + \nu \beta \right) \equiv 0,$$

d'où il résulte que l'intégrale générale de l'équation est donnée par

$$(28) \qquad f_1^{\lambda} f_2^{\mu} e^{\nu a x + \nu \beta y} = \text{const.},$$

qui, en opérant comme précédemment, met en évidence que l'origine est un centre. Je remarquerai du reste, une fois pour toutes, qu'il n'est pas nécessaire de faire les calculs pour être certain qu'après avoir retranché 1 aux deux membres de l'égalité et après avoir développé le premier membre, les termes de degré minimum en x et en y se réduisent au terme xy. En effet, de l'égalité (28) il résulte que l'équation est vérifiée par un développement procédant suivant les puissances de x et y, développement n'ayant pas de terme constant. Or, un pareil développement ne peut commencer que par un terme en xy. Les termes du premier degré en x, en y et les termes en x^2 et y^2 disparaissent donc dans le développement du premier membre de (28).

Le raisonnement que nous avons fait suppose que a et β ne sont pas nuls tous les deux. S'ils étaient nuls, on ferait jouer à b et à α les rôles respectifs joués par b et β. Si b et α étaient aussi nuls l'intégrale serait $xy = \text{const.}$

3° *Les paraboles ne sont pas tangentes à l'origine, mais sont tangentes en un autre point.* — Pour obtenir des valeurs des coefficients α, β, a, b telles que ces conditions soient vérifiées, procédons de la façon suivante, en considérant tout d'abord un cas

un peu plus général et qui comprend tous ceux laissés de côté par 1° et 2°. Ce cas est celui où l'équation (25) et par suite l'équation (26) admettent une racine double. Si le facteur du premier membre de (26) qui correspond à cette racine double n'est ni x^2 ni y^2, nous pouvons toujours en remplaçant x par hx supposer que ce facteur est $(x+y)^2$; soit $cx+ey$ le facteur correspondant à la troisième racine. En identifiant le premier membre de l'équation (26) avec le produit $(x+y)^2(cx+ey)$, nous avons les valeurs de α, β, a, b et l'équation (21) s'écrit

$$(29)\quad [x+(2c+e)x^2+ey^2]\,dy+[y+cx^2+(2e+c)y^2]\,dx=0.$$

On trouve immédiatement que l'équation admet pour solution les deux droites

$$(30)\qquad 1+(c+e)(x+y)=0,$$

$$(31)\qquad 1+2cx+2ey=0.$$

Prenons ces deux droites pour nouveaux axes O'X et O'Y, et faisons le changement de variables

$$X=1+(c+e)(x+y),$$
$$Y=1+2cx+2ey.$$

On obtient par un calcul relativement court l'équation

$$X[(c^2-e^2)X-(c+e)^2Y]\,dY+Y[(c+e)^2Y-4ceX-(c-e)^2]\,dX=0.$$

En divisant par X^2Y, le premier membre devient une différentielle exacte, d'où l'intégrale générale [1]

$$\frac{(c-e)^2-(c+e)^2Y+4ceX+(c^2-e^2)X\log Y-4ceX\log X}{X}=\text{const.}$$

En remplaçant X et Y par leurs expressions, on met en évidence que l'origine est centre.

---

[1] On est conduit à cette façon d'opérer en cherchant à déterminer un multiplicateur au moyen de solutions particulières. On peut du reste démontrer que si l'équation

$$(x+a'y^2+b'xy+c'x^2)\,dy+(y+ax^2+bxy+cy^2)\,dx=0$$

admet pour solutions particulières deux courbes $A=0$, $B=0$ ne passant pas par l'origine, mais dont les équations contiennent des termes du premier degré en x et y, l'équation admet, en général, un multiplicateur de la forme $A^\lambda B^\mu$.

Notre solution relative au cas où l'équation (26) admet une racine double laisse de côté les cas suivants :

a. Les deux droites (30) *et* (31) *sont parallèles.* — On a $c = e$.

b. La droite (30) *est rejetée à l'infini.* — On a $c = -e$.

c. Le facteur double de (26) *est soit* x^2, *soit* y^2. — Nous pouvons toujours supposer, en changeant les rôles de x et de y, que ce facteur est x^2.

Il n'est pas inutile de remarquer que, si l'on n'est dans aucun de ces trois cas, les deux paraboles (23) et (24) ont un point de contact et un point d'intersection distincts et distincts de l'origine. Nous avons donc bien traité le cas 3°. Dans les cas (a), (b), (c) on a les circonstances suivantes :

a. Les paraboles sont osculatrices en un point distinct de l'origine.

b. Les paraboles sont osculatrices à l'origine.

c. Une des paraboles est une droite double.

Examinons successivement ces trois cas sous les titres 4°, 5°, 6°.

4° *Les paraboles sont osculatrices en un point distinct de l'origine.* — On a $c = e$ et l'équation (29) devient

$$(x + 3cx^2 + cy^2)\,dy + (y + cx^2 + 3cy^2)\,dx = 0.$$

Cette équation ne change pas en changeant x en y et y en x, elle rentre dans le cas que nous avons considéré de l'équation (16). En employant les notations employées pour cette équation nous aurons

$$\beta = 2c, \qquad \alpha = -\tfrac{1}{2}c, \qquad \alpha + 2\beta = 0.$$

Nous sommes dans un des cas où l'intégration introduit des termes logarithmiques. En faisant $c = \frac{1}{2}$ comme on peut le faire sans diminuer la généralité, on obtient l'intégrale générale

$$\frac{4xy + 2(1 + x + y)^2 \log(1 + x + y) - 2(x + y) - 3(x + y)^2}{(1 + x + y)^2} = \text{const.}$$

L'origine est encore centre.

5° *Les paraboles sont osculatrices à l'origine.* — On a $e = -c$. L'équation (29) s'écrit

$$(x + cx^2 - cy^2)\,dy + (y + cx^2 - cy^2)\,dx = 0.$$

En changeant y en $-y$ cette équation devient

$$(x + cx^2 - cy^2)\,dy + (y + cy^2 - cx^2)\,dx = 0,$$

qui est encore un cas particulier de l'équation (16). On a $\alpha = 0$, en employant les notations employées pour (16). En faisant $c = \frac{1}{2}$ on a l'intégrale générale

$$4xy - 2\log(1 + x + y) + 2(x + y) - (x + y)^2 = \text{const.}$$

L'origine est un centre.

6° *Une des paraboles est une droite double.* — Cette droite double étant $x^2 = 0$, l'équation (21) devient

$$(x + \alpha x^2)\,dy + (y + bx^2)\,dx = 0.$$

Si α est nul, l'intégrale générale est

$$xy + \frac{bx^3}{3} = \text{const.}$$

Si α n'est pas nul, on peut le supposer égal à 1 et l'intégrale est

$$\frac{xy + 2bx + bx^2 - 2b(1 + x)\log(1 + x)}{1 + x} = \text{const.}$$

On a un centre.

11. *Intégration des équations* (VI). — Nous prenons ces équations sous la forme

$$(32) \qquad (x + 2x^2 - xy + by^2)\,dy + (y + 2y^2 - xy + ax^2)\,dx = 0,$$

avec la condition $ab = 1$. Nous prenons, dans (VI), $h = 1$, $k = 1$, comme nous en avons le droit. On voit immédiatement qu'en général l'équation n'admet pas de droite pour intégrale particulière. Cherchons si cette équation admet pour solution une conique ne passant pas par l'origine

$$f(x, y) \equiv 1 + u_1 x + v_1 y + \alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \gamma_1 y^2 = 0.$$

Nous devons avoir

$$(33) \qquad (x + 2x^2 - xy + by^2)\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$- (y + 2y^2 - xy + ax^2)\frac{\partial f}{\partial y} = (u_1 x - v_1 y)\,f(x, y).$$

L'identification des deux membres conduit à sept équations à cinq inconnues, qui se trouvent avoir des solutions en vertu de la condition $ab = 1$. Nous trouvons

$$(34) \qquad f(x,y) \equiv 1 + 2x + 2y + ax^2 + 2xy + by^2.$$

Cherchons si l'équation admet pour solution une cubique ne passant pas par l'origine

$$\begin{aligned} F(x,y) \equiv{} & 1 + 3ux + 3vy \\ & + 3\alpha x^2 + 3\beta xy + 3\gamma y^2 + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0. \end{aligned}$$

On doit avoir

$$(35) \qquad \begin{aligned} & (x + 2x^2 - xy + by^2)\frac{\partial F}{\partial x} \\ & \quad - (y + 2y^2 - xy + ax^2)\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 3(ux - vy)\,F(x,y). \end{aligned}$$

L'identification fournit douze équations à neuf inconnues qui admettent encore des solutions en vertu de la condition $ab = 1$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} F(x,y) \equiv{} & 1 + 3(x+y) + \frac{3}{2}[(a+1)x^2 + (2+a+b)xy + (b+1)y^2] \\ & + \frac{a(a+1)x^3 + 3(a+1)x^2y + 3(b+1)xy^2 + b(b+1)y^3}{2}. \end{aligned}$$

Comme nous avons

$$u_1x - v_1y \equiv 2(x-y), \qquad 3(ux - vy) \equiv 3(x-y),$$

on conclut immédiatement des identités (33) et (35) que l'équation (32) admet pour intégrale générale [1]

$$\frac{[f(x,y)]^3}{[F(x,y)]^2} = \text{const.}$$

En développant en série de Mac-Laurin, on voit encore qu'on a un centre.

On peut remarquer que la conique $f(x,y) = 0$ est tangente à

---

[1] Comparer avec le résultat obtenu par M. Darboux dans le Mémoire cité page 154. On aurait pu encore intégrer l'équation (32) en montrant que $f^{-\frac{3}{2}}$ est un multiplicateur.

la droite de l'infini au point

$$(a-1)x+(b+1)y=0.$$

La cubique est tangente en ce même point à la droite de l'infini et y présente de plus un point double. Elle a par conséquent une direction asymptotique triple.

12. *Intégration des équations* (VII). — Prenons, comme nous pouvons toujours le faire, ces équations sous la forme

$$(36)\qquad (x+2x^2+y^2)\,dy+(y-xy)\,dx=0.$$

Cette équation n'admet comme solution pas d'autre droite que la droite $y=0$. Si nous posons par raison de symétrie $\psi\equiv y$, nous aurons

$$(37)\qquad (x+2x^2+y^2)\frac{\partial\psi}{\partial x}-(y-xy)\frac{\partial\psi}{\partial y}\equiv(-1+x)\psi.$$

Cherchons si l'équation admet pour solution une conique ne passant pas par l'origine

$$f(x,y)\equiv 1+ux+vy+Ax^2+Bxy+Cy^2=0.$$

Nous devons avoir

$$(38)\qquad (x+2x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}-(y-xy)\frac{\partial f}{\partial y}\equiv(ux-vy)f(x,y).$$

Les équations obtenues par l'identification sont compatibles, bien que ne contenant que cinq inconnues pour sept équations. On obtient, tous calculs faits,

$$f(x,y)\equiv 1+2x+y^2,$$
$$ux-vy\equiv 2x.$$

Cherchons si l'équation n'admet pas pour solution une conique passant par l'origine. Comme nous avons déjà la solution $y=0$, correspondant à une des deux courbes analytiques passant par le point singulier, cherchons si, pour l'autre direction possible de tangente à l'origine, la direction $x=0$, il n'y a pas comme solution une conique tangente à Oy

$$F(x,y)=x+A_1x^2+B_1xy+C_1y^2.$$

Nous devons avoir

$$(39)\quad (x+2x^2+y^2)\frac{\partial F}{\partial x}-(y-xy)\frac{\partial F}{\partial y}\equiv(1+u_1x+v_1y)\,F(x,y).$$

Les équations obtenues par l'identification sont compatibles et l'on trouve

$$F(x,y)=x+\frac{y^2}{3};$$

$$1+u_1x+v_1y\equiv 1+2x.$$

Si nous considérons les facteurs qui multiplient respectivement ψ, f et F dans les seconds membres de (37), (38), (39), nous voyons immédiatement qu'on a

$$2(-1+x)-3(2x)+2(1+2x)\equiv 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (36) est par conséquent

$$\frac{y^2(3x+y^2)^2}{(1+2x+y^2)^3}=\text{const.}$$

On a bien un centre.

On aurait pu encore intégrer l'équation en remarquant que $(1+2x+y^2)^{-\frac{2}{5}}$ est un multiplicateur.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Arrhenius (Svante). — *Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten. Das Werden der Welten.* Neue Folge. Aus dem Schwed, von L. Bamberger. Gr. in-8°, xi-191 p. avec 28 fig. Leipzig, Akademischer Verlag. 5 m.; relié, 6 m.

Enquête de l'enseignement mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens; publié par H. Fehr. In-8°, 126 p. Genève, Georg et Cie 4 m.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FABRY (E.). — Traité de Mathématiques générales a l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des Facultés des Sciences. 1 volume in-8, x-440 pages. Paris, Hermann et fils, 1909.

La période qui s'est écoulée depuis 1889 jusqu'au commencement du XXe siècle a vu s'accomplir de profonds changements dans l'organisation et le régime des Facultés des Sciences. Dès 1893, elles avaient reçu la mission très honorable d'organiser une première année d'*études physiques, chimiques et naturelles* préparatoire à la carrière médicale. Mais le régime des études de licence conservait encore, à cette époque, la forme invariable qui lui avait été attribuée par le décret de mars 1808. Seules de tous nos établissements d'Enseignement supérieur, les Facultés des Sciences restaient soumises à des programmes minutieusement réglés, qui portaient toujours, depuis l'origine, sur les mêmes branches de la Science et laissaient peu d'initiative, soit aux maîtres, soit aux étudiants.

Pourtant, depuis 1808, les cadres de notre Enseignement s'étaient notablement élargis. A mesure que naissaient des sciences nouvelles, l'État créait des chaires correspondantes, soit dans les départements, soit à Paris. Nous avons vu apparaître dans les Facultés des chaires de *Chimie organique*, de *Chimie industrielle*, de *Chimie biologique*; à côté de la *Physique générale* était venue se placer la *Physique mathématique*, cette création de la Science française, qui joue aujourd'hui un rôle prépondérant; des enseignements distincts avaient été institués pour la *Physique industrielle*, pour l'*Algèbre*. Par trois décrets rendus le même jour sous le gouvernement de Louis-Philippe, l'État avait créé, à la Faculté des Sciences de Paris, trois chaires consacrées respectivement à la *Géométrie supérieure*, à la *Mécanique céleste*, au *Calcul des probabilités* et à la *Physique mathématique*. Tandis que le pro-

gramme des trois licences : *licence ès sciences mathématiques, licence ès sciences physiques, licence ès sciences naturelles,* aurait pu être développé avec sept à huit chaires seulement, certaines Facultés comptaient dix et onze chaires; celle de Paris en avait vingt et une.

Pendant que s'élargissaient ainsi les cadres de l'Enseignement, ceux des examens de licence demeuraient à peu près invariables. Sans doute, en 1877, on avait remanié et étendu beaucoup les programmes, pour essayer de les mettre plus en harmonie avec les découvertes qui se succèdent chaque jour. Mais les remaniements n'avaient modifié en rien le caractère de l'examen. La vieille conception subsistait toujours. La licence était un grade d'État. Ce grade devait être partout identique à lui-même, et l'État, se rappelant la vieille dénomination : *licentia docendi,* faisait figurer dans ses programmes les seules matières qui lui paraissaient devoir être exigées des aspirants à l'Enseignement.

Cette organisation, qui était le contre-pied de celle des Universités allemandes, présentait des inconvénients et des dangers de plus d'une sorte. Les étudiants, assujettis à des études qui étaient limitées par un programme à la fois trop précis et trop chargé, les poursuivaient le plus souvent sans ardeur et sans goût. D'autre part, comme des garanties de culture générale étaient à bon droit exigées des candidats aux agrégations, on n'avait eu d'autre ressource que de demander à chacun d'eux *deux* diplômes de licencié. On imposait ainsi aux étudiants, au moment décisif où l'esprit se forme et s'oriente, un travail qui pouvait leur paraître fastidieux et inutile, au moins dans plusieurs de ses parties. Il semblait véritablement que nos Facultés n'eussent d'autre but et d'autre raison d'être que la préparation des futurs professeurs. Et d'ailleurs, elles s'attachaient à remplir leur tâche avec une telle précision que, lorsque l'encombrement des cadres, ou l'insuccès aux examens, obligeait les étudiants à renoncer à l'Enseignement, ils ne pouvaient, il faut bien le dire, tirer presque aucun parti des études trop spéciales qui leur avaient été imposées pendant les plus belles années de leur carrière.

Le décret soumis aux délibérations du Conseil supérieur vers la fin de 1895 et promulgué le 23 janvier 1896 est venu, par les moyens les plus simples, porter remède à cet état de choses. Il a

institué des *certificats d'études supérieures*, qui sont délivrés par chaque Faculté et qui correspondent aux matières enseignées par elles. Trois de ces certificats obtenus, soit dans la même session, soit dans des sessions différentes, permettent à l'étudiant de réclamer le *diplôme de licencié ès sciences*. Mention est faite sur le diplôme de ces trois certificats; et si, après cela, l'étudiant en recherche et en obtient d'autres, on ajoute, sur le diplôme même, les mentions relatives aux nouveaux certificats. Telle est en deux mots l'économie du nouveau projet; il a substitué aux trois types fournis par les anciennes licences une foule de combinaisons variées, très propres à encourager l'initiative personnelle, à éveiller les vocations scientifiques, à conserver l'originalité de l'esprit. Des dispositions très habilement prises, et dans le détail desquelles il est inutile d'entrer ici, ont permis d'ailleurs de maintenir les garanties que l'État avait exigées jusque-là des aspirants à l'Enseignement. On peut même affirmer que la souplesse de la nouvelle organisation a déterminé un meilleur aménagement des examens tout à fait supérieurs, tels que l'*agrégation*, destinés à une élite qui doit demeurer toujours l'objet de nos préoccupations.

Douze ans se sont écoulés depuis qu'a commencé à fonctionner la nouvelle organisation dont nous venons d'esquisser les traits principaux. Et l'on peut dire aujourd'hui, en toute justice, qu'elle n'a cessé de réaliser, de dépasser même les espérances de ceux qui l'avaient accueillie et votée dès le premier jour. Elle nous a donné, sous la forme la plus heureuse et la plus pratique, cette liberté des études qui nous paraissait nécessaire et que nous ne cessions de réclamer. Au lieu d'affaiblir la licence, comme le craignaient quelques-uns, elle l'a plutôt fortifiée. En même temps, elle a ouvert, dans les meilleures conditions et sur le pied d'égalité, les portes de nos Facultés à ces étudiants qu'attirait dans nos laboratoires le désir d'acquérir les notions de Science pratique qui deviennent de plus en plus indispensables à tout progrès industriel ou agricole. Il ne faut pas perdre de vue que les progrès matériels se rattachent chaque jour plus directement aux recherches les plus élevées de la Science pure. C'est un physicien *mathématicien*, lord Kelvin, qui a donné les moyens de lancer, pour la première fois, un câble à travers l'océan Atlantique. Ces progrès de l'industrie électrique, de l'industrie chimique, qui valent à nos voisins

des bénéfices annuels de plusieurs centaines de millions, ont été accomplis par des hommes sortis des Universités allemandes.

Tout cela, il ne faut pas craindre de le dire, a été admirablement compris par mes collègues des Facultés des Sciences. Ils ne se sont pas bornés à accueillir la réforme avec entrain ; ils ont mis tout leur dévouement à la faire réussir. Toutes les Facultés aujourd'hui distribuent un grand nombre de certificats. Paris en a 23, Nancy 20, Lille 16, Besançon 15, etc. Et il ne faut pas oublier qu'il ne suffit pas de créer un certificat sur le papier. Conformément au décret de 1896, il faut d'abord que la Faculté institue l'Enseignement correspondant. Beaucoup de nos collègues ont été ainsi conduits, pour le seul bien des études, pour réaliser des progrès qui leur tenaient au cœur, à s'imposer des travaux supplémentaires et à augmenter notablement le nombre d'heures qu'ils donnaient auparavant.

Il y avait autrefois trois manières, et trois seulement, de devenir licencié. On s'est amusé quelquefois à chercher le nombre des combinaisons qui, dans la nouvelle organisation, donneraient le diplôme de licencié. Le calcul est à la portée d'un élève de nos lycées. Avec les 23 certificats de la Faculté de Paris, il y aurait 1771 manières de devenir licencié. Avec les 20 certificats de Nancy, il n'y en aurait plus que 1440. Avec les 11 certificats de Marseille, il n'y en aurait plus que 165. C'est encore un chiffre respectable. Mais quel nombre gigantesque obtiendrions-nous si nous remarquions qu'on peut additionner des certificats pris dans les différentes Facultés? Ces calculs mettent en évidence, d'une manière frappante, un des avantages de la nouvelle organisation. Mais il faut les regarder comme un pur jeu de l'esprit. Il y a des certificats qui ne vont pas ensemble et « hurleraient de se voir accouplés ». J'imagine que les temps ne sont pas proches où un étudiant viendra réclamer le diplôme de licence en présentant le *certificat d'œnologie,* celui de *chronométrie* et celui d'*analyse supérieure.*

Parmi les certificats les plus nécessaires et le plus répandus dans nos Facultés, se trouve certainement celui des mathématiques générales, ou des mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques. Il correspond à un enseignement qui forme en quelque sorte la transition entre les mathématiques de nos lycées et les

mathématiques supérieures de nos Facultés. La nécessité de cet enseignement est reconnue par tout le monde.

Il s'est imposé de tout temps pour la Mécanique et la Physique; il commence à devenir nécessaire pour la Chimie. En lisant les belles *Leçons sur le Carbone*, que vient de publier mon collègue et confrère Le Chatelier, j'étais frappé de l'importance qu'il y a donnée, à juste titre d'ailleurs, aux développements mathématiques. Décidément il faut en revenir au mot de Platon : « Pour comprendre l'Univers, il sera nécessaire d'être un géomètre. »

Mais il y a deux manières d'étudier une science. Les uns l'aiment et la cultivent pour elle-même, en vue de son développement propre. D'autres viennent y chercher les notions qui leur sont indispensables pour des études extérieures. Dans un passage que j'aimerais à citer textuellement, si je savais où le retrouver, Schiller marque bien cette différence des points de vue sous lesquels on peut considérer toute étude. Pour les uns, selon le poète, la Science est une haute et sublime déesse; les autres la traitent comme une bonne vache laitière, révérence parler, et se bornent à lui demander du lait et du beurre. Après tout, les uns et les autres ont raison. Et l'on ne peut pas s'attendre à ce que de futurs chimistes s'intéressent passionnément aux mystères des fonctions abéliennes ou de la géométrie non euclidienne.

M. Fabry, mon très distingué collègue, a très bien compris, dans l'Ouvrage que je suis heureux de présenter aujourd'hui, le caractère de l'enseignement qui convient à tous ceux, chimistes, physiciens, ingénieurs, statisticiens, qui ne voient et ne recherchent dans les mathématiques qu'un levier dont il leur suffira de connaître la puissance et le maniement.

Un cours de ce genre est beaucoup plus difficile à faire qu'on ne le croit généralement. Il faut y être à la fois simple et rigoureux; il est devenu possible aujourd'hui d'allier ces deux qualités. Si Lagrange renaissait aujourd'hui, lui qui avait le goût des belles méthodes générales et des points de vue fondamentaux d'où découle toute la Science, ce qu'il admirerait le plus peut-être dans toutes nos découvertes, c'est cette belle et simple démonstration de la série de Taylor, devenue courante, qui lui aurait permis de réaliser son rêve et d'asseoir sur un fondement solide toute *sa théorie des Fonctions analytiques* comme il a fait reposer *sa Mé-*

canique sur le principe des vitesses virtuelles combiné avec le principe de d'Alembert.

M. Fabry me paraît avoir songé à tout; il a su s'élever depuis les parties les plus élémentaires de l'Algèbre jusqu'à la théorie des équations aux dérivées partielles.

Nos futurs techniciens trouveront dans son exposé toutes les notions d'Algèbre, de Géométrie analytique, de Calcul différentiel et intégral, de Mécanique qui leur sont indispensables. Un Tableau des principales formules termine l'Ouvrage et sera pour les lecteurs un secours des plus précieux.

GASTON DARBOUX.

BAIRE (R.). — LEÇONS SUR LES THÉORIES GÉNÉRALES DE L'ANALYSE. Tome II. In-8° de 347 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

La deuxième Partie de ces Leçons est en concordance parfaite avec la première Partie. Les principes ayant été soigneusement établis à la base, on sait exactement sur quoi portent les raisonnements qui soutiennent les parties les plus élevées; la précision et l'habileté de la construction ont réduit au minimum le nombre des pièces intermédiaires et la structure de l'ensemble apparaît, solide et élégante.

On peut n'être pas entièrement de l'avis de l'auteur sur la façon d'interpréter cette remarque évidente, qu'un Cours d'Analyse n'est pas un Cours d'histoire de l'Analyse, mais un auteur a le droit de prendre un parti suivant ses idées et la synthèse des différentes méthodes que M. Baire a faite ici est certainement très intéressante, et, à beaucoup d'égards, nouvelle.

Le second Volume contient quatre Chapitres :

CHAPITRE IV, *Fonctions analytiques*, p. 1-84;

CHAPITRE V, *Équations différentielles*, p. 85-167;

CHAPITRE VI, *Applications géométriques*, p. 168-280;

CHAPITRE VII, *Fonctions elliptiques*, p. 281-347.

1. Sans suivre pas à pas l'ordre des Chapitres, j'essaierai d'abord

d'indiquer comment l'auteur expose les propriétés des fonctions analytiques.

Les définitions relatives aux quantités complexes sont reprises depuis le commencement. Voici en détail la définition donnée pour une fonction holomorphe. On dit qu'une fonction

$$u = P(x, y) - iQ(x, y)$$

est une fonction holomorphe de la variable $z = x + iy$ si P et Q sont des fonctions continues de x, y dans un certain domaine D du plan des x, y et si ces fonctions admettent des dérivées du premier ordre, continues dans le domaine D, satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

appelées ici *conditions d'holomorphie*.

On reviendra aux fonctions réelles P et Q le plus souvent qu'il sera possible de le faire sans introduire les propriétés des fonctions harmoniques et la formule de Green relative à ces fonctions. On le fait en particulier, et très simplement, pour l'étude des fonctions composées, l'existence d'une fonction implicite et de ses dérivées. A ce point de vue, il serait peut-être bon de remarquer explicitement que, si en partant d'équations entre variables réelles on a obtenu une relation linéaire entre différentielles totales,

$$dx + i\,dy = (a_1 + ib_1)(dx_1 + i\,dy_1) + (a_2 + ib_2)(dx_2 + i\,dy_2),$$

dont les coefficients ne dépendent pas des différentielles, $z = x + iy$ admet une dérivée par rapport à chacune des variables complexes $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, et ces dérivées sont $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$.

L'intégrale de variable complexe

$$\int_C (P + iQ)(dx + i\,dy)$$

se ramène à deux intégrales curvilignes réelles : ce sont ces intégrales curvilignes qu'on fera intervenir pour généraliser les règles simples relatives aux intégrales de variables réelles, en particulier la règle de différentiation sous le signe $\int$. Le théorème fondamen-

tal de Cauchy,

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = 0,$$

est rattaché, suivant l'idée de Riemann, aux mêmes intégrales curvilignes, et la démonstration suppose la continuité des dérivées du premier ordre de P et de Q.

On revient au calcul des quantités complexes pour établir la formule de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

résultat obtenu si simplement en se servant de la proposition à peu près évidente qu'une intégrale de variable complexe $\int f(z)\,dz$ a son module plus petit que Ml, l étant la longueur du chemin d'intégration et M une limite supérieure du module de $f(z)$ le long de ce chemin, tandis que le même résultat est beaucoup moins apparent quand on le déduit des propriétés des fonctions harmoniques réelles.

C'est à l'intégrale de Cauchy qu'est rattachée l'expression d'une limite supérieure du module d'une dérivée quelconque de la fonction, expression qui ne fait intervenir que les valeurs de la fonction elle-même sur un cercle et qui, comme on le sait, est beaucoup moins facile à obtenir quand on veut se passer de l'intégrale de Cauchy.

2. Dans l'étude des séries de fonctions, placée avant la définition des fonctions complexes élémentaires, l'auteur fait très heureusement un usage systématique d'un caractère de convergence de Weierstrass. Il propose de dire qu'une série de fonctions est *normalement convergente* dans un certain domaine si les nombres positifs, limites supérieures des modules des termes de la série dans ce domaine, forment une série convergente.

Cette condition est réalisée si, dans le domaine considéré, le module du terme général est inférieur au terme général d'une série numérique convergente. On sait que, dans ce cas, la série est *uniformément* convergente dans le domaine considéré.

Inversement, le cas de la convergence uniforme peut se ramener à celui de la convergence normale, au sens qui va être précisé.

Soit une série *uniformément convergente;* définissons un groupement de termes consécutifs de cette série en posant, avec les notations ordinaires,

$$U_0 = S_{n_0}, \qquad U_i = S_{n_i} - S_{n_{i-1}}.$$

Comme on peut écrire

$$U_i = (S_{n_i} - S) - (S_{n_{i-1}} - S),$$

on voit facilement qu'on peut choisir les nombres n_i de façon que l'on ait

$$|U_i| < 2\alpha_i,$$

α_i étant le terme général d'une série numérique décroissante et convergente, de sorte que la série ΣU_i est *normalement convergente.*

L'importance de cette remarque est mise en évidence à propos de la dérivation des séries. M. Baire démontre, de façon très simple, le théorème suivant :

Si une série de fonctions d'une variable réelle est convergente dans un intervalle et si la série des dérivées est NORMALEMENT *convergente dans cet intervalle, la série des dérivées est la dérivée de la fonction définie par la série donnée.*

Ce résultat s'étend au cas où l'on suppose seulement que la série des dérivées est *uniformément* convergente. Il suffit, pour cela, d'opérer dans la série des dérivées un groupement de termes consécutifs conduisant à une série *normalement* convergente et, dans la série donnée, le groupement correspondant, enfin d'appliquer aux nouvelles séries le théorème précédent.

La considération de séries *normalement* convergentes est également utile dans l'étude du produit infini dont les facteurs sont des fonctions d'une variable

$$P = (1 + u_1)(1 + u_2)\ldots(1 + u_n)\ldots,$$

que l'auteur remplace par la série équivalente

$$1 + u_1 + P_1 u_2 + P_2 u_3 + \ldots + P_n u_{n+1} + \ldots,$$

P_n désignant le produit des n premiers facteurs du produit P.

La propriété fondamentale, pour une fonction holomorphe, de pouvoir être développée en série entière, est déduite, dans le cas

d'une fonction d'une seule variable de l'intégrale de Cauchy, par la méthode classique.

Dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, $f(x, y, z)$, holomorphe lorsque les points x, y, z sont intérieurs à des courbes de centre x_0, y_0, z_0 et de rayon R, R', R'', on évite l'introduction des intégrales multiples en faisant la substitution

$$\frac{x - x_0}{R} = t, \qquad \frac{y - y_0}{R'} = t, \qquad \frac{z - z_0}{R''} = t,$$

qui introduit une fonction auxiliaire de t, $\varphi(t)$.

Le développement de $\varphi(t)$ conduit à un développement de $f(x, y, z)$, où tous les termes en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ correspondant à une même valeur de la somme $\alpha + \beta + \gamma$ sont réunis en un seul. On démontre ensuite facilement que l'on peut séparer les termes et les placer dans un ordre quelconque, en se servant de la fonction majorante

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{y}{R'}\right)\left(1 - \frac{z}{R''}\right)}.$$

L'étude des fonctions analytiques est poussée assez loin pour que l'auteur puisse donner en une cinquantaine de pages les propriétés des fonctions elliptiques (avec les notations de Weierstrass) et en faire l'application aux courbes de genre *un* et à l'équation d'Euler.

3. Dans le Chapitre consacré aux équations différentielles, on lira avec un intérêt particulier la démonstration de l'existence des solutions pour un système différentiel de forme canonique, le changement de variables dans une équation linéaire aux dérivées partielles et dans le système différentiel équivalent, la réduction qui résulte de la connaissance de p intégrales premières indépendantes.

Les équations aux différentielles totales complètement intégrales sont traitées dans le cas de n variables indépendantes, et il serait certainement difficile de réduire les trois pages qui leur sont consacrées sans sacrifier une partie des résultats qui sont établis.

Pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, à n variables indépendantes, on obtient les équations des

caractéristiques en introduisant une variable auxiliaire t, suivant une marche indiquée par M. Darboux. La notion d'intégrale complète est expliquée dans le cas général et la recherche d'une intégrale complète est détaillée pour le cas de deux variables indépendantes, d'après la méthode de Lagrange et Charpit.

L'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est interprétée comme définissant le mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique fermé à une extrémité et indéfini dans un sens, en supposant que la paroi et la colonne d'air sont en repos à l'instant $t = 0$ et qu'on imprime à la tranche initiale un mouvement dont la loi est donnée par la relation

$$u = f(t) \qquad \text{pour} \qquad x = 0, \qquad t \geqq 0.$$

4. Les applications géométriques sont exposées de manière à préparer le lecteur à une étude plus approfondie de la Géométrie supérieure. En particulier, on explique les notions fondamentales sur les surfaces applicables, les propriétés invariantes de la courbure totale et des lignes géodésiques dans la déformation d'une surface, les lignes géodésiques étant définies par la propriété de leurs plans osculateurs.

Une indication précise sur la variation d'une intégrale de la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\,dx$$

permet d'établir que le plus court chemin d'un point à autre sur une surface ne peut être qu'une ligne géodésique : puis, en rapportant la surface à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales, on vérifie que les lignes géodésiques sont bien des courbes de longueur minimum, tout au moins dans une région suffisamment petite.

E. Lacour.

MÉLANGES.

CONTRIBUTION A LA GÉOMÉTRIE DES ÉLÉMENTS ISOTROPES;

PAR M. L. RAFFY.

Je vais traiter quelques questions qui ne tarderont pas, sans doute, à devenir classiques, car les éléments isotropes acquièrent chaque jour plus d'importance en Géométrie. Ces questions se rapportent à la courbure et à la torsion, aux développantes et aux développées des droites isotropes, des courbes minima et de celles qui sont tracées sur un plan isotrope.

La solution de certaines d'entre elles diffère absolument des énoncés correspondants de la Géométrie ordinaire. Ainsi, les développées des droites isotropes et les développantes des courbes minima dépendent d'une fonction arbitraire.

Les courbes tracées sur un plan isotrope sont caractérisées par la propriété d'avoir en tous leurs points leur rayon de courbure infini. Elles admettent comme développantes des droites isotropes. Quant à leurs développées, que nous représentons par des formules entièrement explicites, elles doivent être considérées comme des hélices particulières, car ce sont des géodésiques de cylindres à génératrices isotropes, et elles constituent l'ensemble des courbes dont les rayons de courbure et de torsion sont dans un rapport égal à l'unité imaginaire.

I. — DROITES ISOTROPES; DÉVELOPPANTE ET DÉVELOPPÉES.

1. Les *droites isotropes* sont les droites qui rencontrent le cercle de l'infini. Elles sont caractérisées, en coordonnées rectangulaires, par l'évanouissement de la somme des carrés de leurs coefficients directeurs :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0.$$

Un *plan isotrope* est un plan tangent au cercle de l'infini; en coordonnées rectangulaires, il est représenté par l'équation

$$lx + my + nz - p = 0,$$

l, m et n vérifiant l'égalité précédente.

On reconnaît aisément que *par toute droite isotrope passe un seul plan isotrope*, que *par chaque point d'un plan isotrope passe une seule droite isotrope*, que *toute courbe minima* (ou de longueur nulle) *tracée sur un plan, isotrope ou non, est une droite isotrope.*

Convention. — Deux droites (D) et (D_1) étant rapportées à un système d'axes rectangulaires, nous dirons qu'elles sont perpendiculaires entre elles si leurs *coefficients directeurs* (l, m, n) et (l_1, m_1, n_1) satisfont à la condition

$$ll_1 - mm_1 + nn_1 = 0. \tag{1}$$

Cette convention s'accorde, quand aucune des droites considérées n'est isotrope, avec la condition relative au cosinus

$$\cos(D, D_1) = \frac{ll_1 + mm_1 - nn_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l_1^2 - m_1^2 + n_1^2}} = 0; \tag{2}$$

mais elle en diffère quand l'une d'elles est isotrope, car alors le cosinus de l'angle des deux droites a son dénominateur nul, comme son numérateur, de sorte qu'il est indéterminé. Notre convention n'exige pour l'orthogonalité que l'évanouissement du numérateur. Elle entraîne comme conséquences immédiates les deux lemmes suivants, dont nous aurons à faire usage :

Lemme I. — *Toute droite du plan isotrope qui contient une droite isotrope est perpendiculaire à cette droite; en particulier, toute droite isotrope est perpendiculaire à elle-même.*

Toute droite isotrope peut être représentée par les équations

$$y = ix, \qquad z = 0.$$

Ses coefficients directeurs sont $l = 1$, $m = i$, $n = 0$. Le plan isotrope qui la contient est le plan $y = ix$. Toute droite de ce plan

est donc parallèle à une droite

$$y = ix, \qquad z = n_1 x,$$

dont les coefficients directeurs sont $l_1 = 1$, $m_1 = i$ et n_1. Quelle que soit la constante n_1, on a visiblement

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

En supposant $n_1 = 0$, on voit que la droite isotrope est perpendiculaire à elle-même.

Lemme II. — *Toute droite qui rencontre une droite isotrope et qui lui est perpendiculaire est tracée sur le plan isotrope qui contient cette droite isotrope.*

Soit encore la droite isotrope (D),

$$y = ix, \qquad z = 0.$$

Menons par l'origine une droite (D_1),

$$y = m_1 x, \qquad z = n_1 x,$$

qui lui soit perpendiculaire. On a, d'après la convention faite sur l'orthogonalité,

$$1 + im_1 = 0,$$

c'est-à-dire $m_1 = i$. Ainsi la droite (D_1) appartient au plan $y = ix$ qui est le seul plan isotrope contenant la droite (D).

Remarque. — La formule générale (2) donne immédiatement

$$1 + \tang^2(D, D_1) = \frac{(l^2 + m^2 + n^2)(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)}{(ll_1 + mm_1 + nn_1)^2}.$$

Si la droite (D) est isotrope et si la droite (D_1) n'est point parallèle au plan isotrope qui contient (D), le numérateur du second membre est nul et son dénominateur est différent de zéro (lemme II). En conséquence, *une droite isotrope fait, avec toute droite non parallèle au plan isotrope qui la contient, un angle, dont la tangente est égale à l'unité imaginaire.*

2. Une droite isotrope peut être considérée comme sa propre développante; car, étant perpendiculaire à elle-même, elle est normale à ses tangentes. D'ailleurs, elle n'a point d'autre développante qu'elle-même, puisque les tangentes d'une droite quelconque se confondent avec cette droite.

Une droite isotrope peut aussi être considérée comme étant l'une de ses développées, puisqu'elle est l'enveloppe d'une infinité de droites coïncidant avec elle-même et dont chacune lui est normale. Mais elle admet d'autres développées. Il résulte, en effet, du lemme I que *toute courbe tracée sur le plan isotrope qui contient une droite isotrope admet cette droite comme développante,* puisque ses tangentes sont perpendiculaires à cette droite. D'ailleurs, en vertu du lemme II, la droite isotrope n'a point d'autres développées que les courbes du plan isotrope qui la contient. En conséquence, *l'ensemble des développées d'une droite isotrope se compose de toutes les courbes tracées sur le plan isotrope qui la contient.*

II. — Courbure et torsion des courbes minima.

3. Nous définirons le rayon de courbure R et le rayon de torsion T des courbes minima par les formules qui expriment pour les courbes réelles la définition géométrique de ces éléments, savoir

$$(1)\qquad R = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad T = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta}.$$

Dans ces formules les accents indiquent les dérivées prises par rapport au paramètre u en fonction duquel sont exprimées les coordonnées rectangulaires x, y, z des points de la courbe, et l'on a posé

$$\begin{aligned} A &= y'z'' - z'y'', \\ B &= z'x'' - x'z'', \\ C &= x'y'' - y'x'', \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}.$$

L'arc indéfini de la courbe étant représenté par s, on a

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''.$$

Mais une identité bien connue permet d'écrire

$$A^2 + B^2 + C^2 = s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2),$$

de sorte qu'il vient

$$(2) \qquad R = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}, \qquad T = -\frac{s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2)}{\Delta}.$$

Appliquons ces formules aux courbes minima ($s = 0$) qu'on peut représenter par les formules

$$(3) \quad x = \frac{1 - u^2}{2}\varphi'' + u\varphi' - \varphi, \quad -iy = \frac{1 + u^2}{2}\varphi'' - u\varphi' - \varphi, \quad z = u\varphi'' - \varphi',$$

où φ désigne une fonction arbitraire du paramètre u. On déduit aisément de là

$$(4) \qquad x''^2 + y''^2 + z''^2 = \varphi'''^2, \qquad \Delta = -i\varphi'''^3.$$

Or on doit supposer $\varphi''' \neq 0$, sans quoi le point (x, y, z) serait fixe. En conséquence, le dénominateur de R et celui de T ne sont pas nuls. Comme s'^2 est nul, *le rayon de courbure* R *et le rayon de torsion* T *sont nuls en tous les points d'une courbe minima.*

Il n'y a donc pas lieu, semble-t-il, de parler de leur rapport. Néanmoins, si l'on divise membre à membre les deux équations (2), on obtient la relation générale

$$(5) \qquad \frac{R}{T} = -\frac{\Delta}{(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où ne figure plus le facteur s'^2 dont l'évanouissement entraîne celui de R et de T. Or il suffit d'avoir égard aux formules (4) pour reconnaître que le second membre de l'égalité (5) se réduit à l'unité imaginaire i. On peut donc dire que, *pour toute courbe minima, le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est constamment égal à l'unité imaginaire* [1]. Il convient même de le

[1]) Les conclusions du texte, relatives à R et à T, ne s'appliquent pas aux droites isotropes, parce que les équations (3) ne peuvent pas représenter une droite. Si l'on égale, en effet, à zéro les trois coefficients A, B, C du plan osculateur, on trouve l'unique condition $\varphi''' = 0$, qui réduit à des constantes les expressions de x, y, z. Pour une droite isotrope, le rayon de courbure et le rayon de torsion sont indéterminés.

faire, car la propriété $R = iT$ caractérise, comme nous l'établirons plus loin, les développées des courbes tracées sur un plan isotrope, et nous allons voir que toute courbe minima admet comme développantes une double infinité de courbes de cette espèce.

III. — Développantes et développée d'une courbe minima.

4. On sait (lemme I) que toute droite du plan isotrope qui contient une droite isotrope est perpendiculaire à cette droite. Il suit de là qu'*étant donnée une courbe gauche minima* (C), *si l'on coupe par un plan isotrope quelconque* (P) *la développable isotrope* (D) *formée par les tangentes à cette courbe, la section* (C_0) *est une développante de* (C). Soient, en effet, M_0 un point de la courbe plane (C_0) et M_0T_0 la tangente en M_0. Cette tangente à une courbe tracée sur la développable (D) appartient au plan tangent de la développable en M_0; or ce plan est un plan isotrope et contient la génératrice isotrope M_0M tangente à l'arête de rebroussement (C). Les deux droites M_0M et M_0T_0 étant rectangulaires d'après le lemme I, la proposition est établie. Comme il y a ∞^2 plans isotropes, toute courbe minima admet ∞^2 développantes tracées chacune sur un plan isotrope.

Mais il y a plus : *toute courbe minima admet une infinité de développantes, dépendant d'une fonction arbitraire.* Soit, en effet, sur la tangente au point $M(x, y, z)$ d'une courbe minima, le point M_0, défini par les formules

$$x_0 = x + \lambda x', \qquad y_0 = y + \lambda y', \qquad z_0 = z + \lambda z',$$

où λ est une fonction de u. On a, pour les coefficients directeurs de la tangente au lieu de ce point,

$$x'_0 = (1 + \lambda')x' + \lambda x'', \qquad y'_0 = (1 + \lambda')y' + \lambda y'', \qquad z'_0 = (1 + \lambda')z' + \lambda z''.$$

On déduit immédiatement de là l'identité

$$x'x'_0 + y'y'_0 + z'z'_0 = (1 + \lambda')s'^2 + \lambda s's'',$$

dont le second membre s'évanouit, quelle que soit la fonction λ, quand s' est nul.

5. Les tangentes d'une courbe minima étant des droites isotropes, on peut considérer une courbe minima comme étant sa propre développée, puisqu'elle est tangente à une infinité de droites qui lui sont normales, étant perpendiculaires à elles-mêmes (lemme I). Mais il y a plus : *une courbe minima n'a point de développée autre qu'elle-même*. En effet, les seules droites qui soient perpendiculaires à ses tangentes, droites isotropes, sont (lemme II) les droites des plans isotropes dont chacun contient l'une de ces tangentes : ce sont donc des droites situées dans les plans osculateurs de la courbe minima. Or, quand on mène par chaque point d'une courbe *gauche* une droite située dans son plan osculateur, cette droite ne peut avoir une enveloppe que si elle se confond avec la tangente à la courbe. On est donc ramené à la courbe minima elle-même, puisqu'il s'agit ici de courbes minima *gauches*.

IV. — Courbes tracées sur un plan isotrope.

6. Ces courbes, que nous avons trouvées comme développées des droites isotropes, se présentent d'elles-mêmes quand on cherche les courbes dont le rayon de courbure est constamment infini. En effet, d'après la formule générale

$$(1) \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3},$$

où A, B, C sont les coefficients du plan osculateur, pour que R soit constamment infini, il faut qu'on ait

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0,$$

c'est-à-dire que tous les plans osculateurs de la courbe soient des plans isotropes. Or la considération du cône isotrope montre que la caractéristique d'un plan isotrope variable est une droite isotrope. Si donc le plan osculateur de la courbe était variable, sa caractéristique, qui est la tangente de la courbe, serait une droite isotrope et la courbe serait une courbe minima; mais alors (n° 3) le rayon de courbure serait constamment nul, au lieu d'être infini. Il faut donc conclure que le plan osculateur est fixe et, par suite,

que la courbe est tracée sur un plan isotrope. Cela étant, si l'on exclut les droites isotropes, le dénominateur de la formule (1) est différent de zéro et R est infini. Ainsi, *toute courbe dont le rayon de courbure est constamment infini est tracée sur un plan isotrope, et réciproquement*. La droite est l'une de ces courbes.

7. Pour les étudier de plus près, supposons-les tracées sur le plan $x + iy = 0$. Nous pourrons les représenter par les équations

$$x = x(z), \qquad y = ix(z), \tag{2}$$

en prenant pour variable la coordonnée z, ce qui exclut les droites isotropes. L'identité générale

$$s'^2 = x'^2 - y'^2 + z'^2$$

se réduit ici à $ds^2 = dz^2$, ce qui permet de prendre $s = z$. On voit que *la tangente fait un angle constamment nul avec une droite fixe*, l'axe des z. Réciproquement, *si la tangente à une courbe fait un angle constamment nul avec l'axe des z, la courbe est tracée sur l'un des plans isotropes $x \pm iy =$* const.

L'équation du *plan normal* au point (x, y, z) est

$$(X - x)x' + i(Y - y)x' + Z - z = 0$$

ou, à cause de la relation $x + iy = 0$, vérifiée en tous les points de la courbe,

$$x'(X + iY) + Z - z = 0.$$

La *normale principale*, intersection du plan normal avec le plan de la courbe

$$X - iY = 0,$$

est représentée par les deux équations

$$X + iY = 0, \qquad Z - z = 0.$$

Ainsi, *la normale principale est la droite isotrope du plan de la courbe, menée par le point considéré*. Sa direction ne change pas avec son point d'incidence; mais, en vertu du lemme I, elle est bien perpendiculaire à la tangente.

La *droite polaire*, caractéristique du plan normal, est repré-

sentée par l'équation de ce plan,

$$x'(X + iY) + Z - z = 0,$$

et par l'équation dérivée,

$$x''(X + iY) - 1 = 0.$$

On voit que c'est une droite isotrope et qu'elle est parallèle à la normale principale; ce résultat s'accorde avec la valeur infinie trouvée pour le rayon de courbure.

La *surface polaire*, lieu de la droite polaire, est un cylindre à génératrices isotropes, dont on obtiendrait l'équation en éliminant z entre les relations

$$X + iY = \frac{1}{x''}, \qquad Z = z - \frac{x'}{x''}.$$

Comme il est parallèle au plan $x + iy = 0$, *il n'y a point de développée dans le plan de la courbe.*

V. — Développantes et développées des courbes tracées sur un plan isotrope.

8. D'après ce qui a été vu au n° 2, *une courbe tracée sur un plan isotrope admet comme développantes toutes les droites isotropes de ce plan.* Le calcul suivant prouvera qu'elle n'en a point d'autres. Soient toujours

$$x = x(z), \qquad y = ix(z)$$

les équations de la courbe considérée (C). Comme elles entraînent $ds = dz$, les *cosinus directeurs* de la tangente sont x', ix' et 1, la dérivée x' étant prise par rapport à z. Les expressions générales des coordonnées x_0, y_0, z_0 d'une développante

$$x_0 = x + (C - s)\frac{dx}{ds}, \qquad y_0 = y + (C - s)\frac{dy}{ds}, \qquad z_0 = z + (C - s)\frac{dz}{ds}$$

deviennent ici

$$x_0 = x + (C - z)x', \qquad y_0 = i[x + (C - z)x'], \qquad z_0 = C.$$

Ainsi, l'on n'obtient que les droites isotropes du plan de la courbe (C) et on les obtient toutes.

9. Pour trouver les *développées* de (C), remarquons qu'une normale quelconque est représentée par les équations

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c},$$

avec la condition

$$c=-(a+ib)x'. \tag{1}$$

Il faut déterminer cette normale de façon que l'un de ses points

$$X=x+a\rho,\qquad Y=y+b\rho,\qquad Z=z-(a+ib)x'\rho$$

décrive une courbe qui lui soit tangente. Exprimant cette condition par les relations bien connues

$$\frac{X'}{a}=\frac{Y'}{b}=\frac{Z'}{-(a+ib)x'}=\mu,$$

nous obtenons, en développant les calculs, les trois équations

$$x'+a(\rho'-\mu)+a'\rho=0, \tag{2}$$

$$ix'+b(\rho'-\mu)+b'\rho=0, \tag{3}$$

$$1-x'(a+ib)(\rho'-\mu)-[x'(a+ib)]'\rho=0. \tag{4}$$

L'élimination de $\rho'-\mu$ et de ρ fournit la relation

$$ab'-ba'+i(a+ib)^2x'x''=0, \tag{5}$$

qui peut s'écrire

$$-\frac{d}{dz}\left(1+i\frac{b}{a}\right)^{-1}=x'x''.$$

Intégrant et désignant par h une constante arbitraire, nous avons

$$-\frac{a}{a+ib}=\frac{x'^2+h-1}{2}. \tag{6}$$

Mais l'élimination de $(\rho'-\mu)$ entre les équations (2) et (3) donne

$$(ab'-ba')\rho+ix'(a+ib)=0,$$

ce qui, en vertu des équations (5) et (6), revient à

$$a\rho=-\frac{x'^2+h-1}{2x''}.$$

Multipliant par le rapport $b : a$, tiré de l'équation (6), on trouve

$$b\rho = -i\frac{x'^2 + h + 1}{2x''}.$$

Enfin la condition (1) donne

$$c\rho = -(a + ib)x'\rho = -\frac{x'}{x''}.$$

Nous avons donc pour les coordonnées d'une développée les expressions suivantes :

$$(7) \qquad X = x - \frac{x'^2 + h - 1}{2x''}, \qquad Y = ix - i\frac{x'^2 + h + 1}{2x''}, \qquad Z = z - \frac{x'}{x''}.$$

Toutes les développées sont tracées sur le cylindre à génératrices isotropes

$$X + iY = \frac{1}{x''}, \qquad Z = z - \frac{x'}{x''},$$

que nous avons trouvé comme surface polaire. Employons, pour former son élément linéaire, les relations (7), où h sera considéré comme la seconde coordonnée curviligne; nous trouvons

$$dS^2 = -d\left(\frac{1}{x''}\right)d\left(\frac{h}{x''}\right).$$

Remarquons, en passant, que l'élément linéaire d'un cylindre à génératrices isotropes n'est pas un carré parfait, comme celui des autres développables isotropes.

Remarquons aussi que la développée particulière $h = 0$ est une courbe minima, puisque son élément d'arc est nul. C'est là un résultat dont l'explication géométrique a été donnée au n° 4; il conduit à représenter une courbe minima quelconque par les formules très simples

$$X = x - \frac{x'^2 - 1}{2x''}, \qquad Y = ix - i\frac{x'^2 + 1}{2x''}, \qquad Z = z - \frac{x'}{x''}.$$

10. La droite rectifiante d'une courbe fait avec la direction positive de la tangente un angle dont la tangente est égale au quotient changé de signe du rayon de torsion par le rayon de courbure (Lancret). De plus, la droite rectifiante d'une développée (C_1)

d'une courbe (C) est la droite polaire de (C). Or ici la droite polaire de (C) est isotrope (n° 7) et parallèle à la normale principale. Quant à la normale de (C) qui touche la développée (C_1), elle n'est pas dans le plan de (C), c'est-à-dire dans le plan isotrope qui contient la normale principale : d'après la remarque du n° 2, ces deux normales font entre elles un angle dont la tangente est i. On a donc

$$\frac{T_1}{R_1} = -i, \qquad \frac{R_1}{T_1} = i.$$

Ainsi, *pour toute développée d'une courbe tracée sur un plan isotrope, le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est constamment égal à l'unité imaginaire.* Cette propriété constitue une première analogie entre les hélices et les développées en question.

11. Pour compléter le rapprochement, rappelons que toute hélice est une ligne géodésique du cylindre dont elle coupe les génératrices sous un angle constant. Considérons maintenant l'une des développées (C_1) d'une courbe (C), tracée sur un plan isotrope, et le cylindre isotrope, surface polaire de la courbe (C), qui porte toutes ses développées. La droite rectifiante de (C_1), étant la droite polaire de (C), est la génératrice du cylindre. Son plan rectifiant, déterminé par la tangente et la droite rectifiante, coïncide avec le plan tangent du cylindre. Or les géodésiques d'une surface, ayant leur plan osculateur normal à la surface, sont précisément les courbes qui ont pour plan rectifiant le plan tangent de la surface. Ainsi, *les développées d'une courbe tracée sur un plan isotrope sont des géodésiques de cylindre à génératrices isotropes.*

Pour établir la réciproque, considérons un tel cylindre

$$z = \varphi(x + iy).$$

Son élément linéaire est

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d(x + iy)[d(x - iy) + \varphi'^2(x + iy)\,d(x + iy)].$$

Ses géodésiques ont pour équation finie

$$x - iy + \int \varphi'^2(x + iy)\,d(x + iy) = m^2(x + iy) + n,$$

m et n désignant deux constantes arbitraires. L'élément d'arc de l'une d'elles est

$$ds = m\,d(x + iy).$$

Si donc on désigne par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'une des développantes de cette géodésique, on n'aura qu'à appliquer les formules générales du n° 8 pour trouver en particulier

$$x_0 + iy_0 = x + iy + \frac{1}{m}[C - m(x + iy)] = \frac{C}{m},$$

ce qui prouve que toutes les développantes sont tracées sur des plans isotropes. Ainsi, *toute géodésique de cylindre à génératrices isotropes est une développée de courbe tracée sur un plan isotrope*. L'hypothèse $m = 0$, qui met la démonstration en défaut, donne précisément la courbe minima signalée au n° 9; mais cette courbe jouit aussi (n° 4) de la propriété considérée.

VI. — Courbes dont les rayons de courbure et de torsion sont dans un rapport constant.

12. Pour trouver celles de ces courbes qui ne sont point des courbes minima, appelons α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente, α'', β'', γ'' ceux de la binormale, et employons les formules fondamentales

$$\frac{d\alpha''}{d\alpha} = \frac{d\beta''}{d\beta} = \frac{d\gamma''}{d\gamma} = \frac{R}{T}.$$

Ces rapports égaux étant supposés avoir une valeur constante H, l'intégration donne

$$(1) \qquad \alpha'' = H\alpha + a, \qquad \beta'' = H\beta + b, \qquad \gamma'' = H\gamma + c,$$

avec trois constantes arbitraires a, b, c. De là résulte

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 = a\alpha + b\beta + c\gamma + H.$$

Si donc la direction (a, b, c) n'est pas isotrope, la tangente fait un angle constant avec elle et la courbe est une hélice.

Supposons maintenant $a^2 + b^2 + c^2 = 0$. Les équations (1) donnent

$$\sum(\alpha'' - H\alpha)^2 = 1 + H^2 = 0;$$

le rapport R : T est donc égal à l'unité imaginaire. Réciproquement, si H est égal à i, les équations (1) s'écrivent

$$\alpha'' - i\alpha = a, \qquad \beta'' - i\beta = b, \qquad \gamma'' - i\gamma = c$$

et elles entraînent visiblement $a^2 + b^2 + c^2 = 0$. Or les coefficients directeurs de la droite rectifiante d'une courbe quelconque sont proportionnels aux binomes

$$\frac{\alpha''}{R} - \frac{\alpha}{T}, \qquad \frac{\beta''}{R} - \frac{\beta}{T}, \qquad \frac{\gamma''}{R} - \frac{\gamma}{T};$$

quand $R = iT$, ils deviennent proportionnels aux coefficients de la direction isotrope (a, b, c). Si donc on fait passer par la courbe cherchée un cylindre isotrope de direction (a, b, c), son plan tangent sera le plan rectifiant de la courbe, qui, par suite (n° 10), sera une géodésique du cylindre.

D'autre part, les courbes minima qui échappent à cette analyse jouissent de la propriété $R = iT$ (n° 3) et sont lignes géodésiques de toute surface qui les contient. En conséquence, *toute courbe jouissant de la propriété* $R = iT$ *est une géodésique de cylindre à génératrices isotropes*. Ce théorème figure dans l'Ouvrage de M. G. Scheffers, *Einleitung in die Theorie der Curven* (p. 284-286).

Dans ce même Ouvrage (p. 224), les courbes en question sont représentées à l'aide de l'intégrale

$$\theta = \int \frac{dS}{R},$$

où S désigne l'arc et R la fonction arbitraire de S choisie pour le rayon de courbure, par des formules qu'on peut écrire comme suit :

$$(2) \quad X + iY = -\int dS, \qquad X - iY = \int (\theta^2 - 1)\, dS, \qquad Z = -\int \theta\, dS.$$

Ces formules s'accordent avec les équations (7) du n° 9. En effet, ces dernières donnent

$$(3) \qquad X + iY = \frac{1}{x''}, \qquad X - iY = 2x - \frac{x'^2 + h}{x''}, \qquad Z = z - \frac{x'}{x''}.$$

Comme h n'est nul que pour la courbe minima de la famille,

nous pourrons poser

$$x(z) = \sqrt{h}\,\xi(z)$$

et il viendra

$$X + iY = \frac{1}{\sqrt{h}\,\xi''}, \qquad X - iY = \sqrt{h}\left(2\xi - \frac{\xi'^2 + 1}{\xi''}\right), \qquad Z = z - \frac{\xi'}{\xi''},$$

ce qui prouve que toutes les courbes qui correspondent, une fois la fonction ξ donnée, aux diverses valeurs de h, sont égales entre elles. Leur forme étant indépendante de la valeur de h, nous pouvons prendre $h = -i$; nous aurons alors

$$d(X + iY) = -i\,d\left(\frac{1}{\xi''}\right), \qquad d(X - iY) = -i(\xi'^2 + 1)\,d\left(\frac{1}{\xi''}\right),$$

$$dZ = -\xi'\,d\left(\frac{1}{\xi''}\right).$$

On déduit aisément de là

$$dS = i\,d\left(\frac{1}{\xi''}\right), \qquad \frac{1}{R} = -\frac{d\xi'}{d\left(\frac{1}{\xi''}\right)}, \qquad \frac{dS}{R} = -i\,d\xi',$$

de sorte qu'il suffit de poser $\theta = -i\xi'$ pour retrouver les équations (2).

Nos équations (3) ne mettent pas en évidence la fonction choisie pour R, mais elles ont l'avantage de donner pour X, Y, Z, S et R des expressions débarrassées de tout signe de quadrature.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Fubini (G.), *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe.* In-8°, XVI-416 p. Pisa, Spoerri. 15 l.

Korn (A.), *Ein neuer allgemeiner Beweis für die Giltigkeit der Neumann-Robinschen Methoden des arithmetischen Mittels.* In-4°, 25 p. Leipzig, W. Engelmann. (*Abhandlgn. der kaiserl. Leopold-Karol. Deutschen Akademie der Naturforscher,* 88 Bd. N° 2.)

MONTESSUS (R. de), *Leçons élémentaires sur le Calcul des probabilités.* In-8°. VI-192 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr.

SCHLESINGER (Ludw.), *Vorlesungen über lineare Differential gleichungen.* Gr. in-8°, X-334 p. avec 6 fig. Leipzig, Teubner. 10 m.; relié, 11 m.

SERRET (A.-J.), *Traité de trigonométrie.* 9e édit. In-8°, X-336 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

SEVERI (F.), *Lezioni di Geometria algebrica. Geometria sopra una curva; superficie di Riemann; integrali abeliani.* In-8°. Padua, Draghi. 6 l.

STURM (Rud.), *Die Lehere von den Geometrischen Verwandtschaften.* I. Bd. gr. in-8°, XII-415 p. Leipzig, Teubner. Relié, 16 m.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgeg. von Mor. Cantor. IV. Bd. Von 1759-1799. In-8°, VI-1113 p. Leipzig, Teubner. 32 m.; relié, 35 m.

ZÖPPRITZ (K.), *Leitfaden der Kartenentwurfslehre.* 2. Aufl., herausgeg. von A. BLUDAU. 2. Tl. : *Kartographie. u. Kartometrie.* Gr. in-8°, VIII-109 p. avec 12 fig. et 2 planches. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.; relié, 4 m. 40 pf.

BOLZA (Osk.). — *Vorlesungen über Variationsrechnung.* Deutsche Ausgabe von des Verf. (In 3 Liefgn.) 1. Lfg. gr. in-8°, IV-300 et 10 p. avec 45 fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

BREM (Erich). — *Partikulare Integrale des Problems der n Körper.* Dissert. In-8°, 56 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 50 pf.

BROWN (E.-W.). — *The inequalities in the motion of the Moon due to the direct action of the planets.* In-8°, 105 p. Cambridge Univ. Press. 6 sh.

Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss, über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgeg. von P. Stäckel u. W. Ahrens. In-8°, XII-184 p. Leipzig, Teubner. 8 m.

GRAF (J.-H.). — *Einleitung in den Gebrauch des freien Integrationsweges bei bestimmten Integralen.* Gr. in-8°, VII-46 p. Bern, Wyss. 1 m. 20 pf.

GUTBERLET (Konst.). — *Der Kosmos. Sein Ursprung u. seine Entwicklung.* Gr. in-8°, VII-625 p. Paderborn, Schöningh. 10 m.

HALE (G.-E.). — *The study of stellar evolution. An account of*

some recent methods of astrophysical research. In-8°, 252 p. avec fig. London, Wesley. 16 sh. 6 d.

HAENTZSCHEL (Em.). — *Ueber ein orthogonales System von bizirkularen Kurven 4. Ordng.* Gr. in-8°, 28 p. Berlin, Weidmann. 1 m.

HERMITE (C.). — *Œuvres de Charles Hermite*, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par *Émile Picard.* T. II. Gr. in-8°, 515 p. avec portrait. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

HERSCHTHAL (St.). — *Einleitung zur Tachymetrie u. Reduktions-Hilfstafeln. Für Distanzen* $\cos^2 \alpha$. *f. Höhen* $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Gr. in-8°, XIX-145 p. Wien, Lehmann et Wentzel. 6 m.

Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1910, mit Angaben über die Opposition der Planeten (1) bis (601) f. 1908. Herausgeg. von L. BAUSCHINGER. Gr. in-8°, X-474-112 et 37 p. Berlin, Dümmler. 12 m.

LEIBNIZ. — *Ueber die Analysis des Unendlichen.* Eine Auswahl Leibniz'scher Abhandlungen aus dem Latein übersetzt von G. KOWALEWSKI. In-8°, 84 p. et 9 fig. Leipzig, W. Engelmann. (*Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissenschaften.* 162). Cart. 1 m. 60 pf.

WEBER (Heinr.). — *Lehrbuch der Algebra.* 2 Aufl. 3. Bd. *Elliptische Funktionen u. algebraische Zahlen.* Gr. in-8°, XVI-733 p. avec 2 fig. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 20 m.; relié, 22 m.

GRAY (Andr.). — *Lord Kelvin.* An account of his scientific life and work. In-8°, 328 p. London, Dent. 2 sh. 6 d.

JOUGUET (E.). — *Lectures de Mécanique. La Mécanique enseignée par les auteurs originaux.* Gr. in-8°, X-210 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50.

VILLARD (P.). — *Les Rayons cathodiques.* 2e édit. In-16, 107 p. avec 48 fig. Paris, Gauthier-Villars. Cart.: 2 fr.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FORSYTH (A.-R.). — THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS. Parts II, III, IV. 5 volumes in-8. Cambridge, University Press; 1900-1906.

On a déjà rendu compte dans le *Bulletin* (¹) du premier Volume de l'Ouvrage de M. Forsyth. Cinq Volumes, parus depuis lors et allant des équations différentielles du premier ordre aux équations aux dérivées partielles du second ordre les plus générales, en touchant à une foule de doctrines nouvelles, complètent cet Ouvrage. Il y avait là de quoi faire reculer un géomètre moins intrépide ou moins laborieux que M. Forsyth. Parmi la masse énorme de matériaux qu'il avait à sa disposition, il va de soi que l'auteur a dû faire un choix, et il est bien probable que le choix eût été un peu différent avec un autre auteur. Pour ma part, je crois que beaucoup de lecteurs auraient sacrifié sans peine la plus grande partie des longs développements consacrés aux intégrales singulières, s'ils avaient été remplacés par quelques Chapitres sur les invariants intégraux, par exemple, ou les solutions périodiques, etc. Tel qu'il est, cet Ouvrage n'en est pas moins destiné à rendre de grands services aux professeurs comme aux étudiants; il me suffira, pour le prouver, de donner quelques rapides indications sur les sujets qui y sont traités.

TOMES II ET III : *Équations différentielles non linéaires.*

Les questions traitées dans l'Introduction ont un caractère nettement algébrique. L'auteur explique en détail comment un système de n équations différentielles du premier ordre à n inconnues $w_1, w_2, \ldots, w_n$, dont les premiers membres sont des fonc-

(¹) *Voir* t. XV, 2e série, p. 48-50.

tions entières de la variabilité z, des inconnues w_i et de leurs dérivées $\frac{dw_i}{dz}$, peut être ramené à un type normal

$$\frac{dw_i}{dz} = R_i(t, z, u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

R_i étant une fonction rationnelle d'une variable auxiliaire t, définie par une équation unique

$$(1) \qquad F(t, u_1, u_2, \ldots, u_n, z) = 0$$

algébrique en t. En appliquant à cette relation les théorèmes d'existence relatifs aux fonctions implicites, on parvient enfin à une forme normale pour tout système d'équations différentielles du premier ordre. Le Chapitre se termine par une démonstration tout à fait générale du théorème classique de Weierstrass, sur la forme d'une fonction analytique de plusieurs variables, dans le voisinage d'un système de valeurs qui annulent cette fonction.

Avec le Chapitre II, consacré au théorème d'existence de Cauchy, nous entrons vraiment dans la théorie des équations différentielles. L'existence des intégrales d'un système

$$(2) \qquad \frac{du_i}{dz} = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

prenant des valeurs initiales données

$$u_1 = \alpha_1, \qquad u_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad u_n = \alpha_n,$$

pour $z = c$, lorsque les seconds membres sont des fonctions régulières des variables u_i, z, dans le voisinage de ce système de valeurs, est établie par la méthode classique du calcul des limites. Il résulte immédiatement de la démonstration que le système (2) ne peut admettre qu'un système d'intégrales holomorphes répondant à ces conditions initiales. M. Forsyth, qui attache une grande importance à cette proposition, l'établit directement de plusieurs manières.

Une question bien plus importante, quoique très voisine de celle-là, est relative à l'unicité des intégrales, régulières ou non, correspondant à des valeurs initiales données. Briot et Bouquet, qui se sont occupés les premiers de la question, avaient démontré

que l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z)$$

n'admettait pas d'autre intégrale que l'intégrale holomorphe, prenant la valeur $w = b$ pour $z = a$, lorsque $f(w, z)$ est une fonction régulière des deux variables w, z, dans le voisinage des valeurs $w = b$, $z = a$. Au début du Chapitre III, M. Forsyth rapporte l'objection que Fuchs a tirée de l'exemple simple

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w^2}{z};$$

cette objection, quoique facile à lever, a eu du moins le mérite de rappeler l'attention des mathématiciens sur ce sujet fondamental et de faire préciser le problème qu'il s'agissait de résoudre et qu'on peut énoncer ainsi :

Les fonctions $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, z)$ étant supposées régulières dans le voisinage des valeurs $u_i = \alpha_i$, $z = c$, existe-t-il un système d'intégrales des équations (2), *différentes des intégrales holomorphes, tel qu'on puisse faire décrire à la variable z un chemin tel que, $|z - c|$ tendant vers zéro, il en soit de même de tous les modules $|u_i - \alpha_i|$?*

La démonstration de Briot et Bouquet supposait que le chemin décrit par la variable z avait une longueur *finie*. Les preuves plus récentes de M. E. Picard et de M. Painlevé (qui ne sont pas essentiellement différentes) n'exigent aucune hypothèse sur ce chemin et conduisent à une réponse négative. M. Forsyth semble croire que de nouvelles recherches sont nécessaires pour trancher la question. J'avoue que je ne puis comprendre les raisons de son scepticisme, et je considère l'unicité des intégrales d'un système d'équations différentielles, correspondant à des conditions initiales données dans les conditions énoncées, comme une proposition capitale acquise à la Science d'une façon définitive [1].

---

[1] J'engage le lecteur qui conserverait quelques doutes à lire une Communication sur ce sujet de M. Painlevé (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, 1900, p. 191).

L'étude des intégrales non régulières n'en est pas moins d'une grande importance dans cette théorie, mais ces intégrales ne peuvent correspondre qu'à des valeurs initiales exceptionnelles, pour lesquelles les conditions requises par le théorème d'existence de Cauchy ne sont pas satisfaites.

Prenons par exemple une équation unique du remier ordre

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z); \tag{3}$$

les conditions initiales $w = \alpha$, $z = c$ ne sont exceptionnelles que si la fonction $f(w, z)$ n'est pas régulière dans le domaine des valeurs $w = \alpha$, $z = c$. Une classification de toutes les conditions initiales exceptionnelles reviendrait à une classification de toutes les singularités possibles pour une fonction analytique de deux variables. Considérant d'abord des fonctions uniformes $f(w, z)$, M. Forsyth distingue, d'après Weierstrass, les singularités possibles en *singularités accidentelles* et en *singularités essentielles*.

Une singularité $(w = \alpha, z = c)$ est *accidentelle* s'il est possible de trouver une série entière en $w - \alpha$, $z - c$, $P_0(w - \alpha, z - c)$, telle que le produit $P_0(w - \alpha, z - c) f(w, z)$ soit une fonction régulière dans le domaine des valeurs $w = \alpha$, $z = c$. Dans le cas contraire, la singularité est dite *essentielle*. Les singularités accidentelles sont elles-mêmes de deux sortes. Si l'on peut choisir la série entière $P_0(w - \alpha, z - c)$ de façon que le produit $P_0 f$ soit une fonction régulière *ne s'annulant pas pour* $w = \alpha$, $z = c$, la singularité $(w = \alpha, z = c)$ est une *singularité accidentelle de première espèce*. Si, au contraire, parmi les séries entières $P_0(w - \alpha, z - c)$ telles que le produit $P_0 f$ soit holomorphe, il n'en existe aucune pour laquelle ce produit soit différent de zéro pour $w = \alpha$, $z = c$, la combinaison (α, c) est une *singularité accidentelle de deuxième espèce*. Le théorème de Weierstrass permet encore une classification de ces singularités, qui se retrouvera dans la discussion ultérieure.

Chapitre IV. — L'étude d'une singularité accidentelle de première espèce est de beaucoup la plus facile. L'équation différentielle

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z)$$

où $\frac{1}{f}$ est une fonction régulière dans le domaine du point $w = \alpha$, $z = c$, s'annulant en ce point, admet en général une intégrale prenant la valeur α pour $z = c$, et $z = c$ est un point critique algébrique pour cette intégrale. Il y a exception si le développement de $\frac{1}{f}$ contient en facteur une puissance de $z - c$; il n'y a plus alors d'intégrale tendant vers α lorsque z tend vers c.

L'auteur traite, à la suite de cette question, des points d'indétermination (Fuchs) pour les intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{dx}{dy} = x^s g(y, x)$$

où s est un nombre entier positif, $g(y, x)$ une fonction régulière telle que $g(y, 0)$ ne soit pas identiquement nulle. D'après Fuchs, le point $x = 0$ est un point d'indétermination s'il existe des intégrales de l'équation précédente pouvant prendre une infinité de valeurs distinctes dans le voisinage de ce point. Il me semble que ce problème ne se rattache qu'un peu artificiellement à celui qui est traité au début du même Chapitre, et que leur rapprochement peut entraîner quelque confusion dans l'esprit du lecteur. Prenons par exemple l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$ qui n'admet, d'après le résultat rappelé tout à l'heure, aucune intégrale tendant vers une valeur limite e, *différente de zéro*, lorsque $|x|$ tend vers zéro. Cependant, l'intégrale générale de cette équation

$$y = Ce^{\frac{1}{x}}$$

peut prendre une infinité de fois toute valeur $l \neq 0$, dans un cercle de rayon aussi petit qu'on le voudra, ayant pour centre l'origine. Cette propriété n'est nullement en contradiction avec ce qui a été dit tout à l'heure, car on ne peut trouver pour x un chemin se rapprochant indéfiniment de l'origine, et tel que $|y - l|$ tende vers zéro en même temps que $|x|$.

Quoi qu'il en soit, M. Forsyth rappelle la classification des points d'indétermination de Fuchs et les résultats obtenus par ce géomètre grâce à l'introduction d'une variable auxiliaire.

L'étude des singularités accidentelles de seconde espèce est

beaucoup plus difficile. M. Forsyth y consacre deux Chapitres (p. 83-208) sans épuiser le sujet, qui est sans doute inépuisable, le nombre des cas possibles distincts paraissant illimité. On est dans tous les cas ramené à l'étude d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = x^s y^r \frac{q(y, x)}{p(y, x)} e^{G(y, x)},$$

r et s étant des nombres entiers, $p(y, x)$ et $q(y, x)$ des polygones entiers en y dont les coefficients sont des fonctions régulières de x, s'annulant pour $x = 0$, tels que $p(0, x)$ et $q(0, x)$ ne soient pas identiquement nuls, et $G(y, x)$ une fonction régulière. Il s'agit de rechercher les intégrales de cette équation qui tendent vers zéro avec x. Si l'on admet que l'intégrale cherchée est d'un degré infinitésimal déterminé μ, cet ordre μ peut dans tous les cas s'obtenir au moyen d'un diagramme analogue au diagramme de Puiseux pour trouver les degrés infinitésimaux des racines d'une équation algébrique. Ce degré μ étant supposé connu, l'équation peut, par une suite de transformations, être ramenée à une forme simple appartenant à un petit nombre de types :

$$t\frac{dv}{dt} = \Phi(v, t),$$

$$t^k\frac{dv}{dt} = \Phi(v, t) \qquad (k > 1),$$

$$t^k\frac{dv}{dt} = \frac{gv^n + bt + \ldots}{hv^m + ct + \ldots} \qquad (k \geqq 1,\ m \geqq 1,\ n \geqq 1).$$

Le premier de ces types, de beaucoup le plus étudié, peut être considéré comme à peu près complètement élucidé, grâce aux recherches de Briot et Bouquet, de MM. Poincaré et Picard, et d'autres encore, qui sont résumées par M. Forsyth.

Les autres types réduits ont été moins bien étudiés. Prenons, par exemple, l'équation

$$(4) \qquad t^s\frac{dv}{dt} = av + bt + \ldots \qquad (s > 1).$$

Briot et Bouquet avaient remarqué, sur un cas particulier, qu'en cherchant à déterminer une série entière en t sans terme constant, satisfaisant formellement à l'équation (4), on obtient une série

avec un rayon de convergence nul. Il s'ensuit qu'une équation de ce type n'admet pas en général d'intégrale régulière s'annulant pour $t = 0$. D'après les recherches plus récentes de MM. Horn et Bendixon, le point $t = 0$ est en général un point d'indétermination pour les intégrales de l'équation (4). En employant un artifice, dont la première idée paraît due à M. Picard, si l'on introduit une variable auxiliaire

$$\eta = e^{\frac{1}{1-s}\frac{1}{t^{s-1}}},$$

pour qu'une relation de la forme

$$U(v, t, \eta) = C \tag{5}$$

définisse une intégrale de l'équation différentielle (4), il faut et il suffit que U vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + t^s \frac{\partial U}{\partial t} + \Phi(v, t) \frac{\partial U}{\partial v} = 0. \tag{6}$$

Ayant obtenu une intégrale de cette équation (6), la relation (5) définit en général v comme fonction de t et de η, si la constante C n'a pas été choisie d'une façon particulière, mais il peut se faire que, pour des valeurs convenables de C, la variable auxiliaire η ne figure plus dans l'expression de v. Il est clair que ces indications exigeraient une étude plus approfondie. M. Forsyth discute en détail différents exemples empruntés à l'équation de Riccati et termine ce Chapitre par l'examen de quelques cas particuliers des derniers types réduits qui se ramènent aux formes précédentes.

On ne sait encore rien de général relativement aux intégrales de l'équation du premier ordre

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z) \tag{7}$$

dans le voisinage d'un couple de valeurs (α, c), formant une singularité essentielle pour $f(w, z)$. L'auteur démontre, dans le Chapitre VII, le théorème de M. Painlevé concernant les singularités mobiles (*parametric singularities*) des intégrales de l'équation (7), lorsque $f(w, z)$ est une fonction rationnelle de w, analytique en z. Un certain nombre d'exemples bien choisis montrent clairement que ces singularités mobiles sont toujours des pôles ou

des points critiques algébriques, tandis que les intégrales des équations différentielles du deuxième ordre ou d'ordre plus élevé peuvent avoir des singularités mobiles de nature bien plus compliquée.

Le lecteur trouvera dans le Chapitre suivant (Chap. VIII) une étude complète des singularités des intégrales de l'équation $F\left(z, w, \frac{dw}{dz}\right) = 0$, F étant un polynome en $\frac{dw}{dz}$, dont les coefficients sont des fonctions analytiques uniformes de w, z. Soit $z = c$, $w = \alpha$, $\frac{dw}{dz} = \gamma$ un système de solutions de l'équation proposée; si γ est une racine simple de l'équation en p

$$F(c, \alpha; p) = 0, \tag{8}$$

l'équation différentielle admet une intégrale et une seule prenant la valeur α pour $z = 0$, tandis que sa dérivée prend la valeur γ, et cette intégrale est régulière dans le domaine du point $z = c$. Si $p = \gamma$ est racine multiple d'ordre m de l'équation (8), sans que $\frac{\partial F}{\partial c} + \gamma \frac{\partial F}{\partial \alpha}$ soit nul, à cette racine γ correspond une intégrale pour laquelle $z = c$ est un point critique algébrique.

Enfin, lorsqu'on a à la fois pour un système de valeurs c, α, γ

$$F(c, \alpha, \gamma) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} + \gamma \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

quelques transformations analogues à celles qui ont été employées dans les Chapitres précédents permettent de ramener l'équation aux formes types déjà étudiées. Ces résultats conduisent tout naturellement à la théorie des solutions singulières, et M. Forsyth étudie en détail les relations de la solution singulière, quand elle existe, avec les autres intégrales.

Le Chapitre se termine par la démonstration du théorème de M. Painlevé relatif aux équations différentielles $F(w, w', z) = 0$, où F est algébrique en w et w', analytique en z. D'après cette importante proposition, qui généralise une proposition déjà établie, les intégrales d'une équation différentielle de cette espèce ne peuvent avoir de singularités essentielles mobiles.

Les résultats exposés dans ce Chapitre permettent aisément de résoudre la question suivante, qui a d'abord fait l'objet des recherches de Fuchs :

Trouver à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients de l'équation $F(w, w', z) = 0$ *pour que les intégrales n'admettent pas de points critiques mobiles.*

Ces conditions étant algébriques et d'une forme simple, on pouvait espérer que l'étude des équations différentielles satisfaisant à ces conditions conduirait à des transcendantes uniformes nouvelles, mais il n'en est rien. En effet, M. Poincaré démontrait peu après que, toutes les fois que les conditions de Fuchs sont satisfaites, l'intégration de l'équation différentielle s'effectue algébriquement, ou se ramène à des quadratures, ou à une équation de Riccati. La démonstration fait usage des transformations birationnelles, qui ont depuis lors joué un si grand rôle dans l'étude des équations différentielles. Après avoir établi les résultats de M. Poincaré, M. Forsyth traite comme exemple les équations binomes

$$w'^m = R(w, z),$$

R étant une fonction rationnelle de w, et détermine toutes les équations de cette espèce qui satisfont aux conditions de Fuchs, ce qui fournit une vérification du théorème de M. Poincaré.

Au même ordre d'idées se rattachent les recherches plus anciennes de Briot et Bouquet concernant les équations différentielles algébriques $F(w, w') = 0$, dont l'intégrale générale est une fonction uniforme. M. Forsyth établit, d'après la méthode même suivie par les auteurs, les conditions *nécessaires* pour qu'il en soit ainsi. Il est à remarquer que Briot et Bouquet admettaient que les conditions obtenues étaient *suffisantes*, ce qui ne résultait nullement de leur raisonnement, et ce qui revenait en réalité à admettre implicitement le théorème de M. Painlevé. Leur conclusion s'est trouvée juste, mais il n'en aurait pas été de même s'ils avaient étudié des équations du second ordre.

L'exposition des recherches plus récentes sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale n'acquiert qu'un nombre *fini* de valeurs se permutant autour des points critiques mobiles, et sur l'intégration algébrique, était en dehors du cadre de l'Ouvrage. M. Forsyth renvoie aux Mémoires originaux, en donnant cependant quelques indications sur la méthode. Il montre, en particulier, comment le problème est lié tout naturellement à l'étude des transformations birationnelles ou simplement

rationnelles des courbes algébriques. Ainsi, étant donnée une équation dont le premier membre $F(w, w', z)$ est un polynome en w et w', on est conduit à examiner si l'expression $dw - w'dz$ admet un facteur intégrant M qui soit égal à une intégrale abélienne de première espèce relative à la relation algébrique entre w et w'.

Avec le Tome III nous revenons à la théorie générale des systèmes d'équations différentielles. Étant donné le système

$$(9) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dt}{t},$$

où les dénominateurs sont des fonctions régulières s'annulant pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, et t une variable auxiliaire, les intégrales qui prennent ce système de valeurs initiales pour $t = 0$ échappent au théorème général de Cauchy. M. Forsyth montre d'abord comment une substitution linéaire permet de ramener les dénominateurs X_i à une forme simple. Cette transformation dépend de la résolution d'une équation algébrique de degré n, $F(x) = 0$, attachée au système (9), qui se réduit à l'équation classique dont dépend l'intégration de ce système, lorsque les dénominateurs se réduisent à leurs termes du premier degré. Dans le cas général où l'équation en λ a n racines simples $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on peut supposer qu'on a

$$X_i = \lambda_i x_i + \text{des termes de degré supérieur.}$$

Si $\lambda = \omega$ est une racine multiple, on obtient une forme réduite correspondante comme dans le cas de la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique.

Dans la suite, l'auteur se borne la plupart du temps à considérer un système de deux équations du premier ordre, ce qui rend les calculs beaucoup plus faciles à suivre et est tout aussi instructif que l'étude du cas le plus général. Un système de deux équations du premier ordre étant donné,

$$(10) \qquad \frac{du}{dz} = f(u, v, z), \qquad \frac{dv}{dz} = \varphi(u, v, z),$$

un système de valeurs $u = \alpha$, $v = \beta$, $z = c$ est *exceptionnel* si l'une ou l'autre des fonctions $f(u, v, z)$, $\varphi(u, v, z)$ n'est pas régulière dans le voisinage de ce système de valeurs. Se bornant au cas

où le système (α, β, c) est une singularité polaire, M. Forsyth est conduit à distinguer cinq cas différents, dont le plus général est celui d'un système de la forme

$$(11) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{P(u, v, z)}{R(u, v, z)}, \qquad \frac{dv}{dz} = \frac{Q(u, v, z)}{R(u, v, z)},$$

P, Q, R étant trois fonctions régulières dans le domaine des valeurs $u = v = z = 0$, et s'annulant pour ces valeurs. Pour rechercher si ce système admet des intégrales u et v s'annulant avec z, on suppose d'abord que ces intégrales sont de degrés infinitésimaux déterminés par rapport à z. Les nombres ρ et σ s'obtiennent à l'aide d'un diagramme de l'espace, tout à fait analogue à celui de Puiseux, les droites étant remplacées par des plans. Ayant obtenu un système de valeurs admissibles pour ρ et σ, les équations sont ensuite ramenées à des formes simples. La forme type, qu'on peut considérer comme normale, est la suivante :

$$(12) \qquad \begin{cases} t\dfrac{dU}{dt} = \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 t + \ldots, \\ t\dfrac{dV}{dt} = \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 t + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en U, V, t. Mais cette forme (12) ne contient pas tous les types possibles, pas plus que dans le cas d'une seule équation.

Tout le Chapitre XII (p. 40-120) est consacré à l'étude détaillée des intégrales du système (12), régulières ou non régulières, qui tendent vers zéro avec t. M. Forsyth commence par intégrer les équations élémentaires

$$z\frac{dU}{dz} = \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 z^m,$$

$$z\frac{dV}{dz} = \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 z^n,$$

où m et n sont des nombres entiers positifs, qui rentrent bien dans le type (12), et les résultats obtenus, dans ce cas très particulier, permettent à la fois de prévoir la complexité des résultats dans le cas général, et de se rendre compte des éléments qui doivent jouer un rôle essentiel dans la discussion. Les premiers de ces éléments, et les plus importants, ce sont les racines de l'équa-

tion quadratique

$$(\xi - \alpha_1)(\xi - \beta_2) - \alpha_2\beta_1 = 0. \tag{13}$$

Si cette équation a deux racines distinctes ξ_1 et ξ_2, on peut, par un changement linéaire d'inconnues, ramener le système (12) à la forme

$$\left\{\begin{aligned} t\frac{du}{dt} &= \xi_1 u + \Phi_1(u, v, t), \\ t\frac{dv}{dt} &= \xi_2 v + \Phi_2(u, v, t); \end{aligned}\right. \tag{14}$$

si l'équation (13) a une racine double ξ_1, la forme réduite est la suivante :

$$\left\{\begin{aligned} t\frac{du}{dt} &= \quad\quad + \xi_1 u + \Phi_1(u, v, t), \\ t\frac{dv}{dt} &= \mathrm{K}u + \xi_2 v + \Phi_2(u, v, t); \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions régulières qui s'annulent pour $u = v = t = 0$ et qui ne renferment pas de termes du premier degré en u et v.

La recherche des intégrales holomorphes s'annulant pour $t = 0$ s'effectue par les procédés classiques, et la discussion conduit aux résultats suivants :

Si aucune des racines ξ_1, ξ_2 de l'équation (13) n'est égale à un nombre entier positif, le système (14) admet un système unique d'intégrales holomorphes nulles à l'origine. Si une seule des racines de l'équation (13) est égale à un nombre entier positif, le système (14) ne possède pas en général d'intégrales holomorphes s'annulant pour $t = 0$, à moins qu'une condition subsidiaire ne soit remplie, et il existe alors une infinité simple d'intégrales holomorphes nulles pour $t = 0$.

Lorsque les deux racines ξ_1, ξ_2 sont des nombres entiers positifs, il n'existe pas en général de système d'intégrales holomorphes nulles pour $t = 0$; mais, dans certains cas, il peut y avoir une simple infinité, ou même une infinité double d'intégrales holomorphes satisfaisant à cette condition. On a des conclusions analogues lorsque l'équation quadratique (13) a une racine double égale à un nombre entier positif.

La recherche des intégrales non holomorphes s'annulant pour

$t = 0$ offre naturellement de bien plus grandes difficultés, si l'on veut traiter le problème dans toute sa généralité. L'auteur traite d'abord en détail le cas où l'équation caractéristique a deux racines distinctes ξ_1, ξ_2, dont aucune n'est égale à un nombre entier positif. Le système (14) admet alors des intégrales holomorphes s'annulant avec t, et l'on peut, par une transformation simple, le ramener à la forme

$$(16)\quad \begin{cases} t\dfrac{dt_1}{dt} = \xi_1 t_1 + \Phi_1(t_1, t_2, t), \\ t\dfrac{dt_2}{dt} = \xi_2 t_2 + \Phi_2(t_1, t_2, t), \end{cases}$$

où Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions régulières dont le développement ne contient aucun terme de degré inférieur au second. L'artifice employé consiste à introduire deux variables auxiliaires $t^{\xi_1} = z_1$, $t^{\xi_2} = z_2$ et les équations (16) sont alors remplacées par un système de deux équations aux dérivées partielles simultanées

$$(17)\quad \begin{cases} t\dfrac{\partial t_1}{\partial t} + \xi_1 z_1 \dfrac{\partial t_1}{\partial z_1} + \xi_2 z_2 \dfrac{\partial t_1}{\partial z_2} = \xi_1 t_1 + \Phi_1(t_1, t_2, t), \\ t\dfrac{\partial t_2}{\partial t} + \xi_1 z_1 \dfrac{\partial t_2}{\partial z_1} + \xi_2 z_2 \dfrac{\partial t_2}{\partial z_2} = \xi_2 t_2 + \Phi_2(t_1, t_2, t), \end{cases}$$

et l'on cherche à satisfaire à ce nouveau système par des fonctions régulières des variables t, z_1, z_2, s'annulant pour $t = z_1 = z_2 = 0$. *Si aucune des quantités*

$$(\lambda - 1)\xi_1 + \mu\xi_2 + \nu, \quad \lambda\xi_1 + (\mu - 1)\xi_2 + \nu$$

ne s'annule pour un système de nombres entiers positifs λ, μ, ν, *tels que* $\lambda + \mu + \nu \geqq 1$, on voit aisément qu'on peut trouver une infinité de développements suivant les puissances entières de t, z_1, z_2, satisfaisant *formellement* aux équations (17). On peut même choisir arbitrairement les coefficients A et B de z_1 et de z_2 dans ces développements. A l'aide d'une fonction majorante convenable, on démontre que ces séries entières admettent des rayons de convergence différents de zéro, ce qui conduit aisément aux conclusions suivantes :

1° La condition énoncée plus haut étant supposée satisfaite, si les parties réelles de ξ_1 et ξ_2 sont positives, le système (17) admet une double infinite d'intégrales s'annulant pour $t = 0$;

2° Si la partie réelle de ξ_1 est positive, et celle de ξ_2 négative (ou inversement), le système (17) admet une infinité simple d'intégrales s'annulant pour $t = 0$;

3° Si les parties réelles de ξ_1 et de ξ_2 sont négatives, on n'obtient aucune intégrale non holomorphe s'annulant pour $t = 0$.

Dans ces énoncés, l'auteur, on le voit, se borne à considérer les intégrales qui tendent vers zéro lorsqu'on fait décrire à la variable indépendante t un chemin aboutissant à l'origine, de telle façon que l'argument ne croisse pas indéfiniment.

La recherche des intégrales non holomorphes, qui sont nulles pour $t = 0$, dans les autres cas particuliers, s'effectue par des artifices du même genre. Seulement, on est conduit à choisir comme variables auxiliaires nouvelles $t \log t$ ou $t^{\xi} \log t$, ou même $t(\log t)^2$. La discussion est poussée assez loin pour que le lecteur puisse de lui-même l'étendre au cas général d'un nombre quelconque d'équations.

Le Chapitre XIII contient une exposition détaillée, éclaircie par de nombreux exemples, de la théorie classique des intégrales singulières. Étant donné un système de deux équations différentielles du premier ordre

$$(18) \qquad F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0, \qquad \Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

dont les premiers membres sont des polynomes en $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, dont les coefficients sont des fonctions analytiques uniformes de x, y, z, soit

$$(19) \qquad x = a, \qquad y = b, \qquad z = c, \qquad \frac{dy}{dx} = \beta, \qquad \frac{dz}{dx} = \gamma$$

un système de solutions de ces équations tel que le jacobien

$$J = \frac{D(F, \Phi)}{D\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)}$$

ne soit pas nul pour ce système de valeurs. La théorie générale des fonctions implicites, rapprochée du théorème d'existence de Cauchy, prouve que les équations (18) admettent un système

d'intégrales et un seul correspondant aux conditions initiales données. En d'autres termes, par le point (a, b, c) de l'espace, il passe une courbe intégrale et une seule tangente à la droite D représentée par les équations

$$(20) \qquad X - a = \frac{Y - b}{\beta} = \frac{Z - c}{\gamma}.$$

Il n'en est plus de même si le jacobien J est nul. En éliminant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ entre les relations (18) et l'équation $J = 0$, on obtient l'équation d'une surface

$$(21) \qquad \Theta(x, y, z) = 0,$$

telle que pour tout point de cette surface les trois relations

$$F(a, b, c; p, q) = 0, \qquad \Phi(a, b, c; p, q) = 0, \qquad J(a, b, c; p, q) = 0$$

admettent une solution commune $p = \beta$, $q = \gamma$. En général la droite D représentée par les équations (20) n'est pas située dans le plan tangent au point (a, b, c) à la surface Θ, et ce point est alors un point singulier pour l'intégrale répondant à ces conditions initiales. Mais il en est tout autrement si en chaque point de la surface Θ la droite D correspondante est tangente à cette surface. En effet, les courbes de la surface Θ qui sont tangentes en chacun de leurs points à la droite D correspondante forment des intégrales singulières du système (18). Ces intégrales sont déterminées par une équation différentielle du premier ordre, qui peut à son tour admettre elle-même une solution singulière. Cette remarque conduit à distinguer deux sortes de solutions singulières pour les systèmes considérés. M. Forsyth montre comment on peut reconnaître directement, en partant des équations (18), l'existence des solutions singulières des deux espèces et étudie ensuite leurs relations avec l'intégrale générale.

Une équation différentielle du second ordre pouvant être ramenée à un système de deux équations du premier ordre, les résultats précédents s'y appliquent immédiatement. En ce qui concerne le théorème général d'existence, M. Forsyth cite un cas d'exception apparente analogue à l'exemple de Fuchs et nous ne pouvons que renouveler les réserves qui ont déjà été formulées.

Lorsque les conditions de régularité requises pour l'application du théorème de Cauchy à l'équation

$$(22) \qquad w' = f(w', w, z)$$

ne sont pas satisfaites, le système équivalent formé de deux équations différentielles du premier ordre est de ceux qui ont été étudiés en détail dans les Chapitres précédents. Mais, d'autre part, il est aisé de concevoir que la forme particulière de ce système puisse conduire dans certains cas à des conclusions plus précises. Aussi M. Forsyth reprend l'étude directe de l'équation (22) dans quelques cas spéciaux, tels que les équations

$$z^2 w'' = f(z w', w, z),$$
$$z w'' = f(w', w, z),$$

et plus généralement du cas où les conditions initiales correspondent à une singularité accidentelle du second membre $f(w', w, z)$. Le Chapitre suivant contient de même une étude extrêmement détaillée des intégrales singulières d'une équation

$$(23) \qquad F(w'', w', w, z) = 0,$$

où F est un polynome entier en w'', w', w, dont les coefficients sont des fonctions analytiques de z.

L'existence possible de singularités essentielles *mobiles* dans l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre supérieur au premier rend singulièrement difficile, pour une équation de la forme (23), la résolution du problème qui a été complètement élucidé pour les équations du premier ordre (Chap. IX). On peut encore, avec plus ou moins de difficulté, obtenir les conditions pour que l'intégrale générale ne puisse admettre de *point critique algébrique mobile;* mais, ces conditions étant supposées satisfaites, on ne peut affirmer que l'intégrale générale n'admet que des points critiques fixes. Prenons, par exemple, l'équation différentielle

$$2(w'^2 - ww'')^3 + 27 w w'^5 = 0;$$

on s'assure aisément qu'une valeur quelconque $z = a$ ne peut être un point critique algébrique pour une intégrale. Cependant, l'intégrale générale

$$w = \alpha e^{(z-c)^{-\frac{1}{2}}},$$

où α et c sont les deux constantes arbitraires, n'est pas une fonction uniforme, le point $z = c$ étant un point critique essentiel mobile. On dit, avec M. Picard, que l'intégrale générale d'une équation différentielle est *à apparence uniforme* (*subuniform*), lorsqu'elle n'admet pas de point critique algébrique mobile, et l'objet essentiel du Chapitre XVI est la détermination explicite des équations du second ordre de la forme

$$w'' = R(w, w'), \tag{24}$$

R étant une fonction rationnelle de w et w', dont l'intégrale générale est à apparence uniforme. Le lecteur serait sans doute très étonné de ne pas voir au moins citées les remarquables recherches de M. Painlevé qui ont fait faire tant de progrès à cette théorie, s'il n'avait pas pris garde à la date de 1900, inscrite à la première page de ce Volume. Malgré cette lacune, qu'on ne saurait imputer à l'auteur, la lecture de ce Chapitre sera une excellente préparation à l'étude des beaux travaux de M. Painlevé.

La variable z ne figurant pas dans l'équation (24), il est évident qu'il ne peut y avoir de points critiques fixes. Les divers artifices employés pour former les conditions voulues se rattachent à quelques idées très simples. Il s'agit tout d'abord d'exprimer qu'on ne peut obtenir d'intégrale de l'équation (24) représentée par un développement en série entière ordonnée suivant les puissances fractionnaires de $z - c$, et ne renfermant qu'un nombre fini de termes à exposants négatifs. On démontre ainsi successivement que le second membre de l'équation (24) doit être un polynome en w', du second degré au plus, de la forme $A_0 + A_1 w' + A_2 w'^2$; A_0, A_1, A_2 étant des fonctions rationnelles de w, de degrés au plus égaux à 3, 1, —1, respectivement. L'équation proposée peut donc s'écrire

$$w'' = \frac{P(w) + Q(w)w' + R(w)w'^2}{D(w)}, \tag{25}$$

P, Q, R, D étant des polynomes en w. On démontre ensuite que D (w) ne peut avoir que des racines simples

$$D(w) = (w - \alpha)(w - \beta)\ldots(w - \lambda).$$

D'autre part, si l'intégrale générale de l'équation (25) n'admet

que des discontinuités polaires à distance finie, w et w' sont infinis en même temps. Par suite, si, pour une valeur finie de z, w prend la valeur α, w' doit prendre en même temps une valeur finie ξ telle qu'on ait

$$(26) \qquad P(\alpha) + Q(\alpha)\xi + R(\alpha)\xi^2 = 0.$$

Soient p_1 et p_2 les deux racines de l'équation précédente; pour que l'intégrale générale de l'équation (25) soit une fonction méromorphe, il est encore nécessaire que cette équation admette une infinité d'intégrales holomorphes dépendant *d'une constante arbitraire,* correspondant aux valeurs initiales $w = \alpha$, $w' = p_1$, pour une valeur arbitraire $z = e$. Supposons d'abord que $P(\alpha)$ ne soit pas nul; p_1 est différent de zéro, et le développement de $w - \alpha$ suivant les puissances de $z - c$ commence par un terme du premier degré, de sorte que w', considéré comme fonction de $w - \alpha$, est aussi une fonction régulière dépendant d'une constante arbitraire. Mais w', considéré comme fonction de w, satisfait à l'équation du premier ordre

$$W\frac{dW}{dw} = \frac{P + QW + RW^2}{D},$$

et cette équation doit, par conséquent, admettre une infinité d'intégrales holomorphes prenant la valeur $W = p_1$ pour $w = \alpha$. On est ainsi ramené à une question qui a été traitée en détail antérieurement. Les conditions qu'on a trouvées sont au nombre de deux; il faut d'abord qu'un certain coefficient soit un nombre entier positif et, en outre, qu'une certaine relation d'égalité soit vérifiée. Ces conditions doivent être satisfaites pour les deux racines p_1 et p_2 de l'équation (26), correspondant à chaque racine $w = \alpha$ de $D(w) = 0$, et il doit en être de même de l'équation obtenue en changeant w en $\frac{1}{u}$. Une discussion spéciale est nécessaire lorsque α est racine de l'équation $P(\alpha) = 0$ et conduit à des conditions nouvelles. On obtient de cette façon des conditions nécessaires pour que l'intégrale générale soit à apparence uniforme; mais, ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer, ces conditions sont insuffisantes pour qu'il n'y ait pas de singularités essentielles mobiles, et c'est grâce à une idée nouvelle toute différente que M. Painlevé a pu pousser plus loin la solution du problème.

M. Forsyth pousse les calculs jusqu'au bout dans le cas de l'équation du type le plus simple

$$w'' = aw^2 + bw + c + d + (kw + h)w',$$

étudié d'abord par M. Picard, puis par M. Mittag-Leffler. Les conditions obtenues par l'application de la méthode générale sont effectivement suffisantes pour que l'intégrale générale soit une transcendante méromorphe, et cette intégrale s'exprime au moyen des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.

Le sujet du Chapitre XVII, qui termine l'étude des équations différentielles, ne se rattache qu'assez indirectement aux développements antérieurs, mais on ne peut que savoir gré à l'auteur de l'avoir introduit dans son Ouvrage. Il s'agit en effet de l'important théorème démontré pour la première fois par M. Bruns, d'après lequel toute intégrale algébrique du problème des n corps ($n \geqq 3$) est une combinaison des intégrales classiques. M. Forsyth considère d'une façon générale un système d'équations différentielles de la forme

$$(27) \qquad \frac{dx_r}{dt} = y_r, \qquad \frac{dy_r}{dt} = A_r(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

où les A_r sont des fonctions algébriques homogènes de degré N des variables x_i. Ces fonctions n'étant pas nécessairement rationnelles, on peut toujours les rendre rationnelles par l'adjonction d'une variable auxiliaire s, liée aux x_i par une équation algébrique irréductible. On montre que toutes les intégrales algébriques de ce système, qui ne contiennent pas explicitement le temps t, peuvent se déduire de certaines intégrales Φ, entières par rapport aux y, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des x_i et de s, qui possèdent une certaine homogénéité. Si l'on ordonne Φ par groupes de termes homogènes par rapport aux y,

$$\Phi_0 + \Phi_2 + \Phi_4 + \ldots,$$

Φ_0 étant de degré p, Φ_2 est de degré $p - 2$, Φ_4 de degré $p - 4$, et ainsi de suite. La discussion donne aussi des renseignements plus précis sur la forme spéciale du premier polynome Φ_0.

Si l'on applique ces résultats généraux au problème des n corps, il arrive qu'on peut déterminer de proche en proche la forme des fonctions $\Phi_0, \Phi_2, \Phi_4, \ldots$, ce qui conduit au théorème de M. Bruns.

Tome IV : *Équations différentielles linéaires.*

Après ces théories générales, M. Forsyth étudie en détail, dans le Tome IV, les propriétés particulières des équations différentielles linéaires. La plupart des problèmes dont on avait reconnu l'extrême difficulté quand on cherche à les résoudre pour les équations différentielles de forme quelconque deviennent singulièrement plus faciles quand on se borne à cette classe d'équations, et il serait peut-être plus logique de commencer par les étudier avant d'aborder les équations différentielles les plus générales. Mais il faut reconnaître que la marche suivie par l'auteur offre aussi des avantages, ne serait-ce que de montrer immédiatement au lecteur combien les équations linéaires sont intéressantes pour les mathématiciens, qui ont trouvé là un admirable champ d'applications pour leurs théories générales.

Le premier Chapitre est un résumé très clair des propriétés classiques qui sont exposées aujourd'hui dans tous les Cours d'Analyse : théorèmes d'existence, déterminant de Wronski, systèmes fondamentaux d'intégrales, etc. M. Forsyth suppose toujours qu'il s'agit d'une variable complexe, et, étant donné le point de vue auquel il s'est placé, il insiste naturellement sur ce fait que l'on connaît *a priori* les seuls points singuliers que puissent présenter les intégrales. Il expose aussi l'élégante méthode, déduite par Hermite de la théorie des résidus, pour l'équation à coefficients constants avec un second membre.

L'étude des intégrales dans le domaine d'un point singulier isolé est également classique aujourd'hui. L'auteur établit les propriétés de l'équation déterminante fondamentale par la méthode de M. Hamburger et rattache ensuite les résultats obtenus à la théorie des diviseurs élémentaires de Weierstrass. Grâce à cette théorie, il peut montrer aisément qu'à chaque racine multiple d'ordre r de l'équation déterminante correspondent r intégrales distinctes, se partageant naturellement en un certain nombre de groupes ; les intégrales d'un même groupe sont transformées par une substitution linéaire d'une forme particulièrement simple, après une circulation de la variable autour du point singulier. La forme analytique des intégrales, propre à mettre en évidence ce

mode de permutation, est établie d'après la méthode de M. Hamburger. Les intégrales d'un même groupe sont, comme l'on sait, représentées par des formules de la forme

$$\begin{aligned}
v_1 &= \psi_1, \\
v_2 &= \psi_2 + \psi_1 L, \\
v_3 &= \psi_3 + 2\psi_2 L + \psi_1 L^2, \\
v_4 &= \psi_4 + 3\psi_3 L + 3\psi_2 L^2 + \psi_1 L^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où l'on a posé $L = \frac{1}{2\pi i}\log(z-a)$, et où $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sont des fonctions de la forme $(x-a)^\alpha \varphi_i(x)$, $\varphi_i(x)$ étant uniforme dans le domaine du point a. M. Forsyth étudie aussi l'équation linéaire d'ordre p, qui est vérifiée par les p intégrales d'un même sous-groupe.

Lorsque le développement des fonctions $\varphi_i(x)$, dans le domaine du point $z = a$, ne contient qu'un nombre fini de termes à exposants négatifs, l'intégrale correspondante est dite *régulière* dans le domaine du point a. Le Chapitre III est consacré à l'étude des équations dont toutes les intégrales sont régulières dans le domaine du point a. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, dues à Fuchs, sont établies par la méthode de Frobenius.

La discussion dépend avant tout de la nature des racines d'une équation algébrique d'ordre n, qui s'écrit immédiatement, et qui est liée étroitement à l'équation déterminante fondamentale. Lorsque cette équation a des racines égales ou plus généralement s'il existe des groupes de racines ne différant que de nombres entiers, il leur correspond en général des intégrales dont le développement renferme des termes logarithmiques. Mais, si certaines conditions accessoires sont satisfaites, ces termes logarithmiques peuvent disparaître, soit en partie, soit complètement. En particulier, si toutes les racines sont des nombres entiers positifs *distincts,* il peut se faire que toutes les intégrales soient holomorphes dans le domaine du point a, qui est dit alors un point *à apparence singulière*. Le lecteur trouvera toutes ces questions traitées en détail dans l'Ouvrage de M. Forsyth.

Les résultats précédents donnent un intérêt tout particulier aux

équations linéaires dont toutes les intégrales sont régulières dans le voisinage de toute valeur de z, y compris $z = \infty$. Il n'y a aucune difficulté à obtenir la forme générale de ce type d'équations linéaires, auxquelles le nom de Fuchs est resté attaché, et dont l'équation classique d'Euler

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots = 0$$

nous offre l'exemple le plus élémentaire. L'exemple le plus simple après celui-là nous est fourni par l'équation du second ordre avec trois points singuliers (l'un d'eux pouvant être rejeté à l'infini), et qui se ramène à l'équation de la série hypergéométrique. M. Forsyth ne pouvait manquer, en passant, de résumer le célèbre Mémoire de Riemann sur les fonctions

$$P \left\{ \begin{array}{llll} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{array} \right\},$$

qui sont définies par leurs points de discontinuité a, b, c et les exposants de discontinuité α, α', ... entre lesquels est assignée une relation convenable. Dans ce cas particulier, l'équation différentielle linéaire, qui est vérifiée par les diverses branches de la fonction P, est complètement déterminée. Mais il n'en est plus de même dès que le nombre des points singuliers est supérieur à trois. Une équation différentielle linéaire du second ordre du type de Fuchs, ayant n points singuliers donnés ($n > 3$), avec des exposants de discontinuité connus, dépend encore d'un certain nombre de paramètres arbitraires. M. Forsyth passe en revue quelques formes réduites auxquelles on peut ramener ces équations et dont se sont servis divers auteurs. Il cite également un certain nombre d'équations, que l'on rencontre en Physique mathématique, et qui appartiennent au type de Fuchs, ou peuvent être considérées comme des dégénérescences de ce type, lorsque deux ou plusieurs points singuliers sont venus se confondre.

Comme application de la théorie de Fuchs, on étudie le problème de reconnaître si l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire est une fonction *rationnelle* de la variable indépendante. L'auteur rappelle aussi la solution donnée par Heine d'une question

voisine de celle-là, relative aux équations du second ordre dont *une* intégrale particulière est un polynome.

L'étude des équations différentielles linéaires dont l'intégrale générale est une fonction algébrique est liée étroitement à la détermination des groupes d'ordre fini de substitutions linéaires. Cette étude comprend deux problèmes distincts : 1° former toutes les équations linéaires d'ordre n dont l'intégrale générale est algébrique; 2° étant donnée une équation linéaire d'ordre n, reconnaître si l'intégrale générale est algébrique.

M. Forsyth expose d'abord en détail l'élégante solution donnée par M. Klein pour le premier de ces deux problèmes, dans le cas de $n = 2$, solution où interviennent les groupes de mouvements qui font revenir sur lui-même un des polyèdres réguliers; il montre également comment la solution du second problème se ramène en définitive à un calcul d'identification. Pour résoudre complètement les mêmes questions lorsque $n \geqq 3$, il faudrait d'abord avoir énuméré tous les groupes d'ordre fini de substitutions linéaires à n variables.

Cette énumération a été faite pour $n = 3$ par MM. Jordan, Klein, Valentiner, etc. M. Forsyth expose la méthode de M. Painlevé permettant de former toutes les équations du troisième ordre à intégrale générale algébrique qui correspondent à un groupe d'ordre fini. Cette méthode, qui repose sur l'emploi de deux invariants analogues au Schwatzien, conduit à des calculs assez laborieux, qui ont été effectués pour certains groupes par M. Boulanger. Il ne semble pas que la question inverse ait reçu jusqu'ici de solution complète, au point de vue pratique.

A ce même ordre d'idées se rattache naturellement l'étude des relations algébriques entre les intégrales. Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales linéairement indépendantes d'une équation du troisième ordre (E_3); si l'on considère y_1, y_2, y_3 comme les coordonnées homogènes d'un point dans un plan, à l'équation (E_3) correspond une courbe plane Γ_3 qui est complètement définie, abstraction faite d'une transformation homographique. A une équation du quatrième ordre (E_4) correspond de même une courbe gauche du quatrième ordre Γ_4, et ainsi de suite. Il est clair que, si l'intégrale générale de (E_3) est algébrique, la courbe Γ_3 est elle-même algébrique; mais la réciproque n'est pas toujours exacte. M. Forsyth

traite en détail l'exemple bien connu de Fuchs où la courbe Γ_3 est une conique. Lorsque la relation

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0$$

est de degré supérieur à *deux*, et l'équation du troisième ordre ramenée à la forme

$$y''' + 3Qy' + Ry = 0,$$

tout covariant de F est une fonction rationnelle de z, pourvu que l'équation soit du type fuchsien. Il en résulte que y_1, y_2, y_3 sont aussi en général des fonctions algébriques de z. L'auteur se contente de ces indications sur ce sujet qui a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, auxquels il renvoie le lecteur.

Lorsque les coefficients de l'équation linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y = 0$$

n'ont pas la forme simple exigée par le théorème de Fuchs dans le domaine d'un point singulier ($x = 0$ par exemple), l'équation (1) ne peut admettre m intégrales régulières distinctes dans le domaine de ce point. La recherche des intégrales régulières est alors beaucoup plus difficile que dans le cas déjà traité. M. Forsyth expose les résultats des recherches sur ce sujet dues à MM. Frobenius, Thomé, Floquet, Hamburger, Fabry, etc. Le point $x = 0$ étant un pôle d'ordre ω_r pour le coefficient $p_r (r = 1, 2, \ldots, m)$, considérons la suite des nombres entiers

$$\omega_1 + m - 1, \quad \omega_2 + m - 2, \quad \ldots, \quad \omega_{m-1} + 1, \quad \omega_m,$$

dont l'un au moins est plus grand que m, sans quoi l'équation serait du type de Fuchs. Soient Π le plus grand nombre de cette suite, et $\omega_n + m - n$ le premier nombre de la suite égal à Π. Le nombre n est appelé l'*indice caractéristique* de l'équation. Il est aisé de comprendre comment ce nombre n s'introduit dans la question.

Supposons en effet que l'équation (1) admette une ou plusieurs intégrales régulières dans le domaine de l'origine; elle admettra forcément une intégrale particulière de la forme $x^\mu \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe dans ce domaine; or, en cherchant

à déterminer les coefficients d'un développement

$$(2) \qquad x^{\mu}(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots)$$

satisfaisant formellement à l'équation (1), on est conduit à une équation algébrique de degré $m - n$ pour déterminer l'exposant μ, équation qui remplace ici l'équation déterminante de Fuchs, à laquelle elle se réduit pour $n = 0$. Mais la suite de la discussion est beaucoup plus compliquée que dans le cas simple de Fuchs. Le nombre $m - n$ n'est en effet qu'une *limite supérieure* du nombre des intégrales régulières distinctes possibles. Supposons, pour fixer les idées, que l'équation de degré $m - n$ ait toutes ses racines distinctes et que la différence de deux quelconques de ces racines soit différente d'un nombre entier. On peut alors déterminer $m - n$ développements distincts de la forme (2), satisfaisant formellement à l'équation (1); mais les séries entières ainsi obtenues ont en général un rayon de convergence *nul*. Il ne suffit donc pas que l'indice n soit inférieur à m pour qu'il existe des intégrales régulières; d'autres conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues par MM. Frobenius, Thomé, Floquet. On les trouvera dans le Livre de M. Forsyth, ainsi que de nombreux exemples montrant la marche à suivre pour reconnaître effectivement s'il existe des intégrales régulières et les déterminer. Avec le Chapitre VIII, nous abordons l'étude des intégrales irrégulières. Une équation du premier ordre, à coefficients rationnels, dont l'intégrale n'est pas régulière dans le domaine de l'origine, admet pour intégrale une expression de la forme

$$e^{\Omega} x^{\mu}(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots),$$

Ω étant un polynome en $\frac{1}{x}$. En essayant d'étendre ce résultat à une équation linéaire d'ordre supérieur, M. Thomé a montré qu'on pouvait trouver un certain nombre de développements de cette forme (*intégrales normales*) satisfaisant formellement à l'équation. Dans certains cas, on est conduit à ajouter des termes logarithmiques, et même des développements où x doit être remplacé par $x^{\frac{1}{p}}$ (*subnormal integrals*), p étant un nombre entier. Malheureusement ces développements sont en général divergents, ce qui en diminue beaucoup l'intérêt. M. Forsyth traite cependant

avec beaucoup de détails un certain nombre de cas particuliers où les calculs conduisent effectivement à des intégrales de l'espèce considérée.

Cette théorie des intégrales irrégulières a été, comme l'on sait, fort heureusement complétée par M. Poincaré, avec sa belle généralisation de la méthode de Laplace. M. Forsyth reproduit les résultats de M. Poincaré, que la plupart des lecteurs français connaissent sans doute pour les avoir lus dans le Tome III du *Traité d'Analyse* de M. Picard.

Le Chapitre VIII est assurément un des plus intéressants de ce Tome, car on y trouve une élégante application de la théorie encore récente des déterminants d'ordre infini. Les coefficients d'une équation linéaire et homogène d'ordre n étant holomorphes dans une couronne circulaire C, comprise entre deux cercles concentriques de rayons R et R', décrits de l'origine pour centre, il résulte de la théorie générale que cette équation admet toujours un certain nombre d'intégrales de la forme

$$y = x^{\rho}\varphi(x), \tag{3}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe de x dans la couronne C, et qu'il existe au plus n intégrales distinctes de cette espèce. La fonction $\varphi(x)$ étant supposée développée par la formule de Laurent

$$\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m x^m,$$

en écrivant que le développement (3) satisfait formellement à l'équation linéaire proposée, on obtient un système d'une infinité d'équations linéaires et homogènes pour déterminer les coefficients a_m. Les valeurs convenables de l'exposant ρ ne sont évidemment déterminées qu'à un nombre entier près. Or, en généralisant la méthode élémentaire pour la discussion d'un nombre fini d'équations linéaires et homogènes, on est conduit à une fonction entière de genre *un* $D(\rho)$, dont les racines donnent précisément les valeurs cherchées de l'exposant ρ. Ces racines se partagent naturellement en n groupes, les racines d'un même groupe formant une progression arithmétique de raison égale à l'unité. Cette fonction entière $D(\lambda)$ s'exprime précisément par un déterminant d'ordre infini,

dont l'étude donne la solution complète du problème, du moins au point de vue théorique. Toute racine simple ρ' de $D(\lambda)$ fournit une intégrale de la forme (3); une racine multiple d'ordre p fournit p intégrales distinctes dont le développement contient en général des termes logarithmiques. Les calculs numériques paraissent très laborieux. Ils ont été effectués par M. Hill pour une équation du second ordre qui se présente dans l'étude du mouvement du périgée de la Lune. Mais, dans ce cas particulier, la présence de certains coefficients très petits rend les séries très rapidement convergentes. M. Forsyth indique aussi rapidement les autres méthodes qui ont été proposées pour résoudre le même problème.

Les équations linéaires, dont les coefficients sont uniformes et périodiques, admettent toujours un certain nombre d'intégrales, qui sont des fonctions périodiques de seconde espèce. La discussion de l'équation aux multiplicateurs offre la plus grande analogie avec la discussion de l'équation déterminante, et conduit à des conclusions analogues. On peut ainsi prévoir la forme analytique des intégrales, mais la détermination effective des multiplicateurs est en général très difficile. Parmi les exemples traités, nous citerons la belle méthode de M. Liapounoff, relative à l'équation

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \mu w p(z) = 0, \tag{4}$$

où $p(z)$ est une fonction périodique, μ un paramètre. L'équation aux multiplicateurs est ici de la forme

$$\Omega^2 - 2A\Omega + 1 = 0.$$

M. Forsyth montre rapidement, d'après M. Liapounoff, comment on peut développer A suivant les puissances du paramètre μ :

$$A = 1 - \mu A_1 + \mu^2 A_2 - \mu^3 A_3 + \ldots;$$

les coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots$ s'obtiennent par des quadratures. On y trouvera aussi les méthodes de Lindemann et de Lindstedt pour l'équation du cylindre elliptique. La seconde partie du Chapitre est consacrée à l'exposition des théorèmes classiques de M. Picard sur les équations dont les coefficients sont des fonctions uniformes

doublement périodiques; les résultats sont appliqués à l'équation de Lamé qui a été le point de départ de cette théorie.

Dans le Chapitre X, qui termine ce Volume, après des généralités sur les équations linéaires à coefficients algébriques, l'auteur rappelle certains points de la théorie des fonctions automorphes, qui sont nécessaires pour la démonstration du théorème de M. Poincaré : *Toute équation linéaire à coefficients algébriques peut être intégrée au moyen de fonctions fuchsiennes et zêta-fuchsiennes.*

Tomes V et VI : *Équations aux dérivées partielles.*

La plupart des sujets traités dans le Tome V sont aujourd'hui tellement classiques, qu'il nous suffira d'indiquer sommairement le contenu des divers Chapitres :

Chapitres I et II. — Théorèmes d'existence. Problème de Cauchy. La méthode adoptée pour la démonstration des théorèmes d'existence est celle de Mme de Kowalesky.

Chapitre III. — Équations linéaires et systèmes complets.

Chapitre IV. — Seconde méthode de Jacobi avec les développements de Mayer. Méthode de Charpit.

Chapitre V. — Différentes espèces d'intégrales d'une équation du premier ordre et d'un système complet non linéaire. On trouvera dans ce Chapitre une discussion très minutieuse de la méthode de la variation des constantes et des différentes espèces d'intégrales que l'on peut déduire d'une intégrale complète.

Chapitre VI. — La méthode des caractéristiques pour l'équation à deux variables indépendantes; relations géométriques entre les diverses espèces d'intégrales.

Chapitre VII. — Intégrales singulières.

Chapitre VIII. — La méthode des caractéristiques pour un nombre quelconque de variables indépendantes.

Pour la rédaction de ces trois Chapitres, l'auteur s'est beaucoup servi du Mémoire bien connu de M. Darboux *Sur les solutions singulières.*

Chapitre IX. — La méthode de Lie appliquée aux équations du premier ordre.

Chapitre X. — Les équations de la Dynamique.

Chapitre XI. — Équations simultanées du premier ordre. Les Chapitres précédents ont mis en évidence que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, ou d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, *à une seule fonction inconnue,* se ramène en définitive à l'intégration d'un système d'équations ordinaires. Mais cette réduction n'est plus possible en général pour un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à *plusieurs* fonctions inconnues. M. Forsyth résume cependant les résultats des recherches entreprises dans cette voie, depuis Jacobi, par MM. Natani, König, Hamburger, etc.

Ces différentes méthodes ne s'appliquent qu'à des systèmes de forme spéciale et ne peuvent conduire au but que si certaines conditions spéciales sont remplies. La difficulté de ce problème est d'ailleurs du même ordre que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier, et peut quelquefois s'y ramener.

C'est à ce nouveau problème, et en particulier à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, qui en est le cas particulier le plus simple, qu'est consacré le Tome VI. La lecture en est surtout intéressante pour ceux qui veulent suivre le développement historique de cette partie de la Science. Ils y trouveront un grand nombre de méthodes, qui n'ont plus guère d'intérêt aujourd'hui; mais cela engendre forcément un peu de confusion, et il nous a semblé difficile, pour un lecteur non au courant, de démêler les idées vraiment fécondes au milieu de tant de procédés différents.

Dans le premier Chapitre, l'auteur discute d'abord les définitions de l'intégrale générale proposées par Ampère et Cauchy, et prouve, par quelques exemples simples, qu'une intégrale peut être générale au sens d'Ampère sans l'être au sens de Cauchy. Il expose ensuite la classification des intégrales due à Ampère, qui repose sur la façon dont les fonctions arbitraires figurent dans l'intégrale générale.

Viennent ensuite deux Chapitres consacrés à une exposition de la méthode de Laplace et de la méthode de Riemann, qui ne diffère pas au fond de l'exposition donnée par M. Darboux dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces*. Elle est cependant complétée sur certains points; ainsi, on étudie le cas où il existe entre $n+1$ intégrales particulières une relation linéaire dont les coefficients sont fonctions d'une seule des variables indépendantes. L'auteur donne aussi une formule de M. Borel, permettant d'exprimer l'intégrale générale par une quadrature partielle où figure une seule fonction arbitraire.

M. Forsyth reproduit également la démonstration due à M. Cosserat des propositions énoncées par Moutard, concernant les équations dont l'intégrale générale est de la forme

$$z = F(x, y, X, X', \ldots, X^{(p)}, Y, Y', \ldots, Y^{(q)}),$$

X étant une fonction arbitraire de x, Y une fonction arbitraire de y.

Dans les deux Chapitres suivants, on trouvera l'exposition détaillée des méthodes de Monge, de Boole et d'Ampère pour l'intégration des équations de Monge-Ampère, linéaires en $r, s, t, rt - s^2$. La recherche des intégrales intermédiaires conduit à former deux systèmes de deux équations linéaires simultanées du premier ordre, et à déterminer, s'il en existe, les intégrales de chacun de ces systèmes. Tous les cas particuliers possibles sont passés en revue avec de nombreux exemples. Le théorème de S. Lie et Darboux, sur les équations qui admettent deux intégrales intermédiaires dépendant d'une fonction arbitraire et provenant de systèmes différents, ne pouvait manquer de trouver place dans cet exposé.

La méthode de M. Darboux, plus générale que celles de Monge et d'Ampère, consiste essentiellement à adjoindre à l'équation proposée une autre équation d'ordre $n \geqq 2$, formant avec la première un système en involution, c'est-à-dire dont les solutions communes ont le plus haut degré de généralité possible. En faisant successivement $n = 2, 3, \ldots$, on est conduit à considérer deux suites indéfinies de systèmes de deux équations linéaires du premier ordre, et il suffit qu'on arrive dans l'une de ces suites à un système admettant deux intégrales distinctes, pour que la solution du problème de Cauchy, relativement à l'équation proposée,

soit ramenée à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. En particulier, les équations qu'Ampère appelait de la première classe sont intégrables de cette façon. La méthode de M. Darboux est exposée par M. Forsyth avec tous les détails nécessaires et éclaircie par de nombreux exemples.

Avec le Chapitre suivant, nous revenons à la méthode de la variation des constantes. On sait que cette méthode, appliquée à une équation du second ordre, conduit à un problème plus difficile en apparence que le problème même qu'il s'agit de résoudre. Cependant Imschenvetsky, en partant d'une intégrale renfermant seulement trois paramètres, a indiqué une méthode de transformation qui offre quelquefois des avantages. Cette méthode n'est au fond qu'une transformation de contact, ce que l'exposition de M. Forsyth ne met peut-être pas suffisamment en évidence.

Les multiplicités caractéristiques n'apparaissent qu'à la page 388 du Volume, ce qui pourrait surprendre si l'on ne tenait pas compte du plan adopté par l'auteur. L'exposition est du reste très claire. Ces multiplicités se présentent naturellement dès qu'on veut discuter à fond le problème de Cauchy et rechercher les multiplicités pour lesquelles ce problème est indéterminé. On est ainsi conduit aux deux systèmes de caractéristiques, à leur distinction en deux classes (caractéristiques du premier ordre ou du second ordre), suivant l'ordre des dérivées où commence l'indétermination, et à la classification des équations du second ordre basée sur la nature des deux familles de caractéristiques.

La recherche des intégrales intermédiaires pour les équations de forme générale est liée étroitement à l'étude des caractéristiques. Lorsque l'équation possède un système de caractéristiques du premier ordre, cette recherche dépend d'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, *non linéaires*, à une seule fonction inconnue. Le cas le plus intéressant est celui où ces deux équations forment un système en involution. On obtient ainsi une classe étendue d'équations du second ordre dont l'intégrale générale peut être écrite sous forme explicite sans aucun signe de quadrature.

Toute transformation de contact, appliquée à une équation *quelconque* du second ordre, conduit à une autre équation de même espèce. Mais il existe aussi des transformations d'une autre

espèce qui, appliquées à certaines équations *particulières* du second ordre, conduisent à de nouvelles équations du second ordre. La transformation de Laplace en est un exemple mémorable. Un grand nombre de transformations analogues, s'appliquant à des catégories plus ou moins générales d'équations, ont été étudiées depuis lors. La plupart de ces transformations peuvent être rattachées à une classe générale, étudiée d'abord par M. Bäcklund à propos de la théorie des surfaces à courbure constante. Après avoir défini les transformations de Bäcklund et établi quelques propriétés générales, M. Forsyth donne quelques indications sur la détermination des équations linéaires provenant d'une transformation de cette espèce; il renvoie pour le surplus aux Mémoires originaux où ces questions sont approfondies.

Les trois derniers Chapitres de l'Ouvrage sont consacrés à diverses généralisations. On peut poursuivre ces généralisations dans deux voies différentes, en augmentant soit le nombre des variables indépendantes, soit l'ordre de l'équation, ou les deux à la fois. Quand il n'y a que deux variables indépendantes, on peut étendre les méthodes de Monge et de Darboux aux équations d'ordre supérieur sans avoir besoin d'introduire aucune idée nouvelle, et sans d'autres difficultés que la complication croissante des calculs.

Ce fait est à peu près évident, quand on se sert systématiquement des caractéristiques, qui sont toujours des multiplicités à une dimension, quel que soit l'ordre de l'équation, lorsque le nombre des variables indépendantes est égal à deux.

M. Forsyth étudie aussi les équations du second ordre à plus de deux variables, qui admettent des intégrales intermédiaires, et montre comment on peut reconnaître l'existence de ces intégrales. Les méthodes employées dans le cas d'une équation à deux variables s'étendent encore à ce nouveau problème. L'auteur s'arrête assez longuement sur le cas où les équations du premier ordre qui déterminent les intégrales intermédiaires forment un système complet. La conclusion est analogue à celle qui a été établie antérieurement, et conduit à une classe d'équations, dont l'intégrale générale peut être écrite sous forme explicite. M. Forsyth signale aussi, à cette occasion, une classe d'équations du second ordre à n variables, qui doivent être considérées comme la généralisation directe des

équations de Monge-Ampère. Ces indications nous ont semblé un peu sommaires, et cette classe d'équations méritait une étude plus étendue. On y trouve en particulier une intéressante application de la théorie des groupes de fonctions de S. Lie.

Enfin, dans le dernier Chapitre de l'Ouvrage, M. Forsyth étend aux équations du second ordre à n variables les méthodes d'Ampère et de M. Darboux. Les résultats sont dus en grande partie aux recherches personnelles de l'auteur. Quoique bien des questions restent encore à élucider, ces recherches mettent en évidence l'existence d'un *invariant caractéristique*, qui paraît appelé à jouer un rôle important dans les progrès ultérieurs de cette difficile théorie.

On a pu se convaincre, par cette rapide énumération, de la richesse et de l'abondance des matériaux qui ont été utilisés par M. Forsyth. La plupart des questions sont traitées à fond; quant à celles qui ne sont qu'amorcées, des indications bibliographiques, le plus souvent très complètes, guideront le lecteur désireux de poursuivre leur étude. Chaque théorie est éclaircie par un grand nombre d'exemples gradués, les uns traités complètement, les autres proposés comme exercices. C'est là une pratique que l'on ne saurait trop vivement recommander. Bien des gens s'imaginent volontiers qu'il ne leur reste plus rien à apprendre sur une théorie, quand ils en ont compris les principaux théorèmes. L'étudiant qui prendra pour guide le Traité de M. Forsyth n'aura pas à craindre d'être victime d'une pareille illusion. E. G.

MINKOWSKI (H.). — Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. 1 volume in-8°, VIII-235 pages, 82 figures. Leipzig, Teubner, 1907.

Que le Livre de M. Minkowski soit une Introduction à la théorie des nombres, c'est ce qui apparaît bien évidemment par les importantes propositions d'Arithmétique et d'Algèbre qui s'y trouvent établies de la façon la plus simple; j'ajouterai qu'elle donne au lecteur l'impression qu'il est vraiment introduit dans cette théorie, par un chemin où il voit devant lui et aussi derrière, s'il se re-

tourne; il est en possession d'une *méthode*, et c'est cette méthode que M. Minkowski a voulu caractériser par le titre principal de son Livre : *Diophantische Approximationen*.

Le nom de Diophante est attaché à la résolution en nombres entiers ou rationnels de certaines équations; les équations que considère l'auteur, où les coefficients sont quelconques, ne peuvent pas être résolues en nombres entiers, mais elles peuvent être résolues approximativement au moyen de tels nombres, et l'expression d'*approximations diophantiques* est parfaitement justifiée.

C'est donc l'étude d'inégalités où les inconnues doivent essentiellement être entières, et les applications à la théorie des formes et des nombres algébriques, qui seront l'objet essentiel de M. Minkowski. Sauf dans le premier Chapitre qui est purement arithmétique, l'auteur de la *Geometrie der Zahlen* utilisera les méthodes qui lui sont propres et qui l'ont conduit à tant de belles et importantes propositions.

Le point de départ du premier Chapitre est la remarque évidente dont Lejeune-Dirichlet a su tirer un merveilleux parti : quand $n+1$ objets sont distribués n'importe comment dans n classes, il y a au moins une classe qui contient plus d'un objet. Après les applications classiques à l'approximation d'un nombre quelconque au moyen d'une fraction, de deux nombres quelconques au moyen de deux fractions de même dénominateur, l'auteur expose comment M. Hurwitz, en partant d'une idée due à M. Hilbert, est parvenu à établir le théorème d'après lequel il existe un système de trois nombres entiers non tous nuls qui font acquérir à un système de trois formes linéaires des valeurs qui, prises absolument, sont au plus égales à la racine cubique de la valeur absolue du déterminant des trois formes. La démonstration de M. Hurwitz, précisément parce qu'elle est très ingénieuse, fera d'autant mieux ressortir la fécondité des méthodes de M. Minkowski et la façon intuitive par laquelle elles conduisent à des propositions capitales, comme celle que je viens de rappeler, et en permettent la démonstration rigoureuse.

La méthode géométrique est développée dans les Chapitres II et III, pour le cas de deux variables ou du plan d'abord, pour le cas de trois variables ou de l'espace ensuite. Elle s'étend au cas

de n variables, grâce au langage de la géométrie à n dimensions, et M. Minkowski donne à l'occasion sur ce sujet des indications brèves et suffisantes; mais, avec le sens très juste de ce que doit être un Livre élémentaire, il a tenu à s'arrêter sur les deux cas où le langage géométrique n'est pas un simple verbalisme. Ce n'est que dans le sixième et dernier Chapitre, consacré à l'approximation des nombres complexes par des nombres appartenant au corps des racines cubiques ou quatrièmes de l'unité, qu'intervient vraiment la géométrie à quatre dimensions.

Je rappelle rapidement, en me servant du langage de la géométrie dans l'espace ordinaire, le principe de la méthode (*Princip der zentrierten Körper in Zahlengitter*).

Considérons un système de trois axes de coordonnées rectangulaires. Les points dont les trois coordonnées sont des entiers forment un réseau (*Zahlengitter*) à trois dimensions. Considérons un corps convexe (C) qui n'est d'ailleurs assujetti qu'à une seule condition, celle d'avoir un centre, et supposons que le centre soit à l'origine. Les corps homothétiques et concentriques à (C), quand le rapport d'homothétie est suffisamment petit, ne contiennent pas d'autre point du réseau que l'origine; si l'on fait grandir le rapport d'homothétie d'une façon continue, il arrivera un moment où la surface du corps atteindra un point du réseau (et par conséquent deux au moins) sans qu'aucun point du réseau soit à l'intérieur. Désignons par (C′) le corps convexe correspondant, et par (C″) le corps homothétique à (C′) dont les dimensions sont moitié moindres. Imaginons que tous les points du réseau soient les centres de corps qui se déduisent de (C″) par des translations. On se rend ainsi aisément compte de la distribution dans l'espace de tous ces corps égaux : deux de ces corps n'empiètent pas l'un sur l'autre, mais chaque corps s'appuie au moins sur deux corps voisins, qu'il peut toucher d'ailleurs suivant des points, des lignes ou des portions de plans; sauf dans des cas limites, où les corps (C″) sont nécessairement des polyèdres, par exemple des cubes dont l'arête est égale à 1, ils ne remplissent pas tous l'espace, ils laissent des vides entre eux : il résulte de là que leurs volumes sont au plus égaux à 1, cette limite n'étant atteinte que dans les cas limites dont il vient d'être question; le volume du corps (C′) est donc au plus égal à 2^3. Par conséquent, si le

corps (C) a un volume égal ou supérieur à 8, il contient certainement des points du réseau à son intérieur ou sur sa surface. Le cas où (C) est un parallélépipède fournit la démonstration du théorème relatif à trois formes linéaires que j'ai rappelé un peu plus haut. En variant le corps (C) d'une façon convenable, M. Minkowski obtient un très grand nombre de propositions importantes. Les cas limites, où l'espace se trouve décomposé en polyèdres égaux et de même orientation, offrent un intérêt particulier.

Les Chapitres IV et V sont consacrés à la théorie des nombres algébriques de degré 3. L'auteur reprend cette théorie à ses débuts et montre comment la notion de réseau de nombres (*Zahlengitter*) fournit une image commode de l'ensemble des entiers algébriques d'un corps algébrique du troisième degré, et comment s'appliquent alors les propositions du Chapitre précédent. Ses méthodes d'approximation le conduisent sans peine à la démonstration de l'existence des unités, à la démonstration du théorème sur le nombre fini de classes d'idéaux dans un corps algébrique, à la décomposition unique des idéaux en primidéaux.

M. Minkowski avait fait, dans l'hiver 1903-1904, un cours sur les matières traitées dans son Livre; il avait eu dès lors l'intention de la présente publication, qui, retardée par d'autres travaux, a pu être menée à bien grâce au concours qu'a apporté M. A. Axer, non seulement pour les matières développées dans le cours, mais encore pour le dernier Chapitre, rédigé d'après les indications manuscrites de M. Minkowski. Sous une forme plaisante et trop modeste, celui-ci exprime, dans sa Préface, l'espoir que son petit Livre contribuera à répandre le goût de la science des nombres. Je serais bien étonné si cet espoir était trompé. J. T.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H.-S. CARSLAW, Professor in the University of Sydney. — INTRODUCTION TO THE THEORY OF FOURIER'S SERIES AND INTEGRALS AND THE MATHEMATICAL THEORY OF THE CONDUCTION OF HEAT. 1 vol. in-8, 434 pages. Londres, Macmillan; 1906.

1. Ce Livre, très clair et très pratique, a pour origine un Cours professé par l'auteur sur les séries de Fourier et la Théorie mathématique de la propagation de la chaleur. Il contient tous les problèmes traités par Fourier dans sa *Théorie de la chaleur*, d'autres problèmes qui ont reçu, depuis, une solution mathématique, et, en avant, une Introduction qui donne avec la rigueur nécessaire, mais sans perdre de vue les applications, l'essentiel de la Théorie des séries et des intégrales infinies, et, en particulier, des séries et des intégrales de Fourier.

PREMIÈRE PARTIE : *La Théorie des séries et des intégrales de Fourier* (p. 1-190).

2. Une Introduction historique rappelle les travaux, sur les séries trigonométriques, de d'Alembert, d'Euler, Bernoulli, Lagrange, Fourier, Poisson, Cauchy, Dirichlet et, sur la représentation approchée d'une fonction arbitraire par une série trigonométrique, ceux de Weierstrass, de Picard et des Mémoires plus récents de Fejer, de Hurwitz et de Stekloff.

Pour les deux premiers Chapitres (nombres rationnels et irrationnels, suites infinies et séries infinies), l'auteur a suivi, quelquefois de très près, il le dit dans sa Préface, le remarquable exposé de l'*Introduction à la théorie des fonctions* de J. Tannery.

La notion de convergence uniforme est précédée d'explications déjà très nettement données par Osgood sur la question de *double limite* qui se présente quand on cherche la valeur d'une série infinie pour une valeur x_0 de x définie elle-même comme limite

d'une suite infinie. Une discussion géométrique montre comment une série peut être convergente dans un intervalle sans être uniformément convergente. Les conditions pour que l'intégration ou la différentiation d'une série puisse être effectuée terme à terme sont très nettement précisées.

La convergence des intégrales infinies est exposée en prenant pour guide l'analogie avec la convergence des séries. Un soin particulier est donné à la démonstration du second théorème de la moyenne dont il sera fait un très heureux usage, à la façon de Weber dans son édition des *Équations différentielles de la Physique* de Riemann.

Le changement de l'ordre des intégrations dans une intégrale double à limites infinies est discuté d'après les recherches de Vallée-Poussin.

3. C'est seulement après ces préliminaires d'Analyse que vient l'étude des séries de Fourier. Elle débute par cet énoncé qui précise les *conditions de Dirichlet :*

Si $f(x)$ est une fonction arbitraire à détermination unique dans l'intervalle $0 < x < b$, qui ne présente ni un nombre infini de discontinuités, ni un nombre infini de maxima et de minima dans cet intervalle et qui, si elle devient infinie, le devient seulement en un nombre fini de points, de façon que l'intégrale $\int f(x)\,dx$ converge en ces points, on a

$$\lim_{\mu=\infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \mu x}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0) \qquad (0 < a < b).$$

Les conditions énoncées sont suffisantes et les discussions prolongées sur ce sujet ont seulement eu pour objet de remplacer ces conditions par d'autres plus larges. Le développement en série de Fourier résulte de là.

On donne un assez grand nombre d'exemples avec des figures très instructives rapprochant de la courbe $y = f(x)$ la courbe qui représente la somme des n premiers termes de la série, pour quelques valeurs simples de n.

Tout de suite après ces premiers exemples vient une discussion approfondie sur la nature de la convergence des séries de Fourier

et, en particulier, l'énoncé des conditions permettant d'affirmer que cette convergence est uniforme dans un intervalle qui ne comprend pas de points de discontinuité.

L'intégration terme à terme des séries de Fourier se rattache aux conditions précédentes, mais la différentiation terme à terme de ces séries exige une nouvelle étude. On examine les relations qui existent, dans des cas bien définis, entre les coefficients d'une série de Fourier représentant une fonction arbitraire et ses coefficients différentiels, puis on indique comment Stokes, partant d'une série de sinus (ou de cosinus), arrive à des résultats sur la nature de la fonction qu'elle représente et sur ses points de discontinuité. Enfin, passant aux intégrales de Fourier, on précise les conditions sous lesquelles on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos\alpha(x'-x)\,dx' = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Deuxième Partie : *Théorie mathématique de la propagation de la chaleur dans les solides* (p. 191-410).

4. L'hypothèse fondamentale relative au flux de chaleur à travers un élément de surface est rattachée, non comme le fait Fourier à la transmission de molécule à molécule, mais directement à des expériences faites dans le cas du mur, la meilleure justification de l'hypothèse étant dans l'accord suffisant de l'ensemble de ses conséquences avec les phénomènes observés.

L'équation différentielle, les conditions initiales et les conditions aux limites, l'existence d'une solution unique, sont expliquées par les méthodes classiques. Le cas où la température à la surface varie est ramené, au moyen d'un théorème de Duhamel, au cas où la température à la surface est indépendante du temps.

Le problème de l'armille, dans lequel la température dépend seulement d'une coordonnée et du temps, est traité le premier comme l'un des plus simples et des plus suggestifs. Des méthodes de Neumann pour en déduire le coefficient de conductibilité et le pouvoir émissif d'un corps sont exposées et critiquées, mais sans longs détails, sur la partie expérimentale de ces méthodes.

5. Après ce problème servant d'introduction, on examine suc-

cessivement les cas de une, deux ou trois coordonnées en suivant, au moins pour les problèmes déjà anciennement traités, l'exposé de Riemann dans les *Équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique*. A propos du solide semi-infini et d'une barre semi-infinie, deux planches empruntées à un Ouvrage de A. Stanley Mackenzie donnent les courbes

$$\Theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-\beta^2}\, d\beta$$

et

$$\theta = \frac{1}{128\sqrt{\pi}} \frac{x}{(kt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

la première planche en regardant x comme variable et donnant à t trois valeurs particulières, la seconde planche en regardant $4kt$ comme la variable et en donnant à x trois valeurs particulières.

Les méthodes qui servent à déterminer le coefficient de conductibilité en partant soit de l'état stationnaire, soit de l'état variable d'une barre, en particulier celle de Forbes et celle d'Augstrom, les discussions à ce sujet de Tait, de Hagstrom, de Kirchhoff et Hansemann, sont indiquées avec renvoi aux Mémoires originaux. Neuf pages sont consacrées à l'application relative à l'étude de la chaleur terrestre d'après Fourier et Lord Kelvin, et aux rapports de ces questions avec certaines évaluations de l'âge de la Terre.

A propos d'un solide limité par deux plans parallèles et d'une barre finie, on expose des méthodes de Neumann, de Kohlrausch, de Stranco pour obtenir le coefficient de conductibilité et le pouvoir émissif d'un corps.

Dans le cas où l'équation différentielle dépend de deux coordonnées, on considère en particulier la question des températures stationnaires. L'emploi d'une représentation conforme ramène à des problèmes plus simples déjà traités le cas d'un secteur circulaire, de la région limitée par deux cercles ou par deux ellipses homofocales, d'un quadrilatère limité par des arcs de deux ellipses et hyperboles homofocales.

Enfin, dans le cas où l'équation différentielle dépend de trois coordonnées, on étudie le parallélépipède rectangle avec les coordonnées cartésiennes et les fonctions circulaires, le cylindre avec

les coordonnées semi-polaires et les fonctions de Bessel, la sphère avec les coordonnées polaires de l'espace, les fonctions sphériques et les fonctions de Bessel, et l'on retrouve pour la température les développements bien connus.

6. Les deux derniers Chapitres (p. 340-400) traitent, l'un de l'usage des *sources* et des *fuites* (sinks), l'autre de l'usage des fonctions de Green dans les solutions de l'équation de la chaleur.

Pour définir les sources et les fuites, dans le cas de la température stationnaire, en suivant l'analogie avec les électrodes par lesquelles le courant électrique arrive dans une plaque conductrice ou en sort, on imagine un flux stationnaire déterminé par la production d'une certaine quantité de chaleur en un point d'une plaque de métal et l'absorption de la même quantité en un autre point (ou, plus nettement, suivant des petits cercles ayant pour centres les points donnés). En une source, la température devient infinie comme $-\frac{m}{2k\pi}\operatorname{Log} r$ et en une fuite comme $\frac{m}{2k\pi}\operatorname{Log} r$, r étant la distance du point variable au point source ou au point fuite. Par exemple, pour une plaque limitée par $y = 0$ et s'étendant à l'infini du côté des y positifs, s'il y a une source au point $(0, y_0)$, on trouve que la fonction

$$v = \frac{m}{4k\pi}\operatorname{Log}\frac{x^2 + (y - y_0)^2}{x^2 + (y + y_0)^2}$$

satisfait à toutes les conditions du problème, et l'on voit qu'on est conduit à associer à la source donnée en $(0, y_0)$ la fuite au point $(0, -y_0)$.

Si la température n'est pas stationnaire et si le flux est linéaire, on suppose que la température initiale est zéro, excepté pour les points infiniment rapprochés du plan x', et l'on arrive à cette conclusion que, si l'apport continu de chaleur au plan x' a pour mesure $\varphi(t')$ au temps t', la température due au plan source x' est donnée, pour le plan x et au temps t, par l'expression

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t \frac{\varphi(t')}{\sqrt{t - t'}}\, e^{-\frac{(x - x')^2}{4k(t - t')}}\, dt'.$$

Puis on définit un *doublet*, une source d'intensité Q suivant le plan $x' + dx'$ et une fuite d'intensité $-Q$ au point x'.

On définit d'une façon analogue les sources, les fuites et les doublets dans le cas de deux ou de trois dimensions.

La méthode qui emploie les sources et les fuites est analogue à la méthode des images de la Théorie de l'Électricité. Elle s'applique particulièrement aux problèmes où le solide est limité par des plans et où ces plans sont maintenus à la température zéro.

Dans ces problèmes, on aperçoit de suite où l'on doit imaginer des sources et des fuites pour reproduire les conditions de l'énoncé, et alors la solution cherchée de l'équation aux dérivées partielles s'obtient très rapidement. Mais il n'en est pas toujours ainsi; par exemple, dans le cas d'une ligne source dans un solide quand le plan $\theta = 0$ est maintenu à la température zéro et dans des problèmes analogues, au point de vue mathématique, au problème de la diffraction des ondes électriques, Sommerfeld a été conduit à chercher la solution de l'équation différentielle sous la forme d'une intégrale de fonction complexe et à se servir, pour d'autres formes de la solution, de déformations convenables du chemin d'intégration.

Enfin, pour ce qui se rapporte à la fonction analogue à la fonction de Green, on prend, dans la Théorie de la Chaleur, la *fonction u qui donne la température en x, y, z au temps t due à un point source instantané d'intensité égale à* un, *produit à l'instant τ au point (x_0, y_0, z_0), le solide ayant zéro pour température initiale et la surface étant maintenue à la température zéro.*

On établit sans peine une formule qui donne la température au temps t en un point variable d'un solide pour une température initiale $f(x, y, z)$ et une température à la surface $\varphi(x, y, z, t)$, si l'on suppose connue la fonction u relative à ce solide et la dérivée de u suivant la normale intérieure à la surface. Des applications de cette formule sont faites notamment au refroidissement du cylindre et de la sphère.

De nombreux exercices, des indications bibliographiques très complètes, un index par ordre alphabétique achèvent de faire de ce Livre un instrument de travail qui sera certainement très apprécié.

E. Lacour.

ANNUAIRE POUR L'AN 1909, PUBLIÉ PAR LE BUREAU DES LONGITUDES, AVEC DES NOTICES SCIENTIFIQUES. 1 volume in-12, VI-710 pages, A.116 pages, B.57 pages, C.11 pages, D.47 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909. Prix, 1 fr. 50.

Grâce à l'activité déployée par le Bureau des Longitudes et par son habile imprimeur, M. Gauthier-Villars, l'Annuaire pour 1909 devance la date habituelle de sa publication. Pour donner une idée de ce qu'il contient, nous allons reproduire l'avertissement placé en tête du Volume.

Le Bureau des Longitudes, institué par la Convention nationale [loi du 7 messidor an III (25 juin 1795)], se compose de treize membres titulaires, savoir : trois membres de l'Académie des Sciences, cinq astronomes, trois membres appartenant au département de la Marine, un membre appartenant au département de la Guerre, un géographe; d'un artiste ayant rang de titulaire; de trois membres en service extraordinaire; d'un membre adjoint et de deux artistes adjoints. En outre, vingt correspondants sont institués près du Bureau des Longitudes, dont douze peuvent être choisis parmi les savants étrangers (décrets des 15 mars 1874, 30 avril 1889 et 14 mars 1890).

Son bureau, nommé chaque année par décret du Président de la République, se compose d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire choisis parmi ses membres titulaires.

Le Bureau des Longitudes rédige et publie, annuellement et trois années à l'avance, la *Connaissance des Temps,* à l'usage des astronomes et des navigateurs, et, depuis 1889, un *Extrait de la Connaissance des Temps* à l'usage des écoles d'hydrographie et des marins du commerce. Il rédige, en outre, des *Annales* ainsi qu'un *Annuaire* qui, aux termes de l'article IX de son règlement, doit être « propre à régler ceux de toute la République ».

Il est institué en vue du perfectionnement des diverses branches de la science astronomique et de leurs applications à la géographie, à la navigation et à la physique du globe, ce qui comprend : 1° les améliorations à introduire dans la construction des instruments astronomiques et dans les méthodes d'observations, soit à terre,

soit à la mer; 2° la rédaction des instructions concernant les études sur l'Astronomie physique, sur les marées et sur le magnétisme terrestre; 3° l'indication et la préparation des missions jugées par le Bureau utiles au progrès des connaissances actuelles sur la figure de la Terre, la Physique du globe ou l'Astronomie; 4° l'avancement des théories de la Mécanique céleste et de leurs applications; le perfectionnement des Tables du Soleil, de la Lune et des planètes; 5° la rédaction et la publication, dans ses *Annales*, des observations astronomiques importantes, communiquées au Bureau par les voyageurs, astronomes, géographes et marins.

Sur la demande du Gouvernement, le Bureau des Longitudes donne son avis : 1° sur les questions concernant l'organisation et le service des observatoires existants, ainsi que sur la fondation de nouveaux observatoires; 2° sur les missions scientifiques confiées aux navigateurs chargés d'expéditions lointaines.

L'*Annuaire*, dont la publication rentre dans les attributions du Bureau des Longitudes, parut, pour la première fois, en 1796; il se rapportait à l'an V (1796-1797). Le présent Volume est donc le 113e de la collection.

Depuis 1900, toutes les dates et heures sont exprimées en temps civil moyen compté de 0^h à 24^h à partir de minuit; la concordance avec l'ancienne division est indiquée sur une Table imprimée sur papier bleu en tête de l'*Annuaire*.

Cette année, on poursuit les nouvelles dispositions adoptées par le Bureau, en vue de donner plus de développement aux renseignements que nos Volumes peuvent fournir au lecteur. En conséquence, le présent *Annuaire* contient des Tableaux détaillés relatifs à la Métrologie, aux Monnaies, à la Géographie et à la Statistique, ainsi qu'à la Météorologie, et ne contient pas en revanche de données physiques et chimiques. Ce sera le contraire pour l'*Annuaire* de 1910 qui donnera, ainsi qu'on l'a fait en 1908, les Tableaux se rapportant à la Physique et à la Chimie, mais ne contiendra pas ceux relatifs à la Géographie et à la Statistique, etc., figurant dans le présent Volume. La même alternance sera observée les années suivantes.

Partie astronomique. — En vertu du même principe, on a inséré, dans le présent *Annuaire*, les Tables pour le calcul des

altitudes par le baromètre, un Tableau complet des éléments des étoiles variables dont la période est connue, les parallaxes stellaires, les étoiles doubles dont l'orbite a été calculée, les étoiles doubles spectroscopiques, les mouvements propres, et enfin la spectroscopie stellaire que M. de Gramont a bien voulu revoir entièrement. Mais on a supprimé les cadrans solaires, la physique solaire et le Tableau des petites planètes; toutes ces matières seront développées en 1910. Le Tableau des étoiles variables a été dressé par M. Schulhof. Nous devons remercier M. Beljawsky, qui a communiqué des éléments inédits de plusieurs variables.

Partie géographique et statistique. — MM. Levasseur et March ont mis à jour l'ensemble des Tableaux se rapportant à la géographie statistique, dont les données, puisées en grande partie aux sources officielles les plus récentes, offrent un résumé aussi exact que possible de la géographie statistique des divers pays. Dans la partie spécialement réservée à la France figurent deux nouveaux Tableaux : l'un donnant le mouvement de la population depuis 1800 et l'autre le mouvement de la population à Paris depuis 1750.

La partie relative aux monnaies a été complètement refondue par M. Rocques Desvallées. La nouvelle forme a permis, principalement dans le Tableau consacré aux monnaies étrangères, de réunir un plus grand nombre de renseignements.

Dans la Métrologie, on a fait figurer, en outre des Tableaux déjà publiés en 1907, des données relatives aux anciennes mesures usitées en France.

Les Tables d'intérêt et d'amortissement ont été remaniées; d'une part, les taux de $5\frac{1}{2}$ et de 6 pour 100 ont été supprimés et remplacés par ceux de $1\frac{1}{2}$ et 2 pour 100, et, d'autre part, toutes les Tables ont été étendues à un intervalle de 100 années. Par contre, deux Tables, d'un usage peu fréquent, ont été supprimées.

Comme d'habitude, l'*Annuaire* pour 1909 se termine par d'importantes Notices scientifiques. Dans la première, qui ne comprend pas moins de 116 pages, M. Bigourdan s'est proposé de nous donner l'idée la plus précise de la question des étoiles variables. Dans la seconde, un peu moins étendue, mais non moins intéressante, M. Charles Lallemand a étudié les mouvements et

déformations de la croûte terrestre, les marées de l'écorce, les exhaussements et les affaissements séculaires du sol, les altérations lentes du géoïde. J. G.

BOEHM (K.). — Elliptische Funktionen. *Erster Theil.* Theorie elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. 1 volume in-8°, xii-356 pages, 11 figures. Leipzig, Goschen, 1908.

Les *Fonctions elliptiques* de M. Boehm formeront le Tome XXX de l'importante collection que dirige M. H. Schubert (*Sammlung Schubert*); elles comprendront deux Parties.

La première, qui vient de paraître, contient douze Chapitres. Les deux derniers, qui forment à peu près le quart du Volume, sont consacrés aux propriétés particulières des fonctions de Weierstrass et de Jacobi : on y trouve les propriétés et les formules les plus essentielles relatives à ces fonctions; si l'auteur a pu, sans nuire en rien à la clarté, condenser ainsi toutes ces propriétés et toutes ces formules, c'est qu'elles étaient, en réalité, contenues dans les Chapitres précédents; il n'y avait plus, en quelque sorte, qu'à fixer les notations et à donner la forme convenable à des résultats antérieurement obtenus.

Les fonctions ϑ avaient été introduites dans le Chapitre X, consacré aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce et, en particulier, à l'étude des solutions, au moyen de fonctions entières ou méromorphes, de ces deux équations fonctionnelles qu'Hermite aimait à prendre pour point de départ, lorsqu'il exposait la théorie des fonctions elliptiques et dont il tirait un si merveilleux parti. Le point de départ de M. Boehm est dans ces expressions analytiques, sommes de fractions simples ou produits infinis, qui mettent si facilement en évidence les propriétés de périodicité, simple ou double, que leur construction et leur étude *a priori* semblent parfaitement justifier. L'auteur se plaît à proclamer, et l'on reconnaît, en effet, que son exposition des propriétés des fonctions circulaires et des fonctions doublement périodiques, ainsi créées, a son origine dans la deuxième Partie des *Leçons nouvelles* de M. Méray (*Étude monographique des prin-*

cipales fonctions d'une seule variable). L'hommage rendu à l'œuvre de cet excellent géomètre n'est pas pour déplaire, et il convient de dire que l'exposition de M. Boehm reste très personnelle : c'est dans cette exposition que s'introduisent naturellement les fonctions de Weierstrass. Il ne manque rien, dès lors, pour établir les propositions générales auxquelles sont consacrés les Chapitres VIII et IX : théorèmes de Liouville, somme des résidus, pôles et zéros, décomposition en éléments simples, représentations diverses d'une fonction elliptique, équations différentielles, etc. Enfin, les propriétés arithmétiques relatives aux congruences entre nombres complexes dont on a besoin ont été réunies dans le septième Chapitre.

Je me trouve avoir exposé l'ordre suivi par l'auteur, en prenant les choses à rebours, mais c'est avec l'intention de montrer que cet ordre était légitime et naturel : il est d'ailleurs bien clair que c'est l'ordre dans lequel les idées se suivent qui caractérise un Livre de cette nature, et je crois inutile d'insister sur l'ingéniosité de telles ou telles démonstrations. Il convient toutefois d'appeler l'attention sur un ensemble de Notes, destinées aux commençants que pourraient effrayer quelques abstractions, qui leur ouvrent une voie plus facile et leur permettent d'aller jusqu'au bout de l'Ouvrage en sautant certains paragraphes. J. T.

HELMERT (F.-B.). — Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinstein Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente. Zweite Auflage. 1 vol. in-8, XVIII-578 p.

La première édition de ce Livre remonte à 1872. Le but de l'auteur, qui enseignait alors au Polytechnicum d'Aix-la-Chapelle, était tout d'abord de fournir à ses élèves des applications de la méthode des moindres carrés; mais le but s'est immédiatement élargi et ne pouvait manquer de s'élargir encore dans une seconde édition. Le Livre du savant directeur de l'Institut géodésique de Prusse est à la fois théorique et pratique; c'est toutefois par ce caractère pratique que l'auteur a voulu lui donner primitivement qu'il est particulièrement original. Si les étudiants peuvent trou-

ver ailleurs les principes de la théorie, ils ne trouveront pas dans un autre Livre une exposition continuellement illustrée par des exemples qui, bien entendu, correspondent à des mesures réellement effectuées. Ces exemples, tirés de diverses Sciences, servent à la fois de modèles et de moyens pour se familiariser avec la méthode. J. T.

F. PICARD et G. SIMART. — Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Paris, Gauthier-Villars, t. I, 1897; t. II, 1900-1904-1906.

1. D'après quelques exemples classiques, on conçoit que le rôle d'un Traité est de réunir en système, par une vue organique des méthodes et par un développement d'applications diverses, les résultats d'une théorie qu'on suppose déjà bien établie, tout au moins dans ses grandes lignes. L'Ouvrage de MM. Picard et Simart ne saurait rentrer dans ce cadre; il ne faut pas y chercher un système fermé de connaissances bien ordonnées, puisque les théories qu'il vise étaient à peine ébauchées lorsque parut la première Partie de l'Ouvrage, et que les Parties successives de celui-ci nous montrent le développement des idées et les efforts, souvent pénibles, qui ont amené M. Picard à des résultats de la plus haute importance.

Nous pensons que les quelques inconvénients qui résultent peut-être de ces circonstances seront largement compensés aux yeux des philosophes. Pour ceux-ci, rien ne saurait remplacer le plaisir de suivre les idées en marche, et de reconnaître les raisons intimes du succès qui a finalement couronné une idée heureuse après de longs tâtonnements. Aussi, les difficultés qui, en d'autres cas, ont arrêté l'auteur, et qu'il aime à communiquer fréquemment au lecteur, ne présentent pas un moindre intérêt.

Tout contribue dans ce Livre à donner l'impression d'une œuvre vivante, qui ne compte pas seulement par les nouveaux résultats qu'elle apporte en grand nombre, mais plus encore par les suggestions qu'elle renferme et par les perspectives qu'elle ouvre sur l'avenir de la Science.

2. La théorie des fonctions algébriques occupe une place tout à fait distinguée parmi les branches différentes des Mathématiques; c'est elle qui a fourni les premiers exemples des fonctions qu'on peut étudier dans leur intégrité, et sur ces exemples s'est façonné pour ainsi dire le développement de l'Analyse moderne.

Néanmoins, les études classiques de Riemann, Weierstrass, Clebsch, Brill et Nœther se bornaient aux fonctions dépendant d'une seule variable, et c'est aussi dans le domaine d'une variable que la théorie générale des fonctions d'une variable complexe a atteint un haut degré de perfection.

En passant d'une variable à deux variables, il est aisé de poser des problèmes en quelque sorte analogues à ceux qu'on trouve résolus dans le premier domaine, il n'est pas toujours aisé de les résoudre; et il faut ajouter que plusieurs questions nous apparaissent susceptibles d'être généralisées dans plusieurs directions différentes, et qu'il semble difficile de choisir parmi celles-ci la bonne direction.

C'est M. Nœther qui, en abordant le premier l'étude des fonctions algébriques de deux variables, a découvert aux géomètres ce champ fécond de recherches; cependant, depuis les premiers résultats dus à l'illustre géomètre allemand, les difficultés soulevées apparaissent presque invincibles, de sorte que plusieurs années se sont écoulées avant que d'autres mathématiciens eussent le courage de reprendre ces recherches.

Elles ont été reprises, dans ces derniers vingt ans, suivant deux directions différentes, soit par l'étude des transcendantes attachées à un domaine algébrique, soit par celle des opérations proprement algébriques appartenant à ce domaine et de leurs invariants algébro-géométriques. La première direction est marquée surtout par les recherches de M. Picard, tandis que la seconde est celle de l'école italienne; on sait, d'ailleurs, que les deux points de vue qui se présentent ainsi dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables ont été reliés récemment par des résultats importants auxquels les géomètres des deux pays ont également contribué.

3. Étant donnée une équation algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

on peut en rattacher l'étude à plusieurs représentations algébriques :

1° D'abord on a un *continuum* à quatre dimensions, une variété riemannienne, V_4, dont les points correspondent univoquement aux groupes de valeurs complexes (x, y, z) satisfaisant à l'équation $f = 0$;

2° L'équation $f = 0$ se trouve représentée aussi par une surface (algébrique) qui doit être considérée, au sens de la Géométrie analytique ordinaire, comme lieu de points réels et de points imaginaires.

Il est commode de rappeler, suivant les cas, l'une ou l'autre représentation. La première fait ressortir tout de suite l'existence de certains invariants de $f = 0$ par rapport aux transformations birationnelles; ce sont les ordres de connexion de la variété V_4, que l'*Analysis situs* nous apprend à former.

D'après Betti, il y a à considérer deux ordres de connexion : la connexion linéaire, c'est-à-dire le nombre des cycles linéaires irréductibles, et la connexion à deux dimensions, c'est-à-dire le nombre des cycles irréductibles à deux dimensions.

Le nombre des cycles à trois dimensions se ramène à celui des cycles linéaires.

Ceci rappelé, on peut définir d'une façon synthétique la direction fondamentale des recherches de M. Picard, en disant qu'elles visent à traduire les propriétés de connexion de V_4 par des propriétés fonctionnelles du domaine (x, y, z).

Le point de vue analogue dans la théorie des fonctions d'une variable a été développé par Riemann, et il est utile de rappeler le résultat très simple auquel ces développements ont conduit; étant donnée une équation algébrique d'un certain ordre n

$$f(x, y) = 0,$$

on peut former un certain nombre p de polynomes d'ordre $n - 3$ adjoints à f; le nombre p est égal à celui des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes qui sont attachées à f; les périodes de ces intégrales sont au nombre de $2p$, et $2p$ est aussi l'ordre de connexion de la surface riemannienne correspondant à $f = 0$.

On peut généraliser ce résultat de plusieurs façons différentes.

D'abord, en généralisant la notion de l'intégrale abélienne, on peut former des intégrales doubles ou des intégrales simples attachées à une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

La découverte des intégrales doubles revient à Clebsch et à M. Nœther et a amené à l'introduction du genre géométrique p_g d'une surface (Flächengeschlecht); tandis que les essais pour définir ce nombre au moyen des singularités de $f = 0$ ont amené MM. Zeuthen et Nœther à découvrir un nouvel invariant de la surface, son genre numérique p_a, qui est en général $\leqq p_g$.

L'idée de considérer des intégrales simples de différentielles totales,

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

appartient en propre à M. Picard; c'est une idée heureuse dont la valeur ressortira par les explications suivantes.

Il y a trois espèces d'intégrales simples attachées à $f = 0$: les intégrales de première espèce sont finies partout dans le domaine (x, y, z); les intégrales de deuxième espèce ont seulement des singularités polaires; celles de troisième espèce présentent, en général, des singularités logarithmiques.

Or, les périodes des intégrales de deuxième espèce (et en particulier celles des intégrales de première espèce) correspondent aux cycles linéaires de V_4; leur nombre est donc égal à la connexion linéaire p_1 de la variété riemannienne. A l'égard du nombre des intégrales elles-mêmes, M. Picard établit le théorème fondamental suivant : *Le nombre des intégrales simples de deuxième espèce attachées à $f = 0$ est égal à celui de leurs périodes et, par suite, à la connexion linéaire de V_4.*

Que peut-on dire maintenant à l'égard des intégrales de première espèce?

La méthode suivie par M. Picard ne pourrait-elle nous renseigner aussi à l'égard de ce nombre?

Pour donner une réponse, il faut examiner de plus près la voie que M. Picard a suivie. Il s'agit donc d'étudier l'équation diffé-

rentielle linéaire de Fuchs qui est satisfaite par les périodes des intégrales abéliennes de première espèce attachées aux courbes

$$f(x, y, \bar{z}) = 0,$$

$\bar{z}$ jouant ici le rôle d'un paramètre. M. Picard a démontré d'abord que cette équation E est réductible aussitôt que le nombre $p_1 > 0$; en revenant sur ce sujet en 1904, il a ajouté le théorème suivant : *L'équation* E *est satisfaite par* p_1 *polynomes indépendants*. Il semble que ce beau théorème renferme la réponse à la question que nous posions tout à l'heure, en ce sens que :

Le nombre des intégrales simples de première espèce attachées à $f = 0$ *est la moitié de celui de leurs périodes, c'est-à-dire de la connexion linéaire* p_1.

Les développements de M. Picard nous approchent sensiblement de ce résultat, sans y parvenir d'une façon complète; mais il y a lieu de penser que les difficultés qu'on rencontre sur cette route et que l'auteur même a le soin de nous montrer, ne sont pas invincibles. En tous cas, le résultat se trouve établi indirectement par une autre méthode, en rapprochant les théorèmes suivants :

a. Le théorème établi par M. Severi (et que M. Picard déduit aussi par sa méthode), d'après lequel une surface possédant des intégrales simples de deuxième espèce a le genre numérique

$$p_a > p_g$$

(ce qu'on exprime en disant qu'elle est *irrégulière*) ;

b. Le théorème établi par M. Enriques, d'après lequel toute surface irrégulière ($p_a < p_g$) renferme $\infty^{p_a - p_g}$ systèmes linéaires de courbes d'un ordre donné, non équivalents.

De ce théorème, M. Enriques a déduit que toute surface irrégulière possède des intégrales simples de première espèce, mais le même théorème renferme aussi la déduction du nombre de ces intégrales, ainsi que l'ont fait remarquer MM. Castelnuovo et Severi. On trouve précisément

$$q \geqq p_g - p_a,$$

tandis que, d'après MM. Picard et Severi,

$$p_1 - q = p_g - p_a;$$

ainsi donc

$$p_1 = 2(q_g - p_a), \qquad q = p_g - p_a = \frac{1}{2}p.$$

4. Les problèmes qui se rapportent aux intégrales simples de troisième espèce et aux intégrales doubles de deuxième espèce ont donné lieu à des recherches d'un ordre tout à fait nouveau, dans lesquelles M. Picard a déployé un grand talent géométrique qui a été couronné par des succès mémorables.

Une intégrale simple de première espèce possède, en général, un certain nombre de courbes logarithmiques. La question se pose de savoir si, en se donnant d'une façon arbitraire un certain nombre de courbes tracées sur la surface $f = 0$, on pourra construire une intégrale de troisième espèce possédant des singularités logarithmiques le long de ces courbes et n'ayant pas, en dehors de celles-ci, d'autres singularités semblables. M. Picard établit le théorème suivant :

Pour toute surface $f = 0$, il existe un nombre (invariant) ρ tel que, en se donnant, sur $f = 0$, $h \geqq \rho$ courbes algébriques d'une façon arbitraire, on peut construire une intégrale de troisième espèce attachée à $f = 0$ qui possède ces mêmes courbes singulières (logarithmiques).

M. Severi a ajouté ensuite que l'invariant ρ exprime le nombre des courbes algébriquement indépendantes qu'on peut construire sur la surface.

Le même nombre ρ joue aussi un rôle dans la détermination des intégrales doubles de deuxième espèce. M. Picard recherche ce nombre en convenant d'avance qu'on devra regarder comme identiques deux intégrales qui diffèrent par une intégrale double de la forme

$$\int\int \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy}\right) dx\, dy,$$

où A et B sont des fonctions rationnelles.

D'après ces conventions *il y a un nombre fini d'intégrales doubles distinctes de deuxième espèce, linéairement indépen-*

dantes; ce nombre ρ_0, qui est en relation avec la connexion à deux dimensions de $f = 0$, s'exprime au moyen de ρ, du nombre p_1 des intégrales simples de deuxième espèce et d'un autre invariant algébro-géométrique connu (l'invariant de Zeuthen-Segré I); l'expression que M. Picard donne de ρ_0 se ramène ainsi à la suivante :

$$\rho_0 = 1 + 2p_1 - \rho + 2.$$

On ne saurait appuyer assez sur l'intérêt et sur la nouveauté de ces résultats. Ce qui appelle surtout l'attention, c'est le rôle qui se trouve joué dans cette théorie par le nombre ρ, lequel dépend des *propriétés arithmétiques* des coefficients de f.

Rien d'analogue ne s'était présenté dans l'étude des courbes algébriques.

5. Nous venons de rendre compte de quelques-uns parmi les plus beaux résultats obtenus par M. Picard. Néanmoins l'analyse que nous avons donnée de son Livre est conçue d'après un point de vue particulier. Et si celui-ci nous a semblé propre à mettre en évidence les côtés les plus originaux des recherches accomplies par l'auteur, il faut prévenir les lecteurs que beaucoup de développements importants n'ont pu trouver place dans ce compte rendu.

Pour qu'on ne se forme pas une idée trop insuffisante du Livre, ajoutons au moins les remarques suivantes :

1° M. Picard rend compte, par des procédés en partie originaux, de maintes questions concernant l'étude des surfaces sous le point de vue algébrique et géométrique (étude des genres, courbes canoniques, systèmes adjoints, etc.). Il ajoute même des résultats nouveaux et très intéressants. Citons, par exemple, le suivant :

M. Enriques avait établi la signification géométrique de l'irrégularité $p_g - p_a$ d'une surface d'ordre n, en montrant que ce nombre est égal à la somme des *défauts* des systèmes linéaires de courbes découpés sur un plan par les surfaces adjointes d'ordre $n-3$, $n-2$, ...; M. Picard fait voir qu'il suffit de s'arrêter aux adjointes d'ordre $n-3$, les adjointes d'ordre $> n-3$ coupant toujours sur un plan quelconque un système complet.

2° M. Picard développe l'étude de plusieurs classes remar-

quables de surfaces. Parmi celles-ci, il faut citer au moins les surfaces hyperelliptiques, et rappeler les théorèmes suivants :

Toute surface admettant un groupe continu permutable de transformations birationnelles en elle-même est hyperelliptique.

Les surfaces hyperelliptiques peuvent être définies par les conditions :

a. De posséder deux intégrales simples de première espèce;

b. D'avoir le genre $p_g = 1$ *et de ne renfermer aucune courbe canonique d'ordre et de genre* > 0.

BENCHARA BRANFORD. — A STUDY OF MATHEMATICAL EDUCATION INCLUDING THE TEACHING OF ARITHMETIC. 1 vol. in-8, XII-392 pages. Oxford, Clarendon press, 1908.

Que l'étude scientifique des Mathématiques doive être précédée par une période où l'expérience et l'intuition tiennent le rôle principal, où les concepts d'abord vagues se précisent peu à peu, où les vérités sont assez simples pour que l'enfant, convenablement guidé, les découvre de lui-même, où le raisonnement logique, qui plus tard régnera en maître, n'intervient que d'une façon brève et timide, c'est ce qu'on ne conteste guère maintenant. De jeunes maîtres, fort savants d'ailleurs, peuvent être très embarrassés pour donner l'enseignement qui correspond à cette période. Je ne crois nullement que leur science leur nuise pour cela. Dans tous les pays, on exige des maîtres la preuve de connaissances qui s'élèvent singulièrement au-dessus de ce qu'ils doivent enseigner, et la meilleure raison peut-être qu'on puisse donner de cette exigence, c'est que ces connaissances sont nécessaires au maître pour distinguer l'importance relative des matières qu'il a à enseigner. Mais ces connaissances scientifiques ne lui suffisent pas : il faut qu'il étudie les enfants, qu'il s'ingénie à les intéresser, à mesurer leurs forces, à proportionner ses questions à ce qu'ils peuvent trouver, à varier et à multiplier les exemples, à en choisir parfois qui lui donnent l'occasion de suggérer quelque

idée importante; on ne s'étonnera pas s'il est un peu effrayé devant sa tâche, quelle que soit la préparation pédagogique qu'il a reçue.

La lecture du Livre de M. Benchara Branford pourra lui être extrêmement utile : l'auteur n'apporte pas d'idées *a priori*, mais bien des faits, des souvenirs personnels, des leçons qu'il a faites ou entendues, au *Kindergarten*, à l'école, au collège, dans une maison de jeunes aveugles, etc. Et ces faits sont des faits typiques que l'auteur a médités avec un véritable esprit philosophique, mais aussi avec passion, parce qu'il aimait son métier et les enfants, qu'il voulait être compris et se réjouissait de l'être. Cela se sent en le lisant. M. Branford se plaît aussi à insister sur le parti qu'on peut tirer de l'histoire, non pas tant pour le détail des démonstrations que pour saisir la façon dont évolue la pensée de l'enfant, puisqu'il est entendu que cette évolution reproduit, en gros, l'évolution de la race. Ce *principe* a sans doute besoin d'être interprété; mais les applications qu'en fait l'auteur sont sages et intéressantes. Au reste, sa hardiesse naturelle est toujours tempérée par le bon sens qui, chez les esprits réfléchis, est le fruit de l'expérience.

On est parfois disposé à trouver qu'il est prolixe, ou qu'il se répète; mais c'est que cette prolixité et ces répétitions sont nécessaires lorsqu'on s'adresse à des enfants, auxquels il ne suffit pas de dire une chose une seule fois et sous une seule forme : cette nécessité devait se sentir dans le Livre qu'a voulu faire M. Branford. Ce Livre intéressera vivement les maîtres qui le liront; il leur fournira d'excellents exemples; il leur apprendra à observer, à réfléchir sur leurs observations et à en tirer parti. J. T.

HARDY (G.-H.). — A COURSE OF PURE MATHEMATICS. 1 vol. in-8, xv-428 pages. Cambridge, University press, 1908.

Le Livre de M. Hardy s'adresse en particulier à des étudiants en Mathématiques qui font leur première année à l'Université. On pourrait penser, d'après cela, qu'il doit correspondre à peu près à ces cours de *Mathématiques générales*, qui se font aujourd'hui

dans presque toutes nos Universités françaises. Sans doute, les sujets communs ne manquent pas; c'est l'esprit qui est différent. Nos cours de Mathématiques générales ont habituellement une tendance pratique; ils sont destinés à des gens auxquels il n'est pas défendu de s'intéresser aux Mathématiques, mais qui sont, le plus souvent, pressés d'apprendre et d'être capables d'appliquer ce qu'ils ont appris. M. Hardy s'adresse à des étudiants qui ont en vue les Mathématiques pour elles-mêmes; quand ils les sauront, ils pourront sans doute les appliquer aussi à des problèmes réels, mais ils n'ont point de hâte et peuvent se donner le temps de la réflexion. Qu'ils prennent aussi le temps de traiter cette multitude d'exercices qui remplissent le Livre de M. Hardy, qui sont vraiment bien choisis, intéressants et instructifs! L'auteur a d'ailleurs donné le plus souvent des indications pour la solution, très suffisantes pour mettre le lecteur en bonne voie.

M. Hardy n'oublie jamais qu'il écrit pour des commençants; s'il insiste avec de grands détails sur des notions fondamentales comme la notion de limite ou celle de continuité, c'est en homme qui a l'habitude de l'enseignement et des élèves, qui sait les difficultés qui arrêtent ces derniers, les pièges où ils tombent; il cherche à leur éviter les difficultés par de nombreux exemples bien gradués, de bonnes définitions bien claires, des notations bien précises; il ne recherche pas la subtilité pour elle-même. Loin de là, il écarte résolument tout ce qui lui semble trop difficile, par exemple l'interversion de l'ordre des différentiations. Si une idée, comme celle de l'uniformité de la convergence, lui semble trop générale, trop abstraite, il se borne à préparer l'introduction de cette idée par l'examen de cas particuliers.

Ce *Course of pure Mathematics* contient les propositions fondamentales sur les séries, les dérivées, le calcul des fonctions primitives et des intégrales définies. Dans les derniers Chapitres, on définit les fonctions $\log x$, e^x tant pour les variables réelles que pour les variables imaginaires; le point de départ de M. Hardy est la considération de l'intégrale

$$\int_1^x \frac{dt}{t},$$

qui permet d'établir les propriétés du logarithme pour x réel; la

fonction exponentielle est regardée comme la fonction inverse de la fonction logarithmique. Pour ce qui est des variables imaginaires, c'est encore la même intégrale qui est le point de départ; mais elle est alors considérée comme une intégrale curviligne : c'est par cet exemple même que la notion d'une telle intégrale est introduite; le calcul des valeurs qu'elle peut prendre, suivant les différents chemins d'intégration, conduit à l'expression du logarithme. J. T.

HILTON (H.). — AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF GROUPS OF FINITE ORDER. 1 vol. in-8, XII-236 pages. Oxford, Clarendon press, 1908.

Un Traité élémentaire sur cette théorie des groupes qui, en Mathématiques, intervient si souvent et dans des domaines si différents, n'est point facile à écrire. Il faut bien arriver à présenter les idées essentielles de cette théorie sous forme abstraite, indépendamment des faits particuliers où elles se réalisent; mais, lorsqu'on l'oblige à rester dans ces généralités abstraites, l'étudiant se fatigue d'une suite de propositions dont la déduction lui semble une sorte de jeu logique auquel il s'intéresse d'autant moins qu'il ne prévoit jamais rien; lors même que chaque déduction lui est apparue comme parfaitement claire, il est souvent obligé de s'arrêter parce qu'il a oublié tout ce qui précède : toutes ces abstractions se sont évaporées; il n'en reste rien dans son esprit. D'autre part, les applications sont si intéressantes, elles touchent à de si beaux sujets, qu'on est tenté de trop s'y arrêter et de traiter ces sujets pour eux-mêmes; les Volumes s'ajouteraient alors aux Volumes.

Il m'a paru, en feuilletant son Livre, que M. Hilton avait su triompher de ces difficultés. Pour ce qui concerne la dernière, tout d'abord, il a su se résigner à un gros sacrifice : il a laissé entièrement de côté cette théorie des équations algébriques pour laquelle a été faite la théorie des groupes d'ordre fini et dont les beaux développements auraient assurément exigé une grande place; il console son lecteur anglais de cette suppression en le renvoyant à la *Theory of algebraic equations* de M. Dickson et

aux *Algebraic equations* de M. Mathews. Des réalisations de la théorie abstraite sont assurément nécessaires pour montrer l'intérêt de cette théorie : M. Hilton a traité avec quelques détails des groupes de permutations, de substitutions linéaires, de mouvements; six Chapitres, sur les quinze de son Livre, sont consacrés à ces groupes spéciaux.

Sans doute, un lecteur qui ignorerait totalement l'Algèbre ne manquerait pas de se demander pourquoi on prend la peine d'étudier ainsi les permutations et à quoi riment des notions comme celles de la transitivité ou de la primitivité; mais un lecteur qui ne se douterait pas quelque peu de la nature des problèmes où ces notions permettent de pénétrer n'est guère vraisemblable; ceux qui se hâteront d'aller voir où elles conduisent, dans les Livres de M. Dickson ou de M. Mathews, seront probablement moins rares.

Quoi qu'il en soit, l'exposition de la théorie abstraite se développe dans les autres Chapitres et M. Hilton va jusqu'à dire à ses lecteurs qu'ils peuvent, dans une première lecture, se borner à ces Chapitres-là, en laissant de côté les applications; je me figure qu'ils ne profiteront pas de la permission et qu'ils éprouveront tout de suite le besoin de voir la théorie se réaliser dans quelques faits concrets; c'est plutôt à une seconde ou à une troisième lecture qu'ils s'attacheront à la pure théorie, dont ils auront commencé de sentir la beauté et la puissance.

Quant au danger d'*oublier ce qui précède*, que je signalais plus haut, M. Hilton s'est efforcé d'y parer en multipliant, à chaque page, les exemples et les exercices : je crois bien que les uns et les autres tiennent autant de place que le texte didactique. Le lecteur qui veut les traiter est obligé de se remémorer les définitions et les propositions auxquelles ils se rapportent, d'y réfléchir à plusieurs fois, de s'assurer qu'il les a comprises et qu'il les a faites siennes; grâce à l'effort que lui demande M. Hilton, il finira par fixer les unes et les autres dans son esprit; il sera fort ingrat s'il n'en garde pas quelque reconnaissance à l'auteur.

J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

HALE (G.-E.). — *The study of stellar evolution. An account of some modern methods of astrophysical research.* In-8°, 250 p. avec 104 pl. London, Weslay and Son. 16 sh. 6. d.

HEYWOOD (H.-B.). — *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm et quelques-unes de ses applications* (Thèse). In-4°, 113 p. Paris, Gauthier-Villars.

HUYGENS (CHRISTIAAN). — *Œuvres complètes,* publiées par la Société hollandaise des Sciences. T. XI. *Travaux mathématiques.* 1645-1651. Gr. in-4°, VI-369 p. avec 29 fig. La Haye, Nijhoff. 7 fl. 50 c.

KEPLER (JOHS.). — *Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten osterreichischen, u. Gebrauch der kubischen Visierrute.* Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Anchimades. Linz, 1615. Aus d. Latein übersetzt u. herausgeg. von *R. Klub.* In-8°, 130 p. avec 29 fig. Leipzig, W. Engelmann. Cart., 2 m. 60 pf.

NEWTON'S *Abhandlung über die Quadratur der Kurven* (1704). Aus d. Latein übersetzt u. herausgeg. von *G. Koudowski.* In-8°, 66 p. avec 8 figures. Leipzig, W. Engelmann. (*Ostwald's Klassiker,* n° 164.) Cart., 1 m. 50 pf.

PINCHERLE (S.). — *Lezioni di algebra complementare.* T. II : *Teoria delle equazioni.* In-8°. Bologna, Zanichelli. 10 l.

STUPAR (A.). — *Lehrbuch der astronomischen Navigation.* Gr. in-8°, XVI-275 p. avec fig., 2 pl. et 2 diagr. Wien, Gerold's Sohn. Relié, 6 m.

LILIENTHAL (R. v.). — *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* 1 Bd. *Kurventheorie.* VI-368 p. avec 26 fig. [*Teubner's* (*B.-G.*) *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwedungen.*] T. XXVIII. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié, 12 m.

TRINCHERO e GUIDETTI. — *Verifiche, correzioni ad uso degli strumenti di geometria pratica.* In-8°, 85 p. avec fig. Torino. 4 l.

VECCHIETTI (E.). — *L'infinito; saggio di psicologia della matematica.* In-16, 182 p. Roma. 4 l.

VOIGT (W.). — *Magneto- und Elektrooptik.* XIV-396 p. avec 75 fig. (*Mathematische Vorlesungen, an der Universität Göttingen.* III.) Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié, 14 m.

1re Partie.

MÉLANGES.

QUELQUES REMARQUES SUR LA CROISSANCE DE LA FONCTION $\zeta(s)$;

PAR M. ERNST LINDELÖF.

1. Nous commençons par rappeler quelques propriétés connues de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

dont nous aurons à nous servir dans la suite.

En posant

$$s = \sigma + it,$$

on conclut d'abord de l'expression donnée par Euler :

$$\zeta(s) = \prod\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right),$$

que les inégalités

$$\prod\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{p^\sigma}}\right) < \zeta(\sigma + it) \leqq \prod\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}}\right)$$

sont vérifiées pour $\sigma > 1$, d'où cette première propriété :

L'expression $|\zeta(\sigma + it)|$ *reste comprise entre des limites finies et positives dans le domaine* $\sigma \geqq 1 + \varepsilon$, *le nombre positif* ε *étant donné aussi petit qu'on voudra.*

En se servant de la relation fonctionnelle

$$\chi(s) = \chi(1 - s), \tag{1}$$

où

$$\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

on peut en conclure comment se comporte $|\zeta(s+it)|$ pour $\sigma < 0$.

En effet, la formule de Stirling fournit l'égalité asymptotique

$$|\Gamma(\sigma+it)| = e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\,[1+\varepsilon(\sigma,t)],$$

l'expression $\varepsilon(\sigma, t)$ tendant vers zéro lorsque $|t|$ augmente indéfiniment, et cela *uniformément* pour les valeurs σ comprises dans un intervalle fini quelconque. A l'aide de cette égalité on conclut de (1), en observant que

$$|\zeta(\sigma+it)| = |\zeta(\sigma-it)|,$$

$$(2)\qquad |\zeta(\sigma+it)| = \left|\frac{t}{2\pi}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma}|\zeta(1-\sigma+it)|\,[1+\varepsilon(\sigma,t)],$$

$\varepsilon(\sigma, t)$ jouissant de la même propriété que ci-dessus. Or nous venons de voir que, si

$$1-\sigma \geqq 1+\varepsilon,$$

d'où

$$\sigma \leqq -\varepsilon,$$

l'expression

$$|\zeta(1-\sigma+it)|$$

reste comprise entre deux limites finies et positives, quel que soit t, et nous arrivons donc au résultat suivant :

L'expression

$$(3)\qquad \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}\right|$$

reste comprise entre des limites finies et positives pour

$$-\sigma_0 \leqq \sigma \leqq -\varepsilon, \qquad |t| \geqq t_0 (>0),$$

les nombres positifs ε *et* σ_0 *étant donnés respectivement aussi petit et aussi grand qu'on voudra.*

Quant à l'*intervalle critique,*

$$0 \leqq \sigma \leqq 1,$$

il nous suffira provisoirement de savoir que $|\zeta(\sigma+it)|$ *croît moins vite qu'une puissance finie de* $|t|$ *pour les valeurs* σ *faisant partie de cet intervalle.* Ce résultat s'obtient le plus facilement par la formule sommatoire d'Euler, qui, sous sa forme la plus

simple, nous donne [1]

$$(4)\qquad \zeta(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau^{s+1}}\,d\tau,$$

ou encore, en intégrant par parties,

$$(5)\qquad \zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - \frac{s(s-1)}{1.2}\int_1^\infty \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau^{s+2}}\,d\tau,$$

$\varphi_1(\tau)$ et $\varphi_2(\tau)$ désignant les fonctions périodiques de période 1 qui, dans l'intervalle $0 < \tau < 1$, se réduisent respectivement aux polynomes $\tau - \frac{1}{2}$ et $\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}$. En effet, la formule (4) nous montre de suite que l'expression

$$\left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{t}\right|$$

reste au-dessous d'une limite finie pour $\sigma \geqq \varepsilon$, $|t| \geqq t_0 (> 0)$, et la formule (5), qu'il en est de même de l'expression

$$\left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{t^2}\right|$$

pour $\sigma \geqq -1 + \varepsilon$, $|t| \geqq t_0 (> 0)$, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

Pour les valeurs particulières $\sigma = 1$ et $\sigma = 0$, nous aurons toutefois besoin d'un résultat plus précis, dû à M. Mellin [2], suivant lequel *les expressions*

$$(6)\qquad \frac{\zeta(1 + it)}{\log t} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta(it)}{t^{\frac{1}{2}} \log t}$$

restent au-dessous d'une limite finie pour $|t| \geqq t_1 (> 1)$. Ce résultat se déduit le plus aisément de la formule (4), en l'écrivant sous la forme

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} - \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^\infty \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau^{s+1}}\,d\tau.$$

---

(1) *Voir* par exemple notre Ouvrage : *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, p. 80-83.

(2) *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXIX, n° 4, 1900, p. 48-49).

En effet, il en résulte immédiatement, pour $s = 1 + it$,

$$|\zeta(1+it)| < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{|t|} + \sqrt{1+t^2}\int_n^\infty \frac{|\varphi_1(\tau)|}{\tau^2}\,d\tau.$$

En observant qu'on a

$$|\varphi_1(\tau)| \leqq \frac{1}{2},$$

d'où

$$\int_n^\infty \frac{|\varphi_1(\tau)|}{\tau^2}\,d\tau < \frac{1}{2n},$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} < \int_1^n \frac{d\tau}{\tau} = \log n,$$

on en conclut l'inégalité plus simple

$$|\zeta(1+it)| < 1 + \log n + \frac{1}{|t|} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{2n}.$$

Pour $|n| = [t]$, cette inégalité nous montre que la première des expressions (6) reste au-dessous d'une limite finie pour $|t| \geqq t_1$, et, d'après l'égalité (2), il en est de même de la seconde de ces expressions.

2. Voici maintenant le lemme très simple sur lequel nous aurons à nous appuyer, et qui n'est d'ailleurs qu'un cas très particulier d'un théorème établi par M. Phragmén et par nous dans un Mémoire récent [1] :

Soit $f(s)$ une fonction monogène de la variable $s \equiv \sigma + it$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *Elle est régulière pour tout point à distance finie faisant partie du domaine*

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2, \qquad t \geqq t_0 (> 0). \tag{7}$$

2° *Sur le contour de ce domaine, on a*

$$|f(s)| \leqq C, \tag{8}$$

C étant une constante finie.

---

[1] E. Phragmén et Ernst Lindelöf, *Sur l'extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (*Acta mathematica*, t. XXXI, 1908).

3° *Il existe un nombre fini* μ *tel que l'expression*

$$\frac{|f(\sigma+it)|}{t^{\mu}}$$

reste dans le domaine (7) *au-dessous d'une limite finie.*

Dans ces conditions, on peut affirmer que l'inégalité (8) *subsiste pour tout point du domaine* (7).

Nous indiquerons brièvement la démonstration de ce lemme, en renvoyant pour plus de développements au Mémoire cité.

Considérons la fonction

$$F(s) = e^{i\varepsilon s} f(s) \qquad (\varepsilon > 0),$$

qui est évidemment régulière dans le domaine (7). Le module

$$|e^{i\varepsilon s}| = e^{-\varepsilon t}$$

étant inférieur à 1 pour $t > 0$, on aura, d'après la condition 2°,

$$|F(s)| < C$$

sur le contour de ce domaine. D'autre part, comme $e^{-\varepsilon t} t^{\mu}$ tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, quelque petit qu'on se donne le nombre ε, il résulte de la condition 3° que $F(\sigma+it)$ tend également vers zéro, et cela uniformément pour $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$.

Ayant pris arbitrairement un point $s' = \sigma' + it'$ à l'intérieur du domaine (7), on pourra donc choisir un nombre T, supérieur à t', tel qu'on ait

$$|F(s)| < C$$

pour

$$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2, \qquad t = T.$$

D'après ce qui précède, l'inégalité $|F(s)| < C$ sera alors vérifiée sur tout le contour du rectangle retranché du domaine (7) par la droite $t = T$, et il en résulte, en vertu d'un principe bien connu, que cette inégalité subsiste aussi à l'intérieur de ce rectangle et, en particulier, au point s', en sorte qu'on aura

$$|F(s')| < C,$$

ou bien

$$|f(s')| < C e^{\varepsilon t'}.$$

Ce résultat étant démontré quelque petit que soit ε, il faut bien qu'on ait

$$|f(s')| < C,$$

et notre lemme se trouve ainsi démontré.

3. Le lemme qui précède nous permet d'établir, relativement à la croissance de la fonction $\zeta(s)$ dans l'intervalle critique, le résultat suivant, qui comporte une plus grande précision que ceux qu'on avait obtenus jusqu'à présent [1].

L'expression

$$\frac{|\zeta(\sigma+it)|}{|t|^{\frac{1-\sigma}{2}}\log|t|}$$

reste au-dessous d'une limite finie dans le domaine

$$(9)\qquad 0 \leqq \sigma \leqq 1, \qquad |t| \geqq t_1 (>1).$$

Pour faciliter le langage, nous conviendrons de désigner indistinctement par h toute fonction réelle des variables σ et t qui, pour les valeurs σ faisant partie d'un intervalle donné, reste comprise entre des limites finies et *positives* à partir d'une certaine valeur de $|t|$. La lettre h ne désignera donc pas la même fonction dans les différentes formules où elle figure.

En adoptant cette notation, on peut écrire le résultat relatif à l'expression (3) établi plus haut, sous la forme

$$|\zeta(s)| = h|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} \qquad \text{pour} \qquad -\sigma_0 \leqq \sigma \leqq -\varepsilon.$$

En désignant par μ un nombre réel, il en résulte

$$|\zeta^{\mu}(s)| = h|t|^{\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}.$$

---

(1) Dans le Mémoire cité plus haut, M. Mellin avait démontré qu'on a

$$|\zeta(\sigma+it)| < M_\sigma |t|^{\frac{1}{2}} \qquad \text{pour} \qquad 0 < \sigma \leqq \frac{1}{2}, \quad |t| \geqq t_0 (>0),$$

$$|\zeta(\sigma+it)| < M_\sigma |t|^{1-\sigma} \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1, \quad |t| \geqq t_0 (>0),$$

M_σ ayant une valeur finie pour chaque valeur σ comprise dans l'intervalle en question.

D'autre part, dans une Note intitulée : *Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIII, 1905), M. Landau a remplacé les inégalités de M. Mellin par les suivantes qui sont plus précises :

$$|\zeta(\sigma+it)| < M_\sigma |t|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log|t|} \qquad \text{pour} \qquad 0 < \sigma \leqq \frac{1}{2}, \quad |t| \geqq t_1 (>1),$$

$$|\zeta(\sigma+it)| < M_\sigma |t|^{\frac{3}{4}-\sigma}\sqrt{\log|t|} \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1, \quad |t| \geqq t_1 (>1),$$

M_σ ayant la même signification que ci-dessus.

On a d'ailleurs, σ restant dans un intervalle fini quelconque,

$$|s^\nu| = h|t|^\nu,$$

ν étant un nombre réel, et, d'autre part,

$$|\log s| = h \log|t|.$$

Si l'on pose

$$F_1(s) = s^\nu \zeta^\mu(s) \log s,$$

on trouve donc

$$|F_1(s)| = h|t|^{\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)+\nu} \log|t|,$$

σ restant compris entre deux limites finies et négatives.

Prenons maintenant un intervalle de longueur 1 faisant partie de l'axe réel négatif, par exemple l'intervalle

$$-2 \leqq \sigma \leqq -1,$$

et déterminons les nombres μ et ν de telle sorte que l'exposant

$$\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)+\nu$$

de $|t|$ dans l'égalité ci-dessus se réduise à zéro pour $\sigma = -1$ et à $\frac{1}{2}$ pour $\sigma = -2$. On trouve

$$\mu = \frac{1}{2}, \qquad \nu = -\frac{3}{4},$$

et, par suite,

$$F_1(s) = s^{-\frac{3}{4}} \zeta^{\frac{1}{2}}(s) \log s,$$

$$|F_1(s)| = h|t|^{-\frac{1+\sigma}{2}} \log|t| \qquad (-2 \leqq \sigma \leqq -1).$$

Posons enfin [1]

$$F(s) = F_1(s-2) = (s-2)^{-\frac{3}{4}} \zeta^{\frac{1}{2}}(s-2) \log(s-2).$$

Cette fonction $F(s)$ est régulière et différente de zéro pour

$$0 \leqq \sigma \leqq 1, \qquad |t| > 0,$$

et vérifie pour

$$0 \leqq \sigma \leqq 1$$

---

[1] Au lieu de $F(s)$, on pourrait employer, par exemple, la fonction

$$\frac{s^{\frac{1-s}{2}} \log s}{\sin \frac{\pi s}{4}}.$$

l'égalité asymptotique

$$(10) \qquad |F(s)| = h|t|^{\frac{1-\sigma}{2}} \log|t|,$$

d'où il résulte, en particulier,

$$(11) \qquad |F(1+it)| = h\log|t|, \qquad |F(it)| = h|t|^{\frac{1}{2}}\log|t|.$$

Après ces préliminaires, nous allons étudier la fonction

$$f(s) = \frac{\zeta(s)}{F(s)}$$

dans le domaine $0 \leqq \sigma \leqq 1$. On voit d'abord qu'elle y est régulière dès que $|t| > 0$, puisque la fonction $F(s)$ est alors différente de zéro. D'autre part, il résulte des égalités (11) et de la proposition établie relativement aux expressions (6), que $|f(s)|$ reste au-dessous d'une limite finie pour $\sigma = 0$ et pour $\sigma = 1$, à partir d'une certaine valeur de $|t|$. Enfin on pourra trouver un nombre fini μ tel que l'expression

$$\left|\frac{f(s)}{t^{\mu}}\right|$$

reste au-dessous d'une limite finie pour

$$0 \leqq \sigma \leqq 1, \qquad |t| \geqq t_0 (> 0).$$

En effet, de l'égalité (10) et de ce que nous avons dit au n° 1 sur la croissance de $\zeta(s)$, il résulte que cette condition est certainement vérifiée si l'on prend $\mu > 2$.

Le lemme du n° 2 est donc applicable à la fonction $f(s)$ dans chacun des domaines

$$0 \leqq \sigma \leqq 1, \qquad t \geqq t_0 (> 0)$$

et

$$0 \leqq \sigma \leqq 1, \qquad t \leqq -t_0 (< 0),$$

et nous apprend que $|f(s)|$ y reste au-dessous d'une limite finie, en sorte qu'on aura

$$|\zeta(s)| < \text{const.}|F(s)|.$$

En remontant à l'égalité (10), on en conclut bien l'exactitude du théorème énoncé plus haut.

4. Par un raisonnement analogue à celui qu'on vient de lire, on peut établir encore quelques autres résultats généraux relatifs à la

croissance de $\zeta(s)$, que nous nous permettrons de signaler ici sans démonstration [1].

A toute valeur donnée σ correspond un nombre déterminé $\mu(\sigma)$ tel que, $|t|$ tendant vers l'infini, le rapport

$$\frac{|\zeta(\sigma+it)|}{|t|^{\mu(\sigma)+\varepsilon}}$$

reste au-dessous d'une limite finie ou non, suivant que ε est plus grand ou plus petit que zéro.

Considérons la courbe dont l'équation est

$$t = \mu(\sigma). \tag{12}$$

On démontre facilement qu'elle jouit de la propriété suivante :

Si $\mu(\sigma_1) \leqq t_1$ et $\mu(\sigma_2) \leqq t_2$, l'ordonnée de la courbe (12) n'est en aucun point de l'intervalle (σ_1, σ_2) supérieure à celle de la droite qui joint les points (σ_1, t_1) et (σ_2, t_2).

En tenant compte des résultats rappelés au n° 1, on en conclut la proposition qui suit :

La courbe (12) est continue pour toute valeur de σ et n'est en aucun point convexe vers le haut. Son ordonnée vérifie la relation

$$\mu(\sigma) = \mu(1-\sigma) + \frac{1}{2} - \sigma.$$

Pour $\sigma \geqq 1$, cette courbe se réduit à l'axe réel et, pour $\sigma \leqq 0$, elle se confond avec la droite

$$t = \frac{1}{2} - \sigma.$$

Dans l'intervalle $0 < \sigma < 1$, elle fait partie du triangle formé par les points

$$\left(\sigma = 0,\ t = \frac{1}{2}\right), \qquad \left(\sigma = \frac{1}{2},\ t = 0\right) \qquad (\sigma = 1,\ t = 0).$$

5. En tant qu'il s'agit d'une limite inférieure de la croissance de $\zeta(s)$ pour les valeurs σ comprises dans l'intervalle critique, la proposition ci-dessus nous permet d'énoncer le résultat suivant :

---

[1] Une question analogue se trouve traitée en détail dans la dernière partie du Mémoire que nous avons publié avec M. Phragmén.

Si $\varepsilon > 0$, *l'expression*

$$t^{\varepsilon}\zeta(\sigma + it),$$

lorsque $|t|$ *augmente indéfiniment, ne tend vers zéro pour aucune valeur* σ *comprise dans l'intervalle*

$$\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1,$$

et l'expression

$$t^{\varepsilon}\frac{\zeta(\sigma + it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}$$

ne tend vers zéro pour aucune valeur σ *de l'intervalle*

$$0 \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}.$$

Mais on peut aller plus loin, en démontrant que *ce résultat subsiste encore pour* $\varepsilon = 0$. D'une manière plus précise, si l'on pose

$$\zeta(\sigma + it) = \xi(\sigma, t) + i\,\eta(\sigma, t),$$

on peut à l'égard des fonctions ξ et η établir la proposition que voici :

Lorsque $|t|$ *augmente indéfiniment,* σ *ayant une valeur donnée quelconque, les expressions*

$$\xi(\sigma, t) - 1 \quad \text{et} \quad \eta(\sigma, t) \tag{13}$$

changent de signe une infinité de fois et, pour chacune d'elles, les limites inférieures et supérieures pour $t = \pm\infty$ *sont différentes de zéro.*

6. Pour démontrer cette proposition, nous aurons à nous servir de *la formule de Poisson* [1].

Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique qui est régulière dans le cercle

$$x^2 + y^2 < R^2,$$

et désignons par r, φ les coordonnées polaires du point (x, y) par rapport à l'origine, par x_0, y_0 les coordonnées d'un point pris à l'intérieur du cercle, et par r_0, φ_0 les valeurs de r, φ en ce point.

---

[1] On aurait pu se servir aussi de cette formule pour établir le lemme du n° 2.

Si l'on admet d'abord que la fonction $u(x, y)$ soit continue pour

$$x^2 + y^2 \leqq R^2,$$

la formule de Poisson nous donne

$$(14) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \bar{u}(R, \varphi)\, d\varphi,$$

en posant

$$u(x, y) = \bar{u}(r, \varphi).$$

Supposons maintenant qu'il existe sur la circonférence du cercle envisagé un certain point, soit le point

$$x = R, \qquad y = 0,$$

où la fonction $u(x, y)$ cesse d'être continue, tout en restant continue pour les autres points de ce cercle et de sa circonférence, et admettons en outre qu'on peut trouver un nombre réel μ *inférieur à l'unité,* tel que l'expression

$$(15) \qquad \rho^{\mu} |u(x, y)|,$$

où ρ désigne la distance du point (x, y) au point $x = R$, $y = 0$, reste au-dessous d'une limite finie pour

$$x^2 + y^2 \leqq R^2.$$

Dans ces conditions, la formule (14) *reste encore valable.* En effet, on a évidemment pour $r_0 < R' < R$

$$(14') \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2 - r_0^2}{R'^2 - 2R'r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \bar{u}(R', \varphi)\, d\varphi.$$

Or il résulte de la condition admise relativement à l'expression (15), d'une part, que l'intégrale figurant dans la formule (14) garde dans l'hypothèse actuelle une valeur finie, et, d'autre part, que la différence entre cette intégrale et celle qui figure dans la formule (14') tend vers zéro lorsque R' tend vers R. Cette dernière formule restant vraie, quelque petite que soit la différence $R - R'$, on en conclut bien l'égalité (14).

Les conditions restant les mêmes que ci-dessus, admettons que

$$u(x, y) > C$$

sur un certain arc de la circonférence

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

comprenant intérieurement le point

$$x = R, \qquad y = 0.$$

D'après les propriétés bien connues de l'intégrale de Poisson [1], on peut en conclure que, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra, l'inégalité

$$u(x, y) > C - \varepsilon$$

est vérifiée pour tout point (x, y) du domaine

$$x^2 + y^2 \leqq R^2$$

dont la distance ρ du point

$$x = R, \qquad y = 0$$

est inférieure à une certaine limite positive. On en déduit le lemme suivant, dont nous aurons à nous servir :

En désignant par r, φ les coordonnées polaires du point (x, y) par rapport à un point fixe, admettons que la fonction harmonique $u(x, y)$ soit finie et continue pour tout point (x, y) à distance finie faisant partie du domaine

$$\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \frac{\pi}{\alpha}, \qquad r \geqq r_0, \tag{16}$$

et régulière à l'intérieur de ce domaine, et qu'il existe un nombre ν inférieur à α, tel que le produit

$$r^{-\nu} | u(x, y) |$$

reste au-dessous d'une limite finie dans ce même domaine.

Cela étant, si, sur chacun des rayons $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{\alpha}$, la limite supérieure de $u(x, y)$ pour $r = \infty$ est égale à ou plus petite que zéro, ou respectivement la limite inférieure de $u(x, y)$ pour $r = \infty$ égale à ou plus grande que zéro, on aura dans le

---

[1] *Voir* H.-A. Schwarz, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II, p. 175-210 et 360-361.

domaine (16), *à partir d'une certaine valeur de* r,

$$u(x, y) < \varepsilon,$$

respectivement

$$u(x, y) > -\varepsilon,$$

le nombre positif ε *étant donné aussi petit qu'on voudra.*

Pour la démonstration de ce lemme, il suffit d'effectuer un changement de variable réalisant la représentation conforme du domaine (16) sur l'aire d'un cercle. En effet, ce changement transformera $u(x, y)$ en une fonction harmonique qui est finie et continue dans le cercle en question et sur sa circonférence, excepté peut-être le seul point qui correspond au point à l'infini du domaine (16); mais en ce point l'ordre d'infinitude de la fonction transformée est au plus égal à $\frac{\nu}{\alpha}$ et, par suite, inférieur à l'unité. L'exactitude de notre lemme résulte dès lors immédiatement de la remarque faite ci-dessus.

7. Après ces préliminaires, revenons à la proposition énoncée à la fin du n° 5.

σ_0 étant une valeur réelle quelconque, posons

$$s - \sigma_0 = re^{i\varphi}$$

et étudions la fonction $\zeta(s)$ dans l'angle d'étendue $\frac{\pi}{\alpha}$ défini par les inégalités

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

en supposant α supérieur à chacun des nombres 2 et $\mu(\sigma_0)$, $\mu(\sigma)$ désignant la fonction dont il était question au n° 4.

La fonction $\zeta(s)$ est régulière pour tout point à distance finie faisant partie de cet angle (excepté son sommet dans le cas où $\sigma_0 = 1$), et, si l'on choisit le nombre ν de telle sorte que

$$\mu(\sigma_0) < \nu < \alpha,$$

il résulte du n° 4 que le produit

$$r^{-\nu}|\zeta(s)|$$

et, par suite, aussi les produits

$$r^{-\nu}|\xi(\sigma, t) - 1| \quad \text{et} \quad r^{-\nu}|\eta(\sigma, t)|$$

restent au-dessous d'une limite finie dans le domaine (17), à partir d'une certaine valeur de r.

Or $\zeta(s)$ tend vers 1 sur le rayon

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)$$

lorsque r augmente indéfiniment et, par suite, les expressions (13) tendront dans les mêmes conditions vers zéro, Si sur l'autre côté de l'angle (17), c'est-à-dire sur la droite $\sigma = \sigma_0$, la limite supérieure pour $t = \infty$ de l'une des expressions (13) était égale à ou plus petite que zéro, cette expression devrait donc, d'après le lemme démontré au n° 6, rester inférieure à ε dans l'angle (17), à partir d'une certaine valeur de r, et si, sur la même droite, la limite inférieure pour $t = \infty$ de l'une des expressions dont il s'agit était égale à ou plus grande que zéro, cette expression serait dans les mêmes conditions supérieure à $-\varepsilon$, et cela quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε.

Or, ces conclusions ne sont ni l'une ni l'autre conformes à la réalité et, pour s'en assurer, il suffit d'examiner comment se comportent les expressions (13) par exemple sur la droite $\sigma = 4$ (en admettant qu'on ait $\sigma_0 < 4$). En effet, on a, sur cette droite,

$$\left|\frac{1}{2^s}\right| = \frac{1}{16},$$

et, d'autre part,

$$\left|\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\right| < \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots < \int_2^\infty \frac{d\tau}{\tau^4} = \frac{1}{24};$$

on en conclut que chacune des expressions (13) prend, sur la droite en question, au delà d'un quelconque de ses points, aussi bien des valeurs supérieures à $\frac{1}{16} - \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$ que des valeurs inférieures à $-\frac{1}{48}$.

Donc, pour chacune des expressions (13), la limite supérieure pour $t = \infty$ est positive et la limite inférieure pour $t = \infty$ négative, et de même pour $t = -\infty$, d'où résulte notre proposition.

8. Le lemme du n° 6 conduit encore à certains résultats relatifs à la croissance du module $|\zeta(s)|$ que nous signalerons en terminant.

L'expression $\log|\zeta(s)|$ définit évidemment une fonction harmonique régulière pour $\sigma \geqq 1$, en exceptant le seul point $s = 1$. Cette fonction tend vers zéro lorsque le point s s'éloigne indéfiniment suivant une droite quelconque qui forme avec l'axe réel positif un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$; d'autre part, on peut démontrer (¹) qu'elle reste, pour

$$\sigma \geqq 1, \qquad |t| \geqq t_0 (> 0),$$

numériquement inférieure à une certaine puissance finie de t. Le lemme cité permet d'en conclure, par un raisonnement identique à celui du n° 7, que la limite inférieure pour $|t| = \infty$ de l'expression $\log|\zeta(s)|$ est négative sur l'une quelconque des droites $\sigma = \sigma_0$, où $\sigma_0 \geqq 1$. En d'autres termes, *le module* $|\zeta(s)|$ *prendra sur chacune de ces droites, à une distance aussi grande qu'on voudra de l'axe réel, des valeurs inférieures à une certaine quantité finie plus petite que l'unité.*

En admettant que $\zeta(s) \neq 0$ pour

$$\sigma > \mathfrak{I}, \qquad \frac{1}{2} \leqq \mathfrak{I} < 1,$$

on peut démontrer (²) que la fonction $\log|\zeta(s)|$ reste, pour

$$\sigma \geqq \mathfrak{I} + \varepsilon, \qquad |t| \geqq t_0 (> 0), \qquad \varepsilon > 0,$$

numériquement inférieure à une certaine puissance finie de $|t|$; d'où il résulte que, dans cette hypothèse, la conclusion ci-dessus sera vraie dès que $\sigma_0 > \mathfrak{I}$.

D'ailleurs, le module $|\zeta(s)|$ ne resterait-il pas inférieur à une limite finie pour

$$\sigma \geqq \frac{1}{2} + \varepsilon, \qquad |t| > t_0 (> 0),$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε?

S'il en est ainsi, on aura des résultats relativement simples concernant la croissance de $\zeta(s)$. Ainsi, la fonction $\mu(\sigma)$ définie

---

(¹) *Voir*, par exemple, le paragraphe 11 du Mémoire de M. Landau, *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXVI, 1908), où se trouvent d'ailleurs établis des résultats bien plus précis que celui dont nous avons besoin ici.

(²) *Cf.* le paragraphe 13 du Mémoire cité dans la Note précédente.

au n° 4 se réduira à zéro pour $\sigma > \frac{1}{2}$ et à $\frac{1}{2} - \sigma$ pour $\sigma < \frac{1}{2}$, et, de plus, si l'on admet avec Riemann que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma > \frac{1}{2}$, on peut démontrer que, pour $\sigma > \frac{1}{2}$, l'expression $|\zeta(\sigma + it)|$ et, pour $\sigma < \frac{1}{2}$, l'expression $\left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{t^{\frac{1}{2} - \sigma}}\right|$ restent comprises entre des limites finies et positives à partir d'une certaine valeur de $|t|$.

Si la supposition émise ci-dessus n'est pas vraie, on arrive au contraire à des conclusions assez curieuses. Il existe alors un nombre bien déterminé σ', faisant partie de l'intervalle

$$\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1,$$

tel que, si $\varepsilon > 0$, le module $|\zeta(\sigma + it)|$ reste inférieur à une limite finie pour

$$\sigma \geqq \sigma' + \varepsilon, \qquad |t| \geqq t_0 (> 0),$$

tandis que ceci n'a pas lieu pour $\varepsilon < 0$, et l'on peut en conclure [1] que l'équation

$$\zeta(s) = C,$$

pour toute valeur finie de C, excepté peut-être *une seule* valeur, admet une infinité de racines dont les parties réelles tendent vers σ' en même temps que leurs modules augmentent indéfiniment.

---

[1] *Voir* notre travail : *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXV, n° 7, 1908). On trouve des tirages à part de ce Mémoire à la librairie A. Hermann.

FIN DU TOME XXXII DE LA PREMIÈRE PARTIE.

35-7

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXII; 1908. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

AMES (L.). — Arithmetic treatment of some problems in Analysis situs. 42-46
AMODEO (F.). — Lezioni di Geometria projettiva 39-41
BAIRE (R.). — Leçons sur les théories générales de l'Analyse, t. II.... 258-263
BENCHARA BRANFORD. — A study of mathematical education including the teaching of Arithmetic..... 335-336
BÔCHER (M.). — Introduction to higher Algebra..... 36-39
BŒHM (K.). — Elliptische Funktionen, t. I..... 326-327
BOPP (K.). — Die Kegelschnitte des Gregorius a S. Vincentio in vergleichender Bearbeitung..... 10-12
BROSZAT (W.). — Ueber Schaaren von ∞^4 Flächen in R_3 die durch Berührungstransformation in Schaaren von ∞^4 Curven überführbar sind..... 82-83
BRUNS (H.). — Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre. 129-136
BUCHHOLZ (H.). — Das mechanische Potential und die Theorie der Figur der Erde..... 85-87
BUREAU DES LONGITUDES. — Annuaire pour l'an 1909..... 323-326
CARONNET. — Ellipsographe Caronnet construit par MM. Coppin frères. 33-35
CARSLAW (H.). — Introduction to the theory of Fourier's series and integrale and the mathematical theory of the conduction of heat.... 316-322
CASTELNUOVO (G.). — Lezioni di Geometria analitica e projettiva, t. II. 41-42
CHARBONNIER (P.) — Balistique intérieure..... 69-73
CLAPARÈDE (E.). — *Voir* Fehr.
COPPIN frères. — *Voir* Caronnet.

Pages

DANTSCHER (V. VON). — Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der irrationalen Zahlen 101-105
DURÈGE. — Theorie der elliptische Funktionen (neu bearbeitet von *L. Maurer*) 166-167
FABRY (E.). — Traité de Mathématiques générales à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des Facultés des Sciences. 253-258
FEHR (H.), FLOURNOY (T.), CLAPARÈDE (E.). — Enquête de l'*Enseignement mathématique* sur la méthode de travail des mathématiciens 225-229
FLOURNOY (T.). — *Voir* Fehr.
FORSYTH (A.). — Theory of differential equations. T. II, III, IV..... 281-313
FOUËT (E.-A.). — Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions algébriques 5-6
GERLAND (E.). — Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts 136-137
HARDY (G.). — A course of pure Mathematics..... 336-338
HELMERT (F.). — Die Aufgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente..... 327-328
HERMITE (C.). — Œuvres. T. II 161-162
HESSE (O.). — Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene 9-10
HILTON (H.). — An introduction to the theory of groups of finite order 338-339
KNOPP (K.). — Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenze Grenze..... 7-9
LECORNU (L.). — Dynamique appliquée..... 66-69
LEIBNIZ. — *Voir* Gerland.
LOVE (A.). — A treatise on the mathematical theory of elasticity..... 74-82
MATHEWS (G.). — Algebraic equations..... 73-74
MAURER (L.). — *Voir* Durège.
MINKOWSKI (H.). — Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie..... 313-316
MONTESSUS (R. DE). — Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités 197-198
OSGOOD (W.). — A first course in the differential and integral Calculus. 35-36
PICARD (E.) et SIMART (G.). — Théorie des fonctions algébriques de deux variables imaginaires..... 328-335
REYE (T.). — Die Geometrie der Lage. Zweite Abteilung..... 83
RŒLCKE (O.). — Ueber die Bäklundsche Transformation der Flächen konstanter Krümmung..... 84-85
ROUSE BALL (W.). — Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes 65-66
RUDIO (F.). — Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates..... 97-101
SARRETTE (H.). — Précis arithmétique des calculs d'emprunts à long terme et des valeurs mobilières..... 137-138
SCHLESINGER (L.). — Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. 193-196
SCHREIBNER (W.) — Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie 138-139

Pages.

SERRET (J.-A.). — Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. T. II..... 84
SIMART (G.). — *Voir* Picard.
SIMPLICIUS. — *Voir* Rudio.
SYLVESTER (J.). — Collected mathematical Papers. T. II..... 163-165
TEIXEIRA (G.). — Obras sobre matematica..... 166-166
WEBER (H.), WELSTEIN (J.) und WEBER (R.). — Encyklopädie der elementar Mathematik. T. III..... 12-13
WEBER (R.). — *Voir* Weber (H.).
WEESE CAIRNS (W. DE). — Die Anwendung der Integralrechnung auf die zweite Variation bei isoperimetrischen Problemen..... 139-140
WELSTEIN (J.). — *Voir* Weber.
WUNSCHMANN (K.). — Ueber Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen..... 6
Bulletin bibliographique. 32, 63-64, 96, 126, 159-160, 191-192, 278-280, 340

MÉLANGES.

ANDOYER (H.). — Sur une classe de fractions continues..... 207-221
BOUNITZKY (E.). — Sur une classe d'équations intégrales..... 14-31
BUHL (A.). — Sur la représentation des fonctions méromorphes par des séries de polynomes tayloriens..... 198-207
CLAIRIN (J.). — Sur un point de la théorie des groupes de transformations finis et continus..... 221-224
DARBOUX (G.). — Les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale..... 106-128
DIRICHLET. — Correspondance..... 47-62, 88-95
DULAC (M.). — Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre..... 230-252
LIOUVILLE. — Correspondance..... 47-62, 88-95
LINDELÖF (E.). — Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$..... 341-356
PICARD (E.). — La Mathématique dans ses rapports avec la Physique. 141-159
POINCARÉ (H.). — L'avenir des Mathématiques..... 168-190
RAFFY (L.). — Contribution à la géométrie des élements isotropes.... 264-278
RAFFY (L.). — Extrait d'une lettre..... 191
TANNERY (J.). — Correspondance entre Liouville et Lejeune-Dirichlet. 47-62, 88-95

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIERE PARTIE DU TOME XXXII.

b

43040. — PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOUËL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXII. — ANNÉE 1908.

(XLIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON [1].

Tome CLXXXVI (A), Part I; 1895.

Boys (*C.-V.*). — Sur la constante newtonienne de la gravitation. (1-72).

Description et discussion de plusieurs séries d'expériences, d'où l'auteur tire $G = 6,6576.10^{-8}$; la dernière décimale doit toutefois être regardée comme n'ayant pas de valeur.

Reynolds (*O.*). — Sur la théorie dynamique des fluides visqueux incompressibles et la détermination du criterium. (123-164).

Les expériences de l'auteur, relatées dans la troisième Partie du Tome CLXXXIII des *Transactions*, mettent en évidence l'existence d'une certaine limite de la vitesse moyenne de l'eau dans un tuyau, au-dessous de laquelle le mouvement se fait parallèlement au tuyau, au-dessus de laquelle le mouvement est sinueux. Cette limite dépend d'un coefficient numérique (criterium). L'objet du présent

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XX_2, p. 142.

Mémoire est l'étude théorique de la même question, fondée sur les équations du mouvement.

Pearson (*K.*). — Contributions mathématiques à la théorie de l'évolution. — II. Variation oblique dans une matière homogène. (343-414).

La dissymétrie dans une courbe de fréquence peut résulter de ce que les mesures ont été effectuées sur des matériaux hétérogènes. On a alors à rechercher les courbes de fréquences simples relatives aux matériaux homogènes, d'où résulte, par composition, la courbe dissymétrique. M. Pearson a traité de ce cas dans un Mémoire communiqué en 1893 à la Société royale. Mais la dissymétrie, pour des matériaux homogènes, peut résulter aussi d'une tendance à la déviation du type moyen plus grande d'un côté que de l'autre. C'est de ce cas qu'il s'occupe dans le présent Mémoire, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique. L'importance de ces recherches, pour les sciences naturelles en particulier, devient de plus en plus manifeste.

Les recherches statistiques de M. Pearson, qui portent sur des objets très divers, sont illustrées par plusieurs planches.

Hough (*S.-S.*). — Les oscillations d'une couche ellipsoïdale, contenant un fluide, animée d'un mouvement de rotation. (469-506).

Le défaut de concordance entre les observations de la variation de la latitude et les explications théoriques fondées sur la rigidité de la Terre a conduit M. Folie à regarder celle-ci comme formée d'une couche solide se mouvant d'une façon plus ou moins libre autour d'un noyau fluide, au moins à sa surface (*Acta mathematica*, t. XVI).

L'hypothèse de M. Folie paraît peu satisfaisante à M. Hough, qui l'étudie analytiquement dans un cas particulier : la couche solide est supposée ellipsoïdale ; le noyau est supposé fluide et homogène ; les axes principaux de la couche et de la cavité occupée par le fluide coïncident ; les oscillations s'effectuent autour d'un mouvement régulier dans lequel l'axe de rotation coïncide avec l'un des axes principaux. Les méthodes développées par M. Poincaré dans son Mémoire sur la stabilité d'une masse fluide ellipsoïdale, à surface libre (*Acta mathematica*, t. VII), permettent alors d'aborder le problème. L'auteur utilise aussi une méthode plus élémentaire due à M. Greenhill (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. IV, p. 4).

Les résultats, appliqués à la Terre, montrent que l'hypothèse tend à raccourcir la période de variation, au lieu de l'allonger, comme il faudrait. M. Hough incline à croire qu'il en serait ainsi, en général, dans l'hypothèse proposée par M. Folie, et que la véritable explication, fondée sur l'élasticité de la Terre, a été donnée par M. Newcomb dans les *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* pour 1892.

Dixon (*A.-C.*). — Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées et la théorie des congruences. (523-565).

L'auteur étudie les solutions singulières d'un système de n équations différentielles ordinaires du premier ordre à n fonctions inconnues; il montre comment ces solutions singulières peuvent être formées, soit en partant de l'intégrale complète, soit en partant des équations différentielles, et comment elles se classent en n formes, chacune se déduisant de la précédente par le procédé qui fournit les enveloppes et contenant une constante arbitraire de moins que la précédente. La théorie est interprétée géométriquement et appliquée spécialement aux congruences de droites; les deux équations qui définissent une congruence de droites peuvent, en effet, être regardées comme fournissant l'intégrale complète de deux équations de Clairaut simultanées. La théorie de la surface focale intervient naturellement. Un cas particulier intéressant est celui où la congruence est formée par les tangentes aux lignes asymptotiques. Un dernier exemple se rapporte à ces équations de Clairaut généralisées que M. Raffy a considérées de son côté et dont M. Bounitzky a repris récemment l'étude [1], au point de vue des solutions singulières.

Tome CLXXXVI (A), Part II; 1895.

Pocklington (*H.-C.*). — Le système complet des périodes d'un anneau vorticellaire creux. (603-619).

D'après la théorie vorticellaire de la matière, l'atome consisterait en un anneau vorticellaire dans l'éther considéré comme un liquide parfait. Cet anneau peut être creux ou rempli d'un liquide animé d'un mouvement de rotation. Dans le cas le plus simple, la section transverse est petite et l'anneau est circulaire. L'auteur étudie la stabilité d'un anneau vorticellaire creux, afin d'établir cette stabilité pour les petites déformations de la surface. Dans la théorie cinétique des gaz, l'énergie d'un atome varie comme le carré de sa vitesse; dans la théorie vorticellaire, l'énergie décroît quand la vitesse croît. Toutefois, on n'a pas tenu compte des modifications qui résulteraient de l'électrisation de l'atome. M. Pocklington discute ces modifications dans le cas d'un vortex creux, la surface étant regardée comme conduisant l'électricité; c'est là une conception qui se rencontre dans le Mémoire de M. Larmor intitulé *A dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium* (*Phil. Trans.*, 1894, A, p. 719). Les petites oscillations sont étudiées de manière à pouvoir discuter la stabilité d'un vortex électrisé.

Larmor (*J.*). — Une théorie dynamique du milieu électrique et luminifère. (Part II, 695-744).

Routh (*E.-J.*). — Théorèmes sur l'attraction des ellipsoïdes pour certaines lois de force autres que celle de l'inverse du carré. (897-950).

L'auteur détermine le potentiel d'une couche ellipsoïdale homogène sur un point intérieur ou extérieur, en supposant que l'attraction soit inversement

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXXI, p. 250.

proportionnelle à la $k^{\text{ième}}$ puissance de la distance, k étant un entier pair. Lorsque k est plus grand que 3, l'expression du potentiel s'intègre complètement. En conservant les mêmes lois de force, il examine le cas où la couche n'est pas homogène et où la densité est de la forme $x^\alpha y^\beta z^\gamma$. Il étudie ensuite le cas d'un ellipsoïde plein en général et, plus particulièrement, pour certaines valeurs simples de k. Il traite encore les cas où k est un nombre négatif impair, où k est égal à 3, où k est un nombre impair plus grand que 3, etc.

Tome CLXXXVII (A); 1896.

Burbury (*S.-H.*). — Sur l'application de l'énergie cinétique aux gaz denses. (1-14).

Le mouvement d'un grand nombre de sphères élastiques n'a guère été étudié que dans le cas où le volume total de ces sphères est négligeable par rapport à l'espace qui les contient. L'auteur étudie les modifications qu'il y a lieu d'apporter à la théorie cinétique lorsqu'on ne fait pas cette hypothèse.

Hearson (*T.-A.*). — Cinématique des machines. (15-40).

Décomposition du mouvement d'une machine en mouvements élémentaires d'un organe par rapport à un autre organe; classification des mécanismes d'après la nature de ces mouvements élémentaires et de leurs combinaisons.

Mallock (*A.*). — Expériences sur la viscosité des fluides. (41-56).

Pearson (*K.*). — Contributions mathématiques à la théorie de l'évolution. Régression, hérédité et panmixia. (253-318).

Ce troisième Mémoire sur la théorie mathématique de l'évolution se rapporte essentiellement à la variation d'organes déterminés, susceptibles de mesures dans les êtres vivants. Les termes employés sont définis avec la précision qu'exige le langage mathématique. Une bonne partie de cet important Mémoire est employée à développer les idées de M. Francis Galton (*Natural inheritance*) et à en poursuivre les conséquences.

Hough (*S.-S.*). — La rotation d'un sphéroïde élastique. (319-344).

Lorsqu'un corps solide, dont les moments d'inertie sont A, B, C, tourne autour de son axe de symétrie, et qu'il y a une légère perturbation, le corps solide oscille autour d'une position moyenne; l'axe de rotation éprouve, relativement au corps, un déplacement périodique dont la période est à la période de rotation dans le rapport de C à C — A. Comment cette période est-elle modifiée quand le corps, au lieu d'être rigide, est susceptible de déformations élastiques ? Tel est le problème que traite M. Hough.

Les recherches de M. Chandler, publiées dans une suite de Mémoires qui ont paru dans l'*Astronomical Journal*, montrent que l'axe de la Terre est soumis à divers déplacements, dont le plus important consiste dans un mouvement périodique, dont le caractère est bien celui de l'oscillation dont on vient de parler, si ce n'est que la période est beaucoup plus longue que celle qu'indiquerait la théorie si la Terre était parfaitement rigide. L'auteur, dans un précédent Mémoire, a discuté, pour la rejeter, une hypothèse émise par M. Folie. M. Newcomb, par une méthode géométrique très élégante, a montré que l'élasticité de parties solides de la Terre, d'une part, et la mobilité de l'Océan, de l'autre, ont pour effet d'augmenter la période.

Dans le présent Mémoire, M. Hough, laissant de côté le rôle de l'Océan, considère le cas d'un sphéroïde homogène de révolution, composé d'une matière isotropique, incompressible et pesante. En outre, pour simplifier, il suppose que la forme de la figure est celle qu'exigerait l'équilibre hydrostatique.

Après avoir établi les équations rigoureuses qui déterminent les oscillations d'un tel système, l'auteur suppose que l'ellipticité est très faible, ainsi que la vitesse angulaire de rotation. Cette supposition simplifie beaucoup les équations différentielles qui expriment les déplacements élastiques et les ramène aux équations bien connues pour l'équilibre d'un corps élastique. Les conditions à la limite sont de la même forme que celles qu'on obtient dans le problème de la déformation d'une sphère élastique. On se trouve ainsi en mesure d'achever la solution du problème posé, que M. Hough applique au mouvement de la Terre : il compare ses résultats à ceux de M. Newcomb.

Hobson (*E.-W.*). — Sur un type d'harmoniques sphériques dont le degré, l'ordre et l'argument ne sont soumis à aucune restriction. (443-531).

Les fonctions sphériques $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$, définies comme des solutions particulières de l'équation différentielle

$$(1-\mu^2)\frac{d^2V}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dV}{d\mu} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]V = 0,$$

ont été considérées d'abord pour des valeurs entières et positives de n et de m; on a été amené, en vue de problèmes spéciaux, à diverses extensions, qui ont donné lieu à des théories plus ou moins fragmentaires. M. Hobson reprend la question dans toute sa généralité en définissant les deux fonctions $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ au moyen d'intégrales prises le long d'un contour. Les fonctions sont uniformes dans tout le plan des μ, après qu'on a pratiqué une coupure le long de l'axe des abscisses allant de $\mu = 1$ à $\mu = -\infty$: les définitions sont faites de manière que, dans le cas où n, m sont des entiers, on retombe sur les fonctions classiques. L'auteur montre comment les cas particuliers étudiés jusqu'ici peuvent se déduire de sa théorie générale.

Mac-Mahon (*P.-A.*). — Mémoire sur la théorie de la partition des nombres (619-673).

Un nombre m-réparti est une sorte de nombre complexe formé de m nombres entiers (*figures*) dont chacun désigne des objets d'espèces différentes. Si ce

nombre m-réparti est divisé en parties, chacune de ces parties doit être regardée comme un nombre m-réparti.

Suivant qu'on tient compte, ou non, de l'ordre dans lequel sont écrites les parties, de gauche à droite, on a affaire à une composition ou à une partition du nombre m-réparti. La théorie de la composition peut se faire aisément au moyen d'une représentation graphique; la partition ne se prête pas à une telle représentation. Mais il y a divers liens entre les compositions et les partitions, qui apparaissent, non quand on veut considérer de pareilles opérations relatives au même nombre m, mais quand on considère l'ensemble de ces opérations. C'est l'un de ces liens dont le major Mac-Mahon s'occupe en particulier dans le présent Mémoire; il est essentiellement fondé sur l'étude de la séparation d'une partition en groupes (*separates*) dont l'ensemble reproduit la partition considérée : il est clair qu'une telle *séparation* peut s'effectuer de diverses façons; l'auteur montre tout le parti qu'on peut tirer, dans la théorie qui l'occupe, de cette notion simple, qui intervient, d'ailleurs, dans diverses théories algébriques.

Tome CLXXXVIII (A); 1896.

Rücker (*A.-W.*) et *Thorpe* (*E.-T.*). — Vue générale du magnétisme des Iles Britanniques pour l'époque du 1er janvier 1891. (1-661).

Tome CLXXXIX (A); 1897.

Hough (*S.-S.*). — Sur l'application de l'analyse harmonique à la théorie dynamique des marées. — Première Partie : Sur les oscillations de première espèce de Laplace et sur la dynamique des courants marins. (201-251).

M. Hough reprend *ab initio* le problème des marées, en partant, comme Laplace, des équations qui déterminent les oscillations d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. On doit lui en savoir d'autant plus de gré que l'analyse de Laplace est obscure et qu'il y avait lieu de discuter en détail l'ordre de grandeur des termes négligés. Les équations auxquelles il parvient sont, d'ailleurs, d'accord avec celles de Laplace.

Il s'occupe ensuite de l'intégration de ces équations. Les types d'oscillations qu'il considère dans le présent Mémoire sont les *oscillations de première espèce* de Laplace. Ce dernier a regardé comme inutile une discussion un peu approfondie de ces solutions, parce que la théorie dynamique d'où on les tire ne tient pas compte du frottement. Les marées en question sont à longue période, la plus courte ayant une durée d'un demi-mois lunaire. M. Darwin a montré que, à cause de la longueur des périodes, l'influence du frottement doit être très faible, et les calculs numériques par lesquels M. Hough s'est efforcé d'évaluer l'influence du frottement confirment les vues de M. Darwin.

La méthode d'intégration employée par M. Hough diffère de celle de M. Darwin en ce que ce dernier emploie des séries de puissances, tandis que M. Hough se sert de séries procédant suivant des fonctions harmoniques zonales. De cette façon, son analyse embrasse les effets de l'attraction de l'eau, et il obtient des séries assez convergentes pour permettre, dans certains cas, d'heureuses applications numériques.

L'équation des périodes est discutée analytiquement par une méthode fondée sur un Mémoire de Lord Kelvin (*Phil. Mag.*, 1876, p. 127); des applications numériques, qui représentent un travail considérable, sont ensuite développées.

La considération des marées à longues périodes conduit aux oscillations à période infinie et, par suite, aux courants marins. Assurément, les causes de ces courants sont très multiples; il n'en est pas moins légitime de les étudier, au point de vue dynamique, en simplifiant assez les hypothèses pour pouvoir aborder cette étude. La loi des mouvements permanents possibles est particulièrement simple, en supposant que l'influence de la viscosité est très faible, que la densité est constante, enfin, que la hauteur de la mer dépend seulement de la latitude. L'influence de la rotation est ici très remarquable, car les mouvements permanents possibles sont d'un caractère très arbitraire quand il s'agit d'un globe, sans mouvement de rotation, recouvert d'eau.

Tome CXC (A); 1897.

Larmor (*J.*). — Une théorie dynamique du milieu électrique et luminifère. Troisième Partie : Relations avec les milieux matériels. (205-300).

Pearson (*K.*) et *Lee* (*Alice*). — Sur la distribution de la fréquence (variation et corrélation) de la hauteur barométrique à diverses stations. (423-469).

Tome CXCI (A); 1898.

Forsyth (*A.-R.*) — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes lorsqu'il n'existe pas en général d'intégrale intermédiaire. (1-86).

L'auteur s'est occupé dans un Mémoire antérieur (*Camb Phil. Trans.*, t. XVI, 1898) des équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes qui admettent une intégrale intermédiaire. Dans le présent Travail, il donne une méthode qui s'applique lorsqu'il n'y a point d'intégrale intermédiaire, et qui généralise la méthode de M. Darboux pour le cas de deux variables indépendantes. Il montre, en effet, qu'une équation aux dérivées

partielles du second ordre à trois variables indépendantes peut être ramenée à un système d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.

La méthode même montre que les équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes, sans intégrale intermédiaire, peuvent être rangées en deux classes distinctes.

Désignons par x, y, z, v les variables indépendantes et la fonction inconnue, et posons

$$\frac{\partial v}{\partial x} = l, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = m, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = n,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = b, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = c,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = f, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} = g, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = h.$$

Soit

$$F(v, x, y, z, l, m, n, a, b, c, f, g, h) = 0$$

l'équation proposée. M. Forsyth donne le nom d'*invariant caractéristique* à l'équation du second degré en p, q :

$$p^2 \frac{\partial F}{\partial a} + pq \frac{\partial F}{\partial h} + q^2 \frac{\partial F}{\partial b} - p \frac{\partial F}{\partial g} - q \frac{\partial F}{\partial f} + \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

Suivant que cette équation est irréductible, ou peut être décomposée en deux équations linéaires en p, q, l'équation aux dérivées partielles $F = 0$ appartiendra à une classe ou à l'autre.

Lorsque l'invariant caractéristique se décompose, M. Forsyth donne une méthode qui permet d'effectuer l'intégration dans les cas où l'intégrale peut être exprimée sous forme finie sans quadratures partielles : il applique cette méthode à divers exemples.

Il traite ensuite du cas où l'invariant caractéristique est indécomposable ; sa méthode est appliquée, d'une façon très détaillée, à des équations qui intéressent la Physique mathématique.

Enfin, il convient de dire que cette méthode, exposée pour le cas de trois variables indépendantes, se généralise facilement.

Hough (*S.-S.*). — Sur l'application de l'analyse harmonique à la théorie dynamique des marées. Deuxième Partie : Sur l'intégration générale des équations dynamiques de Laplace. (139-185).

Dans un précédent Mémoire sur le même sujet, l'auteur a traité de l'intégration de l'équation dynamique de Laplace pour les marées, en se limitant aux solutions symétriques par rapport à l'axe de rotation. Il s'occupe maintenant des solutions générales. Il montre que, si l'on développe la hauteur des marées en séries procédant suivant des fonctions harmoniques tessérales, on peut, sans imposer aucune restriction à la période des forces perturbatrices, parvenir à une relation linéaire de récurrence entre trois coefficients seulement, pourvu que la loi de l'épaisseur de l'Océan soit telle que les surfaces qui le limitent, à l'intérieur et à l'extérieur, soient des sphéroïdes de révolution autour de l'axe polaire. C'est à ce cas simple qu'il se borne, parce qu'il prête à des applications qui peuvent être poussées jusqu'au calcul numérique.

Ces applications concernent les oscillations libres et les oscillations forcées. Pour les premières, M. Hough discute le cas où l'épaisseur est uniforme. Il forme l'équation aux périodes et donne une méthode pour déterminer approximativement les plus hautes racines. Application est faite à plusieurs exemples numériques. M. Hough montre que, outre ces oscillations libres dont l'existence peut être inférée par analogie avec le problème relatif à un océan qui couvrirait un globe immobile, il existe une seconde classe d'oscillations libres.

M. Hough donne ensuite une solution analytique générale du problème des vibrations forcées dues à une force perturbatrice quelconque. Dans quelques cas, les expressions analytiques comportent des simplifications considérables; l'auteur retrouve ainsi et généralise des théorèmes dus à Laplace et à M. Darwin.

Enfin, il donne des exemples numériques de l'évaluation des constituants des marées semi-diurnales et diurnales; en particulier, dans le cas où la période de la force perturbatrice est rigoureusement égale à la moitié d'un jour sidéral ou à un jour sidéral, cas où le calcul est considérablement simplifié.

Pearson (*K.*) et *Filon* (*L.*). — Contribution mathématique à la théorie de l'évolution. IV : Sur les erreurs probables des constantes de fréquence et l'influence d'une sélection qui s'effectue au hasard sur la variation et la corrélation. (229-311).

Tome CXCII (A); 1899.

Whitaker (*E.-T.*). — Sur la connexion des fonctions algébriques avec les fonctions automorphes.

M. Poincaré a montré que, si $f(u, z) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique, les deux variables u, z peuvent être exprimées en fonction uniforme d'une variable t. L'objet principal du Mémoire de M. Whitaker est de montrer comment on peut y parvenir par des fonctions automorphes d'une espèce particulière de groupes, de période deux, ou de sous-groupes de pareils groupes.

L'auteur étudie d'abord les propriétés des substitutions qu'il désigne sous le nom de *self-inverses*, à savoir de substitutions

$$\left(t, \frac{at+b}{ct+d}\right), \qquad ad - bc = 1$$

où l'on a $a + d = 0$, en sorte que chaque substitution est sa propre inverse. Il expose une méthode pour effectuer la division du plan en polygones qui correspondent au groupe engendré par un système donné de substitutions self-inverses. Le genre du groupe est zéro, bien que ce groupe admette des sous-groupes dont le genre est plus grand que zéro. Il introduit ensuite les fonctions automorphes d'un tel groupe. Le genre du groupe étant zéro, ces fonctions automorphes sont toutes des fonctions algébriques rationnelles de l'une d'entre elles, z.

M. Whitaker étudie la représentation conforme des polygones du plan des t sur le plan des z. Il montre que les fonctions ainsi obtenues résolvent le pro-

blème suivant de la représentation conforme : Soit P un point dans le plan de la variable z, on mène de ce point P des lignes (non nécessairement droites) jusqu'aux points A, B, C, ... Ce système de rayons étant regardé comme limitant le plan des z, il s'agit de représenter d'une manière conforme le plan des z, ainsi limité, sur le plan des t, de façon que chacune des lignes PA, PB, PC, ... fournisse deux lignes distinctes, l'une de ces deux lignes se déduisant de l'autre par une substitution projective $\left(t, \frac{at+b}{ct+d}\right)$. C'est à ce problème de représentation conforme que se ramène le problème posé d'exprimer en fonction uniforme t deux variables liées algébriquement.

L'auteur étudie la relation analytique entre les variables z et t. Il montre qu'elles sont liées par une équation différentielle qui est un cas particulier de celles que M. Klein a qualifiées d'équations de Lamé généralisées et dont M. Bôcher a montré la connexion avec les équations différentielles de l'analyse harmonique.

Les fonctions ainsi obtenues sont appliquées à certaines formes algébriques particulières.

L'équation différentielle dans le cas hyperelliptique rentre dans un type considéré par M. Klein. M. Whitaker donne la condition pour que $2p$ substitutions arbitrairement données puissent engendrer le groupe correspondant à une équation hyperelliptique du genre p.

Si l'on se donne une forme algébrique de genre p, il y a ∞^{3p-3} variables, dont la variable *uniformisante* t est l'une d'elles, et qui sont dites *quasi-uniformisantes*. Chacune de ces variables quasi-uniformisantes permet la représentation conforme de la surface de Riemann relative à la forme considérée sur une aire plane dont les côtés se séparent en couples tels qu'on passe par une substitution projective de l'élément d'un couple à l'autre élément. M. Whitaker donne enfin l'équation différentielle qui relie une variable quasi-uniformisante à la variable uniformisante.

Hicks (*W.-M.*). — Recherches sur le mouvement vorticellaire. Troisième Partie : Sur les agrégats de vortex spiraux ou gyrostatiques. (33-99).

La partie principale du Mémoire de M. Hicks concerne les agrégats gyrostatiques de vortex. Ses recherches mettent en évidence un système nouveau de vortex spiraux. Il donne les conditions générales pour l'existence d'un tel système, lorsque le mouvement est symétrique autour d'un axe; l'étude est poussée jusqu'au détail dans le cas d'agrégats sphériques. L'auteur montre l'existence d'un système périodique de familles d'agrégats, dont il développe les curieuses propriétés.

M. Hicks s'occupe aussi des agrégats de vortex non gyrostatiques et étudie les conditions sous lesquelles deux ou plusieurs agrégats peuvent être combinés en un seul.

Sheppard (*W.-F.*). — Application de la théorie des erreurs au cas de la distribution normale et de la corrélation normale. (101-167).

Pearson (*K.*). — Contribution mathématique à la théorie de l'évolution. — V : Sur la reconstruction de la stature des races préhistoriques. (169-244).

Pearson (*K.*) et *Lee* (*Alice*). — Contribution mathématique à la théorie de l'évolution. — Sélection génétique (reproductive). Hérédité de la fertilité et de la fécondité. (257-330).

Mac-Mahon (*P.-A.*). — Mémoire sur la théorie de la partition des nombres. Deuxième Partie. (351-401).

Tome CXCIV (A); 1900.

Yule (*G.-U.*). — Sur l'association des attributs en statistique; avec des illustrations tirées des matériaux de la *Childhood Society*. (257-319).

Mac-Mahon (*P.-A.*). — Analyse combinatoire. Fondements d'une nouvelle théorie. (361-386).

Supposons que les combinaisons définies par une certaine loi aient été énumérées; supposons qu'on connaisse, d'une part, une opération et, d'autre part, une fonction telles que l'opération effectuée sur la fonction fournisse le nombre de combinaisons considérées. Par exemple, le nombre des arrangements de n lettres n à n résulte de l'opération $\frac{d^n}{dx^n}$ effectuée sur la fonction x^n. Il arrive alors, en général, qu'on peut obtenir plus qu'une simple énumération, à savoir une représentation graphique des combinaisons qu'on veut énumérer, et résoudre ainsi divers autres problèmes qui conduisent finalement au problème considéré. L'auteur, dans un Mémoire inséré dans les *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, a appliqué cette méthode à la solution complète du problème du carré latin.

J. T.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXXV; 1907 (1).

Lecornu (*L.*). — Sur l'extinction du frottement. (3-8).

On connaît divers cas dans lesquels le mouvement d'un système s'effectue de façon que le travail de frottement diminue de plus en plus. Cette tendance à échapper au frottement se manifeste avec une netteté particulière dans le système qu'étudie l'auteur : c'est un ensemble quelconque de sphères homogènes qui ont leurs centres fixes et qui exercent en leurs divers points de contact des pressions mutuelles données.

Supposant d'abord le système abandonné à lui-même, après avoir été lancé d'une façon arbitraire, M. Lecornu prouve que *le travail du frottement, rapporté à chaque instant à l'unité de temps, tend constamment vers zéro.* Quand le glissement se transforme en roulement, cette conclusion n'est pas modifiée.

L'auteur suppose ensuite qu'au lieu d'abandonner le système à lui-même on applique sur une ou plusieurs des sphères qui le composent des forces telles que chacune des sphères ainsi actionnées tourne avec une vitesse constante autour d'un axe fixe; alors l'état final est tel que *le travail de frottement dans l'unité de temps soit le plus petit possible.* Les sphères peuvent être remplacées par des corps de forme quelconque, homogènes ou non, pourvu que chacun de ces corps tourne autour d'un axe fixe et présente des surfaces de révolution touchant les corps voisins en des points qui demeurent fixes; de tels systèmes peuvent être facilement réalisés.

Fontené (*G.*). — Extension à l'espace du théorème de Poncelet par des polyèdres réticulés. (9-27).

L'auteur appelle *polyèdres réticulés* des polyèdres de genre *un*, dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres; la nature d'un polyèdre réticulé dépend des trois nombres caractéristiques p, q, r, dont le dernier est supposé égal à 1 dans la plus grande partie du présent Mémoire.

Avec $r = 1$, le nombre des sommets ou des faces est pq; le nombre des paramètres dont dépend le polyèdre est, régulièrement, $2pq$. Si le polyèdre doit être circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′, ce qui donne $2pq$ conditions (sauf réductions possibles), il semble qu'il soit en général déterminé. M. Fontené démontre à ce sujet le théorème suivant :

Étant données deux quadriques S *et* S′, *il existe, sous une condition invariante de fermeture, une double infinité de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* p, q, 1, *qui sont circonscrits à la quadrique* S *et inscrits à la quadrique* S′.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXI, p. 141.

Ces polyèdres sont liés à *deux droites fondamentales* XY et ZT qui constituent un couple d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques. Leurs arêtes forment deux systèmes : toutes les arêtes d'un système sont tangentes à une même quadrique.

Dans le cas $p = q = 3$, la condition de fermeture relative aux deux quadriques $S = 0$ et $S' = 0$ est

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S'$; quand elle est vérifiée, il existe *trois* séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques $p = 3$, $q = 3$, circonscrits à S et inscrits à S', séries liées aux trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun.

Dans le cas $p = q = 4$, la condition de fermeture relative aux deux quadriques est

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0;$$

quand elle est vérifiée, il existe *trois* séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques 4, 4, circonscrits à S et inscrits à S', séries liées aux trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun.

Maillet (*Edm.*). — Sur diverses propriétés des nombres transcendants de Liouville. (27-47).

Ce travail fait suite à celui que l'auteur a publié dans le Volume précédent du même recueil (*Bull. Soc. math.*, 1906, p. 226). Il traite des ensembles formés de nombres de Liouville correspondants, avec ou sans adjonction de nombres rationnels. M. Maillet y fait connaître des catégories étendues C de nombres de Liouville jouissant des propriétés suivantes :

1° Désignant par a_m et b_m des nombres de Liouville, les premiers quelconques, les seconds distincts, appartenant les uns et les autres à une même catégorie C, ou pouvant être rationnels, on ne peut avoir entre eux d'identité de la forme

$$\sum_0^{\nu} a_m e^{b_m} \equiv 0;$$

2° Les c_m étant des nombres rationnels plus grands que l'unité, et les d_m des nombres de Liouville réels, plus grands que l'unité, de la catégorie C, tout polynome à coefficients entiers positifs formé avec d_m, $c_m^{d_m}$, $d_m^{d_m}$, $d_m^{c_m}$ est un nombre transcendant.

Lucas (*Félix*). — Note relative aux points d'intersection des courbes algébriques. (47-53).

On sait que le groupe des points d'intersection de deux courbes algébriques planes du même degré comporte, quand ce degré dépasse 2, certaines liaisons nécessaires : c'est ainsi que huit points communs à deux cubiques déterminent le neuvième. Plus généralement, s'il s'agit de deux courbes d'ordre $m > 2$, il suffit de $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points quelconques du plan pour déterminer un faisceau de courbes qui ont m^2 points communs.

Si l'on sépare *un* point du groupe des m^2 pivots, en imposant à une courbe algébrique passant par les m^2-1 autres pivots la condition de ne point passer par le premier, cette courbe sera nécessairement de degré supérieur à m. L'auteur montre que *le degré minimum est* $2(m-1)$ et forme l'équation générale des courbes correspondantes, qui dépendent de $m(m-1)$ coefficients arbitraires.

Remy (*L.*). — Sur une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre. (53-69).

Le problème de la recherche des surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre présente un caractère nettement *arithmétique* que l'auteur met en pleine évidence à propos d'une famille de surfaces à *quinze* points doubles, qui se compose d'une infinité *dénombrable* de surfaces dépendant chacune de *trois* modules et liées à des équations à inconnues entières du type de l'équation de Pell.

Pour définir cette famille, on considère les fonctions θ de deux variables (u, v) répondant au tableau de périodes

$$(T_\Delta) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G \end{vmatrix}$$

d'ordre $2n$, de caractéristique nulle, paires et admettant le point $u=v=0$ pour zéro d'ordre $4p$. Si l'on égale les coordonnées homogènes d'un point à quatre de ces fonctions θ (linéairement indépendantes), on obtient une surface à quinze points doubles dont le degré est $4(\Delta n^2-2p^2)$. Pour que ce degré soit égal à 4, il faut donc que les entiers Δ, n, p vérifient la condition

$$(E) \qquad \Delta n^2 - 2p^2 = 1.$$

Mais cette condition n'est pas suffisante : *pour qu'il existe une surface à quinze points doubles correspondant aux entiers* Δ, n, p *liés par l'équation* (E), *il faut et il suffit que la plus petite solution* ρ_1, ν_1 *de l'équation*

$$(E') \qquad \rho^2 - 2\Delta\nu^2 = 1$$

vérifie l'inégalité

$$\Delta n \nu_1 > p\rho_1.$$

Grâce à ce dernier résultat, M. Remy établit la proposition suivante :

Soit Δ *un entier quelconque différent de* 1, *tel que la forme* $\Delta X^2 - 2Y^2$ *puisse représenter l'unité, et soit* n, p *la plus petite solution en nombres entiers de l'équation*

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1;$$

on obtient une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles en égalant les coordonnées homogènes d'un point à quatre fonctions θ *linéairement indépendantes, répondant au tableau* (T_Δ), *d'ordre* $2n$, *de caractéristique nulle, paires et admettant le point* $u=v=0$ *pour zéro d'ordre* $4p$.

La surface générale du quatrième ordre à quinze points doubles dépend de *quatre* paramètres (a, b, c, d), tandis qu'une surface hyperelliptique ne dépend que de *trois* modules. Les surfaces précédentes sont donc caractérisées par une relation $f_p(a, b, c, d) = 0$ que l'auteur enseigne à former, dans le cas où $p = 1$, ce qui entraîne $\Delta = 3$ et $n = 1$. Cette équation $f_p = 0$ exprime que la surface de paramètres a, b, c, d possède une unicursale d'ordre $4p$ sans points multiples et ne passant par aucun point double de la surface.

Il existe autant de types de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles possédant une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double) que le nombre $2p^2+1$ admet de diviseurs carrés, y compris le diviseur 1, non compris le diviseur $\sqrt{2p^2+1}$ si $2p^2+1$ est un carré.

Bioche (*Ch.*). — Sur les surfaces du troisième et du quatrième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une courbe de quatrième ordre et de quatrième classe. (70-74).

Toute courbe de quatrième ordre et de quatrième classe est une transformée homographique soit de la biquadratique

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

soit de la quartique à sécantes triples

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}.$$

M. Bioche forme successivement les équations des surfaces du troisième ordre et des surfaces du quatrième ordre qui admettent pour asymptotique chacune des deux courbes ci-dessus. Il prouve qu'*il n'existe qu'une surface du troisième ordre admettant comme asymptotique une quartique de quatrième classe à sécantes triples, savoir la surface réglée à directrices distinctes.*

Les surfaces qui contiennent la biquadratique ont huit points doubles sur cette asymptotique; celles qui contiennent la quartique à sécantes triples ont cinq points doubles sur cette asymptotique.

Lalesco. — Sur le groupe des équations trinomes. (75-76).

Toute équation trinome peut être réduite à la forme

$$x^n - kax + a = 0,$$

où a désigne un paramètre arbitraire et k le rapport $n : (n-1)^{\frac{n-1}{n}}$. L'auteur prouve que, *si n est premier, le groupe de Galois de cette équation est le groupe symétrique.*

Pellet (*A.*). — Construction des rayons de courbure d'une classe de courbes et de surfaces. (76-80).

Il s'agit des courbes

$$AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^m + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^m + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^m = 0$$

et des surfaces

$$AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^m + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^m + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^m + DT_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^m = 0.$$

La construction est fondée sur la considération de l'*axe de déviation* d'une conique (droite joignant le centre de courbure en M au pôle de la normale en M).

Goursat (*E.*). — Sur les séries entières et les approximations successives. (81-91).

Étant donnée une équation différentielle de premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

où le second membre est une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine D défini par les conditions

$$|x| \leqq a, \qquad |y| \leqq b$$

et dont le module ne dépasse pas, dans ce domaine, un nombre positif M, on sait que l'intégrale de l'équation (1) qui prend la valeur $y = 0$ pour $x = 0$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre, avec un rayon au moins égal au plus petit des deux nombres a et $b : M$.

Pour aller plus loin, M. Goursat se donne le domaine de convergence de la série entière $f(x, y)$ et démontre un résultat plus précis, qui donne dans tous les cas le moyen d'avoir la limite la plus grande possible fournie par l'application du théorème précédent.

Étant donnée une série entière en x et y à coefficients quelconques

$$(2) \qquad f(x, y) = \Sigma a_{mn} x^m y^n,$$

l'auteur, après avoir posé

$$A_{mn} = |a_{mn}|, \qquad X = |x|, \qquad Y = |y|,$$

cherche dans quelle portion de l'angle XOY on doit prendre le point de coordonnées (X, Y) pour que la série des modules

$$(3) \qquad \Sigma A_{mn} X^m Y^n$$

soit convergente. Sur chaque droite $Y : X =$ const. il y a un point M tel que la série (3) est convergente pour tout point du segment OM et divergente pour tout point de la droite situé au delà de M. Le lieu des points séparatifs M de toutes les demi-droites comprises entre OX et OY est une courbe continue Γ telle que, *si* $x = R$, $y = R'$ *sont les coordonnées d'un point quelconque de* Γ, *la série* (2) *est absolument convergente si l'on a à la fois*

$$|x| < R, \qquad |y| < R'$$

et divergente si l'on a à la fois

$$|x| > R, \qquad |y| > R'.$$

Cette courbe séparatrice Γ peut avoir des formes très diverses, ainsi que le montrent divers exemples.

Cela posé, M. Goursat établit la règle suivante :

L'intégrale de l'équation (1), *qui est nulle pour* $x = 0$, *est holomorphe dans un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon au moins égal à l'abscisse du point d'intersection de la courbe* Γ *relative à la série* $f(x, y)$ *avec la droite* $\frac{Y}{X} = M$, *si* $|f(x, y)|$ *a pour limite supérieure* M *dans le domaine qui correspond à la courbe* Γ.

Ces considérations s'étendent à des séries entières d'un nombre quelconque de variables et permettent de formuler une règle analogue pour les intégrales y et z du système

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma A_{mnp} x^m y^n z^p, \qquad \frac{dz}{dx} = \Sigma B_{mnp} x^m y^n z^p$$

qui s'annulent avec x.

Enfin l'auteur montre sur l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

comment la règle précédente s'étend, moyennant une modification convenable, au cas des fonctions $f(x, y)$ non analytiques.

Lecornu (*L.*). — Sur une généralisation du mouvement de Poinsot. (91-97).

On sait, depuis Poinsot, que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe O s'effectue, en l'absence de forces extérieures, de façon que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point roule et pivote sur un plan fixe, avec une vitesse angulaire représentée vectoriellement par le diamètre joignant le point fixe au point de contact de l'ellipsoïde et du plan.

On peut, au lieu de l'ellipsoïde d'inertie relatif à O, considérer un autre ellipsoïde, ayant même centre et mêmes directions principales, mais dont les axes ne soient pas proportionnels à ceux de l'ellipsoïde d'inertie : ce sera, par exemple, la surface d'un corps homogène de forme ellipsoïdale. Si l'on assujettit cet ellipsoïde, que l'auteur appelle *ellipsoïde superficiel*, à se mouvoir autour de son centre, en roulant et pivotant, sans glissement, au contact d'un plan fixe, on obtient un mouvement fort analogue à celui de Poinsot, mais dans lequel l'action du plan n'a plus un moment nul par rapport au point O.

M. Lecornu fait dépendre la détermination du mouvement d'une intégrale elliptique de troisième espèce, et prouve que *le mouvement de l'ellipsoïde superficiel est un mouvement de Poinsot si cet ellipsoïde et l'ellipsoïde d'inertie se coupent suivant une ligne le long de laquelle la courbure totale du premier est constante.* Cette condition est vérifiée notamment pour un ellipsoïde homogène ou composé de couches homothétiques et homogènes.

Barré (*E.*). — Sur un élément géométrique nouveau des surfaces. (98-121).

L'élément géométrique dont il s'agit est la *flexion*, définie et étudiée sommairement par M. Demartres (*Bull. Soc. math.*, 1887).

Étant donnés une surface et un plan de référence fixe, pour un déplacement infiniment petit MM′ d'un point de la surface à partir d'une position M, la distance au plan P varie de dh, la trace du plan tangent sur le plan P tourne de $d\psi$; la *flexion* de l'élément MM′ est, par définition, le rapport

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{dh}{d\psi},$$

θ étant l'angle du plan P avec le plan tangent en M.

La *flexion* d'un élément MM′ par rapport à une direction δ du plan tangent en M est la flexion de l'élément MM′ relativement à un plan quelconque P, parallèle à δ.

Dans la première Partie de son Mémoire, M. Barré rappelle et complète les résultats de M. Demartres, ou les rattache à des propositions déjà connues.

Dans la deuxième Partie, il étudie la flexion des éléments d'une surface

$$z = f(x, y),$$

le plan de référence P étant l'un des plans coordonnés. Si P coïncide avec $x = 0$, on a

$$\mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1)\,\frac{dx}{dp}.$$

S'il coïncide avec $z = 0$ on a

$$\mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1)\,\frac{dz}{p\,dq - q\,dp}.$$

Au moyen de ces formules, on peut rechercher les lignes telles que la flexion de leurs éléments, par rapport à l'un des plans coordonnés, soit une fonction connue de ses coordonnées indépendantes.

Dans la troisième Partie, la surface est rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques et la flexion est évaluée relativement à un plan de référence arbitraire.

Auric. — Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle ambiguë du second degré. (121-125).

Soit ω une irrationnelle, racine de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\Delta = b^2 - 4ac).$$

Le développement en fonction continue de ω est périodique et peut s'écrire

$$\omega = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

La racine conjuguée ω' donne naissance au développement renversé

$$\omega' = (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1).$$

Si l'irrationnelle ω appartient à une classe ambiguë, ces deux développements sont identiques.

Trois cas seulement peuvent alors se présenter pour la suite indéfinie

$$(1) \qquad \ldots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots.$$

1° Elle est symétrique par rapport à deux intervalles;

2° Elle est symétrique par rapport à un intervalle et par rapport à un terme : c'est le cas où la période renferme un nombre impair de termes;

3° Elle est symétrique par rapport à deux termes.

L'auteur examine successivement ces trois cas et fait voir que, si l'on appelle t, u la plus petite solution entière de l'équation

$$t^2 - \Delta u^2 = 4,$$

la nature de la suite (1) dépend exclusivement de la décomposition en facteurs des deux nombres $t+2$ et $t-2$.

Niewenglowski (B.). — Note sur les équations $x^2 - ay^2 = 1$ et $x^2 - ay^2 = -1$. (126-131).

On sait que l'équation

$$(1) \qquad x^2 - ay^2 = 1,$$

dans laquelle a est un entier non carré, admet une infinité de solutions entières. L'auteur, en introduisant l'hyperbole représentée par l'équation (1), donne des formules de résolution l'interprétation géométrique suivante, où les mots *point entier* désignent un *point à coordonnées entières :*

Soient $A(1, 0)$ le sommet et $A_1(x_1, y_1)$ le point qui a pour coordonnées les plus petites solutions entières et positives de l'équation (1); la parallèle menée par A à la tangente en A_1 coupe l'hyperbole en un point entier A_2; la parallèle menée par A_1 à la tangente en A_2 coupe l'hyperbole en un point entier A_3, ..., et ainsi de suite. On obtient de la sorte tous les points entiers à coordonnées positives; les autres se déduisent de ceux-là par symétrie.

L'équation

$$(1)' \qquad x^2 - ay^2 = -1$$

n'a pas toujours de solutions entières. Si elle en a, elle en a une infinité. Pour qu'elle ait des solutions entières, il faut et il suffit que la plus petite solution entière de l'équation (1), autre que $(1, 0)$, soit de la forme

$$x_1 = 1 + 2u^2, \qquad y_1 = 2uv.$$

La plus petite solution entière de l'équation (1)' est alors $\xi_1 = u$, $\eta_1 = v$, et l'on en déduit toutes les autres par voie de récurrence.

Appell. — Sur l'extinction du frottement. (131-133).

L'auteur fait connaître un système matériel présentant des caractères très généraux et qui tend à échapper au frottement. Voici sa définition :

1° Le système est d'abord assujetti à des liaisons quelconques, sans frottement, indépendantes du temps;

2° Il est soumis à des forces intérieures dérivant d'un potentiel H qui est positif dans toutes les configurations possibles du système et qui devient *nul* dans une configuration spéciale, constituant une configuration d'équilibre stable du système sous l'action des seules forces intérieures;

3° Le système est en contact avec des solides fixes $S_1, S_2, \ldots, S_p$ sur lesquels il glisse avec frottement;

4° Il est soumis enfin à d'autres forces extérieures dérivant d'une fonction U, qui reste inférieure à une limite fixe L, pour toutes les positions du système dans lesquelles le contact subsiste avec l'un au moins des corps $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

Popovici (*C.*). — Sur le problème des multiplicateurs réciproques (133-140).

Ce problème consiste à *trouver les systèmes d'équations*

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n}$$

tels que les coefficients de l'un soient les multiplicateurs de l'autre.

L'auteur le résout dans le cas où n est égal à 2.

de Sparre (*M.*). — Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement de glissement (141-158).

Introduction. — Dans une Note publiée, l'an passé, dans le *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai fait voir que l'on arrive sans peine à lever l'ambiguïté apparente à laquelle peut conduire l'emploi des lois de Coulomb, en tenant compte de la continuité du mouvement.

Il existe toutefois certains problèmes où l'application de ces lois semble conduire, ainsi que je vais le faire voir, à un mouvement discontinu, ce qui paraît à première vue absurde. Toutefois, si l'on examine la question de plus près, on voit que la solution à laquelle on est conduit est, au lieu de cela, fort rationnelle et que là encore les lois de Coulomb donnent une image, approchée sans doute, mais, somme toute, très satisfaisante des phénomènes. La discontinuité qu'elles introduisent n'existe évidemment pas, mais elle remplace une modification très rapide des conditions du mouvement, modification que l'on peut sans inconvénients remplacer par la discontinuité en question, si l'on se propose seulement de connaître ce qui se passait avant et après la modification dont il s'agit.

C'est, d'ailleurs, l'hypothèse de la rigidité absolue des liaisons qui introduit dans le cas actuel la discontinuité dont nous venons de parler, comme elle avait conduit à introduire des percussions dans les problèmes examinés par nous dans la Note que je rappelle en commençant. Si l'on tient compte de l'élasticité des liaisons, cette discontinuité disparaît et elle est remplacée par une modifi-

cation des conditions du mouvement d'autant plus rapide que les liaisons sont plus raides et qui, à la limite, devient instantanée lorsqu'on les suppose absolument rigides.

Nous verrons aussi que, pour certains problèmes où intervient le frottement, on peut, pour des conditions initiales données, avoir, suivant les cas, une ou deux solutions également acceptables, le choix entre les deux solutions, lorsqu'elles existent, devant se faire en tenant compte de la façon dont les conditions sont réalisées; mais là encore, nous constaterons que les résultats donnent une image approchée très satisfaisante des phénomènes.

Voici les énoncés des deux problèmes que traite M. de Sparre :

I. Deux points matériels A et B, de masse égale à 1, sont reliés par une tige rigide AB de masse négligeable. Le point A est de plus assujetti à décrire la verticale descendante Oy et le point B est relié par un fil inextensible et sans masse, de longueur égale à AB, au point fixe O. Le mouvement du système se fait dans un plan vertical xOy et le point A frotte sur la droite Oy.

II. Deux points matériels A et B, de masse égale à 1, sont reliés par une tige rigide, de masse négligeable; le point A est assujetti à se mouvoir sur la verticale descendante Oy, sur laquelle il frotte; le point B, en plus de sa liaison avec le point A, est assujetti à se mouvoir dans un plan vertical xOy.

Goursat (*E.*). — Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm. (163-173).

Le cas dont il s'agit est celui où le noyau $K(x, y)$ de l'équation

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy = \psi(x) \tag{1}$$

est de la forme

$$X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_nY_n,$$

les X étant des fonctions de x seulement et les Y des fonctions de y seulement. Par des transformations de déterminants, l'auteur établit le théorème que voici :

Si l'on pose, conformément aux notations de Fredholm,

$$\Phi_n(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

$$\mathcal{F}_n(x, y; \lambda) = \lambda K(x, y) + \sum_{p=1}^{n=1} \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_p \\ y, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

et si λ n'est pas racine de l'équation $\Phi_n(\lambda) = 0$, l'équation intégrale (1) *admet une solution unique donnée par la formule*

$$\varphi(x) = \psi(x) + \frac{1}{\Phi_n(\lambda)} \int_0^1 \psi(y)\,\mathcal{F}_n(x, y; \lambda)\,dy.$$

La loi de formation des coefficients de λ dans les deux polynomes $\Phi_n(\lambda)$ et

$\mathcal{F}_n(x, y, \lambda)$ étant indépendante de la forme particulière (2) qui a été attribuée à la fonction $K(x, y)$, cette loi s'applique quelle que soit la fonction K et l'on est ainsi conduit à la solution générale de l'équation (1) sous la forme même de M. Fredholm.

M. Goursat démontre aussi que l'extension de la formule précédente au cas de n infini est légitime lorsque la fonction $K(x, y)$ est développable en série uniformément convergente de la forme

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n + \ldots.$$

Il ajoute, en terminant, que les théorèmes généraux sur l'équation de Fredholm peuvent se déduire comme cas limites de théorèmes analogues relatifs au cas élémentaire qu'il vient d'étudier.

d'Ocagne (*Maurice*). — Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4. (173-195).

Voici les titres des diverses sections de ce Mémoire :

1. Ordre nomographique d'une équation.
2. Genre d'un nomogramme à points alignés.
3. Construction des échelles par projection.
4. Transformation nomographique générale.
5. Points critiques d'un nomogramme à points alignés.
6. Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique 3.
7. Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique 4.
8. Construction projective de nomogrammes de genre 0 et 1.
9. Emploi direct des échelles des fonctions composantes.
10. Exemples de tous les cas possibles d'équations d'ordre 3 représentables par un nomogramme de genre 0.
11. Nomogrammes coniques pour les équations d'ordre 3.
12. Nomogrammes coniques pour les équations d'ordre 4.

Weill (*Mathieu*). — Propriétés des polygones inscrits à une conique (196-202).

Le produit des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux droites qui joignent de p en p les sommets du polygone.

Étant donné un polygone de $2m$ côtés, inscrit dans une conique, et dont les côtés sont numérotés $1, 2, 3, \ldots, 2m$, le produit des distances d'un point quelconque de la conique aux côtés de rang impair est dans un rapport constant avec le produit des distances de M aux côtés de rang pair et aussi avec le produit des distances de M aux diagonales.

Trois courbes C, S, Σ font partie d'un faisceau d'ordre m; deux autres courbes, S′ et Σ', font partie avec C d'un faisceau d'ordre $2m$; les $2m^2$ points de rencontre de S avec Σ' et de S′ avec Σ sont sur une courbe C′ de degré m.

Lebesgue (*H.*). — Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo. (202-212).

Blumenthal (*Otto*). — Sur le mode de croissance des fonctions entières. (213-232).

Soient z une variable complexe, r son module, φ son argument. On considère une fonction entière

$$f(z) = A(r, \varphi) + i B(r, \varphi)$$

dont le module $C(r, \varphi)$ a pour maximum $M(r)$ sur le cercle de rayon r.

Pour énoncer les résultats qu'il a en vue, l'auteur convient d'appeler *fonction* (*courbe*) *algébroïde entière* une fonction (courbe) réelle

$$y = y(x)$$

de la variable réelle x, qui satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle est finie et continue pour toutes les valeurs finies de x;

2° Pour toutes les valeurs de x, sauf au plus pour une infinité dénombrable de points tendant vers l'infini comme point limite unique, y est analytique et régulière en x;

3° Pour les valeurs exceptionnelles, y admet des développements à la Puiseux, suivant les puissances fractionnaires de $x - x_0$.

Voici maintenant le théorème de M. Blumenthal :

La fonction (*courbe*) $M(r)$, *évidemment monodrome, continue et constante, se compose d'un nombre fini ou infini dénombrable de parties de fonctions* (*arcs de courbes*) *algébroïdes. Les valeurs* (*points*) *de rencontre de deux parties de fonctions* (*arcs de courbes*) *différentes sont en nombre fini ou n'ont qu'une valeur* (*point*) *limite unique à l'infini.*

Pour le démontrer, l'auteur commence par rappeler que, si l'on exclut les fonctions de la forme az^m, la dérivée de G par rapport à φ ne peut s'annuler tout le long d'un cercle ayant l'origine comme centre. Il faut alors prouver que :

Dans tout le plan, l'ensemble des points pour lesquels la dérivée $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ *est nulle forme au plus une suite dénombrable de courbes algébroïdes; il n'y a qu'un nombre fini de ces courbes* (*ou de leurs branches*) *qui pénètrent dans l'intérieur d'un cercle* R.

Ce point mis hors de doute, M. Blumenthal appelle *courbes* (C) les courbes algébroïdes entières $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ et montre qu'une courbe (C) ne coupe un cercle (r) qu'en un nombre fini de points. Mais il y a plus :

Sur tous les cercles (r) *intérieurs à* (R) *le nombre des points pour lesquels* $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$ *est au plus égal à un nombre fini* K *qui ne dépend que de* R. *Tous les points* $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ *d'un cercle* (r) *dans un certain voisinage d'un cercle* (r_0) *sont situés sur des courbes* (C) *ayant des points communs avec* (r_0).

Les mêmes résultats subsistent pour les courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$. On peut

ajouter qu'*il ne saurait exister dans le plan des z aucun domaine fini*, limité exclusivement par des arcs de courbes de l'une ou l'autre de ces espèces.

Abordant la recherche des plus grandes valeurs M (r) de G sur les différents cercles (r), l'auteur appelle *points maxima* d'un cercle (r_0) les points de ce cercle où G prend la valeur M (r_0) et *courbe maxima* tout arc de courbe formé par des points maxima. Dans le cas général, il y a sur un cercle (r_0) plusieurs points maxima et plusieurs éléments C passent par ces points. Il faut alors traiter séparément les valeurs $r > r_0$ et les valeurs $r < r_0$. *Les courbes maxima peuvent être différentes pour $r > r_0$ et pour $r < r_0$.* C'est là un fait capital, par suite duquel la fonction M (r) se comporte d'une façon complètement différente des deux côtés du point r_0.

M. Blumenthal dit que r_0 est un *point anguleux* de la fonction M (r), si les courbes maxima sont différentes pour $r > r_0$ et pour $r < r_0$. Les points anguleux sont de deux sortes :

1° *Points anguleux de première sorte :* les courbes maxima des deux côtés du cercle (r_0) sont différentes, mais il y a au moins un couple de courbes maxima des deux côtés du cercle (r_0) qui passent par le même point maximum de (r_0) ; en un pareil *point anguleux*, la tangente est toujours continue.

2° *Points anguleux de seconde sorte :* les courbes maxima des deux côtés passent par des points maxima différents.

L'auteur établit que, *de chaque côté d'un point quelconque r_0, la fonction* M (r) *admet un développement algébroïde : ces développements sont valables dans un intervalle d'étendue finie; si les développements des deux côtés sont identiques, r_0 est un point ordinaire; sinon, c'est un point anguleux de* M (r).

A l'intérieur d'un intervalle fini, il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux.

La proposition générale, énoncée au début, se trouve ainsi complètement démontrée. On peut encore l'énoncer en disant :

Les courbes maxima sont des arcs de courbes algébroïdes. Toute courbe C *qui est maxima dans un élément l'est sur un arc de longueur finie. Pour* $r \leqq$ R, *cette longueur est au-dessus d'une limite fixe, différente de zéro.*

La fonction M (r) est loin de se comporter d'une façon simple, à cause de la présence des points anguleux. L'exemple le plus simple d'une courbe M (r) composée de plusieurs arcs de courbes analytiques différentes est fourni par les polynomes de second degré

$$f(z) = (z - e_1)(z - e_2).$$

L'auteur en fait, en terminant, une étude approfondie, d'où il résulte que les discontinuités prévues par la démonstration se présentent bien dans la réalité.

Bioche (*Ch.*). — Sur les courbes gauches unicursales du quatrième ordre. (233-247).

On sait que les courbes gauches du quatrième ordre sont de deux espèces :

1° Les *biquadratiques*, par chacune desquelles il passe une infinité de surfaces du second ordre. Elles ne sont unicursales que si elles présentent un point double : si celui-ci est un point double ordinaire, la courbe est de la sixième classe ; si c'est un point de rebroussement, la courbe est de quatrième classe.

2° Les *quartiques de Steiner* par chacune desquelles ne passe qu'une surface du second ordre, dont un système de génératrices rectilignes est constitué par les sécantes triples de la courbe. Ces quartiques sont unicursales; leur classe est 6, 5 ou 4.

Les coordonnées homogènes de toute courbe gauche unicursale du quatrième ordre peuvent toujours être représentées par quatre polynomes du quatrième degré en λ, premiers entre eux dans leur ensemble. Partant de ce mode de représentation sous sa forme la plus générale, M. Bioche forme l'équation qui lie les λ des quatre points où la courbe est coupée par un plan : supposant trois d'entre eux confondus, on reconnaît que d'un point de la courbe on peut mener trois plans osculateurs autres que celui qui a son point de contact au point considéré, de sorte qu'en général la classe est 6. Elle diminue d'une unité chaque fois que la courbe présente un point d'*inflexion linéaire* (point où elle est coupée par sa tangente en trois points confondus).

Cet abaissement de la classe est lié à la nature des racines de l'équation du quatrième ordre qui donne les λ des *points d'inflexion plane* ou *points stationnaires* (points où le plan osculateur a quatre intersections confondues avec la courbe) :

1° Si cette équation a *une racine double*, la courbe est une *quartique de Steiner* ayant *un point d'inflexion linéaire;* sa classe est 5.

2° Si cette équation a *deux racines doubles*, la courbe est une *quartique de Steiner* ayant *deux points d'inflexion linéaire.* Elle est de classe 4. Ses tangentes font partie d'un complexe linéaire.

3° Si cette équation a *une racine triple*, la courbe est une *biquadratique* ayant *un point de rebroussement :* sa classe est 4.

En vue de simplifier les calculs, M. Bioche détermine les formes réduites des équations générales des courbes gauches unicursales du quatrième ordre : il prend pour faces du tétraèdre de référence deux plans osculateurs ($X = 0$, $T = 0$) et deux plans dont chacun passe par la corde qui joint les points de contact des deux premiers plans ainsi que par la tangente en l'un de ces points; on arrive ainsi aux formules

$$X = a\lambda^4 + a'\lambda^2, \qquad Y = b\lambda^3 + b'\lambda^2, \qquad Z = c\lambda^3 + c'\lambda, \qquad T = d\lambda + d'.$$

Les biquadratiques unicursales, ayant toujours un point double, sont caractérisées par les relations

$$\begin{vmatrix} ab & ab' & a'b' \\ bc & bc' & b'c' \\ cd & cd' & c'd' \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on écarte les quartiques de quatrième classe déjà étudiées par l'auteur (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXXIII, 1905, p. 18), on peut encore simplifier les formules précédentes et prendre

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + h\lambda, \qquad T = 1.$$

Toute courbe unicursale du quatrième ordre, de classe 6 ou de classe 5, est transformée homographique de l'une des courbes représentées par ces équations. Les λ des points stationnaires vérifient la condition

$$2\lambda^2 + 3h\lambda + 2\lambda = 0.$$

Quand h est différent de zéro, cette équation n'a de racine double que si $h = 16$; dans ce cas, la courbe est de classe 5. La valeur $h = 2$ caractérise les biquadratiques à point double. Pour $h = 0$, on aurait les biquadratiques à rebroussement.

A l'aide de ces équations, l'auteur trouve la condition ($3h = 4$) pour que les quatre points stationnaires soient dans un même plan et montre que *les tangentes aux points stationnaires sont sur une même quadrique.*

Si l'on rapporte la courbe au tétraèdre formé par les plans osculateurs aux points stationnaires, on trouve

$$X = a(\lambda + \alpha)^4, \qquad Y = b(\lambda + \beta)^4, \qquad Z = c(\lambda + \gamma)^4, \qquad T = d(\lambda + \delta)^4.$$

M. Bioche démontre que, *si d'un point* M *d'une courbe de sixième classe on mène les plans osculateurs à la courbe, les points de contact de ces plans sont dans un plan passant par* M; *quand le point* M *se déplace, le plan enveloppe un cône du second degré qui touche la courbe aux points stationnaires.*

Si les points de contact des plans osculateurs menés d'un point de la courbe sont en ligne droite, il en est toujours de même, quel que soit le point pris sur la courbe; pour que ce fait se produise, il faut et il suffit que les points stationnaires soient dans un même plan.

En terminant, l'auteur fait l'application de ses théorèmes aux courbes

$$\frac{X}{\cos\theta} = \frac{Y}{\sin\theta} = \frac{Z}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{T}{\alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta}.$$

Si l'on rejette à l'infini l'une des faces du tétraèdre de référence, les trois autres faces étant rectangulaires, on obtient des courbes qui possèdent la propriété curieuse d'*être transformables de quatre façons différentes en courbes ayant pour axes de symétrie les trois arêtes d'un trièdre trirectangle, sans que le sommet de ce trièdre soit un centre.*

Lalesco (*T.*). — Sur la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné. (248-252).

Deux nombres m et n étant représentés *proprement* par deux classes quelconques K_m et K_n de formes appartenant à un déterminant donné D, leur produit mn pourra être représenté par la classe composée $K_m K_n$. Si les nombres m et n sont premiers entre eux, cette représentation résultante sera aussi une représentation *propre;* mais, si m et n ne sont pas premiers entre eux, il n'en est plus de même. M. Lalesco démontre en effet que :

La représentation résultante sera impropre toutes les fois que, dans les représentations propres des nombres m et n, l'un au moins des facteurs communs de ces nombres sera représenté par des classes opposées, et alors seulement.

L'auteur examine ensuite les représentations des nombres qui ne sont pas premiers avec 2D, en s'appuyant sur cette propriété caractéristique des formes ambiguës :

Si D *est sans diviseur carré, un facteur d de* D ($D = d\delta$) *n'est représen-*

table proprement que par la classe ambiguë $dx^2 - \delta y^2$. *Aucune puissance de ce nombre n'est représentable proprement par les classes de formes du déterminant* D.

Pellet (*A.*). — Remarques sur le mouvement d'une figure plane dans son plan. (252-255).

Rémoundos (*G.*). — Sur les trajectoires auxquelles donnent lieu les forces centrales. (255-259).

Un point mobile, sollicité par une force centrale, peut décrire une trajectoire admettant le centre de force comme point asymptote.

L'auteur cherche, parmi les forces centrales qui ne dépendent que de la distance r, celles qui peuvent donner lieu à de telles trajectoires : il trouve que ces forces doivent varier en raison inverse de r^n, l'exposant n étant plus grand que 2.

Supposant toujours la force fonction de la distance et variant en raison inverse de r^q, l'auteur étudie la variation du rayon de courbure de la trajectoire :

Quand $q > 2$, *le rayon de courbure devient infini si le point s'éloigne à l'infini. Quand* $q < 2$, *le rayon de courbure devient infini si le point s'approche indéfiniment du centre de force.*

La vitesse étant supposée rester inférieure à une certaine limite, le rayon de courbure de la trajectoire reste compris entre deux limites que M. Rémoundos fait connaître et qui sont, dit-il, d'une précision remarquable.

Raffy (*L.*). — Sur l'isothermie relative des réseaux. (259-282).

L'objet principal de ce Mémoire est d'étendre la notion de réseau isotherme, afin de faire rentrer dans une même théorie diverses classes de réseaux, notamment ceux qui caractérisent soit les surfaces isothermiques, soit les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, et ceux que M. Bianchi appelle *isothermes-conjugués*.

A cet effet, l'auteur introduit la notion d'*isothermie relative* qu'il définit de la façon suivante : quand deux couples de variables α et β d'une part, u et v d'autre part, donnent lieu à une identité de la forme

$$d\alpha\, d\beta = W(u, v)\,[U(u)\,du^2 + V(v)\,dv^2],$$

le réseau $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ est dit *isotherme relativement au réseau* $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ D'ailleurs l'isothermie d'un réseau relativement à un autre entraîne celle de cet autre relativement au premier.

En vertu de cette définition, quand une surface est *isothermique*, le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau formé par ses lignes minima; quand *la représentation sphérique* (des lignes de courbure) d'une surface est isotherme, le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau qui correspond aux lignes minima de sa représentation sphérique ; quand un réseau est *isotherme-conjugué* au sens de M. Bianchi, il est isotherme relativement au réseau formé par les lignes asymptotiques.

Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit : 1° *que les tangentes aux courbes de l'un forment en tout point un faisceau harmonique avec les tangentes aux courbes de l'autre;* 2° *qu'ils soient isothermes l'un et l'autre relativement à un troisième réseau.*

Ce troisième réseau, isotherme relativement aux deux premiers, n'est autre que celui qui les divise harmoniquement tous les deux. Par suite, il y a trois manières équivalentes d'énoncer la propriété d'une surface sur laquelle deux réseaux déterminés sont isothermes l'un relativement à l'autre. Ainsi, sur les *surfaces isothermiques,* chacun des trois réseaux suivants, lignes minima, lignes de courbure, lignes bissectrices des lignes de courbure, est isotherme relativement aux deux autres.

Pour mettre sous forme invariante les conditions qui assurent l'isothermie relative de deux réseaux, l'auteur considère ce qu'il appelle les *éléments invariants* du réseau

$$l_1 du + n_1 dv = 0, \qquad l_2 du + n_2 dv = 0$$

relativement au réseau défini par l'équation

$$\mathcal{F} = A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2 = 0;$$

ce sont les deux expressions différentielles

$$\sqrt{C l_2^2 - 2B l_2 n_2 + A n_2^2}\ \frac{l_1 du + n_1 dv}{l_1 n_2 - n_1 l_2},$$

$$\sqrt{C l_1^2 - 2B_1 l_1 + A n_1^2}\ \frac{l_2 du + n_2 dv}{l_1 n_2 - n_1 l_2},$$

invariantes pour tout changement de coordonnées curvilignes et qui se réduisent aux *éléments d'arc* du premier réseau quand $\mathcal{F}$ est l'élément linéaire de la surface.

On a alors la règle suivante :

Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit : 1° *que ces deux réseaux se divisent harmoniquement;* 2° *que les éléments invariants de l'un, calculés relativement à l'autre, admettent un facteur intégrant commun.*

Comme première application, le critère de S. Lie pour l'isothermie des lignes de courbure se présente sous la forme même que lui a donnée M. von Lilienthal. L'auteur montre l'équivalence de ce critère avec celui de M. Weingarten; il fait connaître la signification d'une fonction auxiliaire qui intervient dans ce dernier et le met sous une forme nouvelle.

Une seconde application concerne les *surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées,* dont l'étude, commencée par M. Eisenhart (*Amer. Journ. of Math.*, t. XXV), est ici complétée sur divers points. Il est d'abord montré que ces surfaces sont caractérisées par l'isothermie de chacun des trois réseaux suivants relativement à l'un des deux autres : savoir les lignes asymptotiques, les lignes de courbure et les lignes diagonales (tangentes aux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice). L'auteur forme ensuite, en exprimant la condition imposée aux éléments invariants, une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre qui contient un paramètre arbitraire m. Cette équation, écrite

2e Partie -

dans le système des coordonnées tangentielles isotropes d'Ossian Bonnet, est la suivante :

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\alpha\partial\beta}\log\frac{r}{t} - m\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{z+s+\sqrt{rt}}{z+s-\sqrt{rt}}\right)\\ &\qquad - m\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{z+s-\sqrt{rt}}{z+s+\sqrt{rt}}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour $m = 0$, on a l'équation qui caractérise les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme. En faisant $m = 1$, on retrouve l'équation de M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 250), relative aux surfaces isothermiques. L'hypothèse $2m = 1$ donne l'équation obtenue par M. Eisenhart pour les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées. D'où cette conséquence :

Toute surface qui possède deux des propriétés suivantes, lignes de courbure isothermes, représentation sphérique des lignes de courbure isothermes, lignes de courbure isothermes-conjuguées, possède aussi la troisième.

M. Raffy détermine les caractéristiques de l'équation générale (E) et trouve

$$\{(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)\}\,m(z+s)(r\,d\alpha^2 + t\,d\beta^2) + [(z+s)^2 + (2m-1)rt]\,d\alpha\,d\beta\} = 0.$$

En faisant $2m$ successivement égal à 0, à 2 et à 1 on obtient les théorèmes suivants :

1° *Les caractéristiques des surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme sont les lignes de courbure et les lignes qui correspondent aux lignes minima de la représentation sphérique.*

2° *Les caractéristiques de l'équation des surfaces isothermiques sont les lignes de courbure et les lignes minima* (cf. *Ann. Éc. Norm.*, 1905).

3° *Les caractéristiques de l'équation des surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées sont les lignes de courbure et les lignes asymptotiques.*

Dans les applications précédentes, l'une des conditions d'isothermie relative, celle du faisceau harmonique, était vérifiée d'elle-même. Si l'on veut exprimer qu'une surface présente l'isothermie relative de deux réseaux déterminés, on aura généralement *deux conditions distinctes* qui pourront n'admettre que des solutions communes fort particulières ou même n'en point avoir.

Si l'on se donne deux familles d'un réseau, défini par l'évanouissement d'une forme quadratique de différentielles $\mathcal{F}$, et *seulement l'une des familles* $\varphi = \text{const.}$ de l'autre réseau, il faut et il suffit que le quotient des deux paramètres $\Delta_2\varphi$ et $\Delta\varphi$, calculés par rapport à $\mathcal{F}$, soit une fonction de φ. D'où cette remarque, applicable dans beaucoup de cas : *L'équation*

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

définit sur une surface quelconque une famille de courbes qui fait partie d'un réseau isotherme relativement au réseau des courbes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

En terminant, l'auteur résout ce problème : *Étant données deux expres-*

sions différentielles

$$M_1(l_1 du + n_1 dv), \qquad M_2(l_2 du + n_2 dv),$$

qui sont supposées admettre un facteur intégrant commun, trouver le réseau isotherme relativement au réseau défini par le système

$$l_1 du + n_1 dv = 0, \qquad l_2 du + n_2 dv = 0.$$

Revenant alors aux deux expressions différentielles

$$(z + s + \sqrt{rt})^m (\sqrt{r}\, d\alpha + \sqrt{t}\, d\beta), \qquad (z + s + \sqrt{rt})^m (\sqrt{r}\, d\alpha - \sqrt{t}\, d\beta)$$

pour lesquelles l'existence d'un facteur intégrant commun est assurée par l'équation (E), on peut les remplacer, si l'on rapporte la surface à ses lignes de courbure $du\, dv = 0$, par les deux suivantes :

$$(d) \qquad \frac{\sqrt{E}\, du}{R_1^{1-m}}, \qquad \frac{\sqrt{G}\, dv}{R_2^{1-m}}.$$

Admettant qu'elles ont un facteur intégrant commun et cherchant le réseau dont cette hypothèse entraîne l'isothermie relativement aux lignes de courbure, on trouve

$$\mathcal{F} = \frac{E\, du^2}{R_1^{2-2m}} + \frac{G\, dv^2}{R_2^{2-2m}} = 0.$$

Faisant $2m$ successivement égal à 0, à 2 et à 1, on trouve les lignes minima de la représentation sphérique, celles de la surface elle-même, et ses lignes asymptotiques. Ainsi : *les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, les surfaces isothermiques et les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées peuvent être définies par la condition que les deux expressions (d) admettent un facteur intégrant commun pour les trois valeurs correspondantes de m.*

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON [1].

Tome CXCV (A); 1901.

Pearson (*K.*). — Contributions mathématiques à la théorie de l'évolution. — VI-VII. Sur la corrélation de caractères qui ne sont pas quantitativement mesurables. (1-47).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXXII$_2$, p. 5.

Pearson (*K.*) avec l'aide de Mlle *A. Lee.* — Contributions mathématiques à la théorie de l'évolution. — VIII. Sur l'hérédité des caractères qui ne sont pas susceptibles d'une mesure quantitative exacte. Première Partie : Introduction. Deuxième Partie : Sur l'hérédité de la couleur de la robe chez les chevaux. Troisième Partie : Sur l'hérédité de la couleur des yeux chez les hommes. (79-150).

Dickson (*A.-C.*). — Sur les équations simultanées aux dérivées partielles. (151-191).

L'objet du Mémoire de M. Dickson est de donner une méthode qui peut être regardée comme une extension de la méthode de Lagrange et Charpit, et qui permet d'attaquer le problème de la recherche des intégrales complètes primitives d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles, en entendant par là que le nombre de constantes arbitraires doit être tel que l'élimination de ces constantes conduise au système d'équations proposées.

L'auteur étudie deux cas : celui de deux équations simultanées du premier ordre à deux variables indépendantes et à deux fonctions inconnues, celui d'une équation du second ordre avec une fonction inconnue et deux variables indépendantes. Il applique sa méthode à divers exemples.

Dans cette méthode intervient l'intéressante notion de *bidifférentielle complète,* dont je me contente d'indiquer le point de départ.

De même que la notion de différentielle complète peut être rattachée à l'égalité

$$\int (X\,dx + Y\,dy) = \iint \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

la notion de bidifférentielle complète se rattache à l'égalité

$$\iint (X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy) = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

où le premier membre est une intégrale relative à une surface fermée, tandis que le second est une intégrale de volume, le volume étant limité par la surface. Si l'on a identiquement

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

l'intégrale de surface est nulle, en sorte que des intégrales de mêmes formes relatives à deux surfaces ouvertes limitées au même contour sont égales; dans ce cas, l'élément

$$X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy$$

de l'intégrale de surface est dit *une bidifférentielle complète,* et cet élément, par un changement de variable convenable, peut être ramené à la forme $du\,dv$.

Godfrey (*C.*). — Sur l'application des intégrales doubles de Fourier aux phénomènes optiques. (329-362).

Tome CXCVI (A); 1901.

Bryan (*G.-H.*). — La théorie cinétique des atmosphères planétaires (1-24).

Lee (*Alice*) avec quelque collaboration de M. *K. Pearson*. — Données pour le problème de l'évolution chez l'homme. — Une première étude de la corrélation dans le crâne humain. (225-264).

Le problème de la reconstruction d'un organisme, connaissant quelques parties de cet organisme, peut être divisé en trois problèmes fondamentaux :

1° Reconstruction d'un individu lorsqu'on a un ou plusieurs organes de cet individu et qu'on connaît les mesures et la corrélation d'une série des organes des individus appartenant à la même race locale.

2° Reconstruction du type moyen d'une race locale d'après la connaissance d'une série d'un ou plusieurs organes de cette race, lorsque ces organes et les autres organes ont été mesurés en grand nombre pour d'autres races.

3° Reconstruction d'un organe d'un individu vivant qu'on ne peut mesurer pendant la vie, d'après la détermination d'organes accessibles et la connaissance de la corrélation entre ces organes et l'organe non accessible résultant de mesures effectuées sur des individus de la même race, après décès.

La solution de tous ces problèmes ne peut être que probable, en sorte que leur étude comporte la détermination de l'erreur probable sur la solution.

Les études de Miss Alice Lee se rapportent surtout à des mesures effectuées sur le crâne.

Barnes (*E.-W.*). — Théorie de la double gamma fonction. (265-387).

La *double gamma fonction* de M. Barnes, qu'il désigne par le symbole

$$\Gamma_2(z \mid \omega_1, \omega_2),$$

se déduit de la fonction $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$ de Weierstrass, décomposée en facteurs primaires, par un procédé analogue à celui qui permet d'obtenir la fonction Γ au moyen du sinus décomposé en facteurs primaires : on ne conserve que ceux des facteurs primaires pour lesquels les deux nombres entiers m_1, m_2 qui les déterminent sont tous deux positifs ou nuls, en excluant toutefois la combinaison $m_1 = 0$, $m_2 = 0$. Le produit infini qui reste est ensuite multiplié par une puissance de e dont l'exposant est une fonction du second degré en z, fonction dont les coefficients sont certaines fonctions de ω_1, ω_2. On peut encore définir cette fonction en disant que la dérivée troisième de son logarithme est

$$-2 \sum_{m_1=0}^{m_1=\infty} \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} \frac{1}{(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4}$$

et en assujettissant les constantes d'intégration à certaines conditions. Cette fonction jouit de nombreuses propriétés que développe M. Barnes; on remarquera, en particulier, certaines fonctions de ω_1, ω_2 qui interviennent d'une façon très analogue à la façon dont intervient la constante d'Euler.

L'auteur introduit aussi ce qu'il appelle *la double fonction* ζ *de Riemann*, qu'il définit par le symbole

$$\zeta_2(s, a, \omega_1, \omega_2).$$

Cette fonction, en supposant positives les parties réelles de a, ω_1, ω_2, peut être définie pour toutes les valeurs réelles ou complexes de z par l'intégrale curviligne

$$\frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi}\int\frac{e^{-az}(-z)^{s-1}dz}{(1-e^{\omega_1 z})(1-e^{-\omega_2 z})},$$

où l'on suppose

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)},$$

le logarithme ayant sa valeur principale et où l'intégrale est effectuée le long d'un contour infini enveloppant la partie positive de l'axe des z, y compris l'origine, mais non les autres zéros du dénominateur de la quantité sous le signe $\int$. L'étude de cette fonction conduit à d'intéressantes expressions asymptotiques, dont la plus importante est une généralisation de la formule de Stirling. Elle conduit aussi à des expressions sous forme d'intégrales curvilignes du logarithme de la double fonction gamma et des constantes modulaires qui y figurent, analogues à des expressions données par l'auteur pour la fonction gamma ordinaire dans un Mémoire inséré au Tome XXIX du *Messenger of Mathematics*.

M. Barnes traite ensuite de la multiplication et de la transformation de la double fonction gamma; il établit de curieuses relations entre certaines intégrales qui correspondent à la formule de Raabe pour la fonction gamma ordinaire et qui peuvent être regardées comme des cas élémentaires d'un théorème général concernant des transcendantes d'ordre supérieur.

Enfin, il donne une expression asymptotique de la double fonction gamma et montre que cette fonction ne peut satisfaire à une équation différentielle dont les coefficients sont des transcendantes plus simples.

M. Barnes se réserve d'ailleurs d'étudier ultérieurement les généralisations que comporte cette théorie. Il existe, en effet, des fonctions analogues comportant un nombre quelconque de paramètres que M. Barnes propose de désigner sous le nom de *fonctions gamma multiples*.

Jeans (*J.-H.*). — La distribution de l'énergie moléculaire. (397-430).

Lasker (*E.*). — Sur les séries à la frontière du domaine de convergence. (431-477).

Le Mémoire de M. Lasker, écrit en allemand, comprend deux Chapitres.

Le premier Chapitre contient d'intéressantes applications à la théorie des fonctions de quelques remarques très simples, dont je résume ci-dessous

quelques-unes en me bornant à des séries

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions continues d'une variable complexe x. L'extension de plusieurs des définitions et théorèmes qui suivent à des fonctions d'un nombre quelconque de variables est d'ailleurs immédiate.

Considérons un point x tel qu'en ce point et pour les points suffisamment rapprochés la série soit absolument et uniformément convergente. M. Lasker dit que le point x est intérieur au domaine de convergence de la série, domaine qui n'est autre chose que l'ensemble des points x précédemment définis.

Soient L un point frontière de ce domaine, et $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ une suite de points tous intérieurs au domaine de convergence. Si l'on désigne par $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ les valeurs de la somme de la série aux points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, on peut se proposer de chercher quelle relation il y a entre $\lim\limits_{n=\infty} f_n$ et la façon dont se comporte la série au point L, de chercher aussi des expressions asymptotiques de $\lim\limits_{n=\infty} f_n$. Si la série est convergente au point frontière L et si, de plus, elle est uniformément convergente en ce point, lorsqu'on la regarde comme dépendant d'une variable qui ne prendrait que les valeurs $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, L$, il est clair qu'on a

$$\lim_{n=\infty} f_n = f_L,$$

en désignant par f_L la somme de la série en L.

Supposons la série divergente en L et qu'il existe un nombre positif non nul c tel qu'on ait

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots| < c(|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots)$$

pour tous les points P_m dont l'indice dépasse un certain nombre fixe M. M. Lasker dit alors que la série satisfait au critérium K et montre aisément qu'on a alors

$$\lim_{n=\infty} f_n = \infty.$$

Considérons les deux séries

$$f = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$\varphi = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

et supposons qu'on sache que la seconde vérifie le criterium K et que le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend uniformément vers une limite non nulle ρ, quand on le regarde comme dépendant de l'indice n et d'une variable x qui ne prend que les valeurs de l'ensemble $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$; il est clair que la première série vérifie aussi le criterium K, et l'on démontre que le rapport $\frac{f}{\varphi}$ tend vers ρ quand x' tend vers L en prenant les valeurs $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$. Cette proposition est susceptible de modifications et d'extensions diverses.

Voici, parmi beaucoup d'autres, une des conclusions qu'en tire M. Lasker.

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n$$

et supposons, en désignant par λ un nombre fixe dont la partie réelle est négative, qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} c_n n^{1-\lambda} = \rho.$$

Soit h le plus petit nombre entier supérieur à la valeur absolue de la partie réelle de λ; on a

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1}(x-1) + \ldots + \frac{f^{(h-1)}(1)}{1.2\ldots h}(x-1)^h + \rho(1-x)^{-\lambda}\psi(x),$$

où

$$\lim_{x=1} \psi(x) = \Gamma(\lambda).$$

Signalons encore, à la fin de ce premier Chapitre, la remarque simple qui suit.

Soient $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ une série numérique convergente à termes positifs et $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ une suite de nombres positifs, tels qu'on ait $a_n \geqq a_{n'}$ pour $n > n'$ et $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$; on démontre très aisément qu'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n}{a_n} = 0$$

et que cette dernière propriété n'a pas lieu si la série des α est divergente. Si les α ne vont jamais en croissant et si l'on pose $a_n = \frac{1}{\alpha_n}$, on en conclut

$$\lim_{n=\infty} n\alpha_n = 0.$$

C'est une proposition due à M. Pringsheim. Si $n\alpha_n$ n'augmente jamais quand n augmente, et si l'on prend $a_n = \frac{1}{n\alpha_n}$, on voit de même qu'on a

$$\lim_{n=\infty} a_n n \log n = 0.$$

Etc.

Au début du second Chapitre, M. Lasker pose le problème général que voici : Supposons que la série convergente $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ définisse une fonction de la variable complexe x et que, à l'intérieur du domaine B, la fonction u_n admette les points singuliers $a_{n,m}$; que l'ensemble de ces points singuliers admette un point d'accumulation a; enfin que, pour ce point a, les fonctions u_i soient régulières et aient la valeur o. A quelles conditions une courbe (C) tracée dans le domaine B et aboutissant au point a doit-elle satisfaire pour que la somme de la série ait pour limite o, lorsqu'on s'approche du point a en suivant la courbe (C)?

On est amené alors à pratiquer dans le domaine B, supposé simplement connexe, une suite de trous $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ dont chacun constitue un domaine simplement connexe qui laisse à son extérieur le point a, mais de façon que tous les points du trou L_n soient infiniment voisins de a quand n est infiniment grand. En supprimant ainsi les trous du domaine B, on parvient à un domaine L qui est dit le *domaine asymptotique du point a*, tandis que l'ensemble des trous constitue le non-domaine asymptotique du même point. La courbe (C), dont il a été question un peu plus haut, doit rester dans le domaine asymptotique.

M. Lasker applique cette conception à des cas particuliers intéressants, en supposant que le point a soit à l'infini. Par exemple, si l'on considère la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{x - a_n},$$

en supposant que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$$

soit convergente et que la condition $n > n'$ entraîne

$$\frac{|a_n|}{n} = \frac{|a_{n'}|}{n'},$$

on peut prendre pour le trou L_n un cercle de centre a_n et dont le rayon r_n satisfasse aux conditions

$$\lim_{n=\infty} r_n = \infty, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{r_n}{a_{n+1} - a_n} = 0.$$

Dans ces conditions, on a

$$\lim_{x=\infty} f(x) = 0,$$

en supposant que le point x reste dans le domaine asymptotique.

M. Lasker montre de même l'existence d'un domaine asymptotique où l'on a encore $\lim_{n=\infty} f(x) = 0$ pour la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{x - a_n},$$

sous la condition que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \left| \frac{c_n}{a_n} \right|$ soit convergente, que l'inégalité $n > n'$ entraîne l'inégalité $a_n \geqq a_{n'}$, qu'on ait enfin $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.

Cette proposition, qui peut d'ailleurs s'étendre dans diverses directions, lui permet d'établir un des théorèmes de M. Hadamard sur la croissance des fonctions entières et divers théorèmes nouveaux de la théorie des fonctions entières ou des fonctions uniformes.

Tome CXCVII, 1901.

Love (*H.*). — L'intégration des équations de propagation des ondes électriques. (1-46).

Le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)$$

a été traité par Poisson, Kirchhoff et Stokes; M. Love reprend le problème à nouveau; la solution à laquelle il parvient est particulièrement adaptée à l'interprétation physique.

Udny Yule (*G.*). — Sur la théorie de la consistance de la classe logique des fréquences et sur sa représentation géométrique.

Pearson (*K.*), avec l'aide de Miss *Alice Lee*, *Agnes Fey*, *Cicely Fawcett* et de M. *E. Warren*. — Contributions mathématiques à la théorie de l'évolution. — IX. Sur les principes de l'Homotyposis et ses relations avec l'hérédité, la variabilité des individus ou de la race. Première Partie : Homotyposis dans le règne végétal. (285-379).

Pearson (*K.*). — Contributions mathématiques à la théorie de l'évolution. — X. Supplément au Mémoire sur la variation oblique. (443-459).

Darwin (*G.-H.*). — L'analyse harmonique ellipsoïdale (461-559).

Les fonctions de Lamé ou harmoniques ellipsoïdales ont un grand intérêt théorique; mais elles se prêtent difficilement au calcul numérique. L'objet essentiel de l'important Mémoire de M. Darwin est de leur substituer des fonctions mieux adaptées au calcul; l'auteur y parvient, grâce à un choix judicieux des variables, mais en abandonnant la forme symétrique que Lamé avait adoptée pour représenter les trois fonctions dont le produit est un harmonique ellipsoïdal solide, forme qui est précieuse pour les recherches purement analytiques.

L'analyse sphéroïdale s'applique avec succès dans le cas d'un ellipsoïde de révolution; les variables qu'on est alors amené à introduire ont une signification géométrique simple; celles qu'introduit M. Darwin dans le cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux sont analogues, mais ne comportent plus une interprétation aussi aisée.

Soient u_1^2, u_2^2, u_3^2 les trois racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+u^2}+\frac{y^2}{b^2+u^2}+\frac{z^2}{c^2+u^2}-1=0,$$

en supposant

$$u_1^2>-a^2>-u_2^2>-b^2>-u_3^2>-c^2;$$

M. Darwin substitue aux coordonnées u_1, u_2, u_3 les coordonnées ν, μ, φ liées aux précédentes par les relations

$$u_1^2=k^2\nu^2,$$
$$u_2^2=k^2\mu^2,$$
$$u_3^2=k^2\frac{1-\beta\cos^2\varphi}{1-\beta}.$$

en sorte que, si l'on prend

$$-k^2\frac{1+\beta}{1-\beta},\quad -k^2,\quad 0$$

pour les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde fondamental de référence, les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde déterminé par la variable υ sont

$$a^2 = k^2\left(\upsilon^2 - \frac{1+\beta}{1-\beta}\right),$$
$$b^2 = k^2(\upsilon^2 - 1),$$
$$c^2 = k^2\upsilon^2,$$

ce qui implique $a < b < c$; pour avoir $a > b > c$, on n'aurait qu'à remplacer k^2 par $-k^2$ et la variable υ^2 par la variable $-\zeta^2$. L'auteur montre qu'on peut s'arranger pour que β soit compris entre 0 et $\frac{1}{3}$; le cas où $\beta = 0$ correspond au cas de l'ellipsoïde de révolution; le cas limite où β est égal à $\frac{1}{3}$ (on a alors $a^2 + b^2 = 2c^2$) mérite d'ailleurs une étude particulière. Puisque β est plus petit que $\frac{1}{3}$, les développements suivant les puissances de β seront avantageux.

Dans ces conditions, l'harmonique solide (solution de l'équation de Laplace) est le produit de trois fonctions U_1, U_2, U_3 qui vérifient chacune une équation différentielle ordinaire.

En désignant par i et s des nombres entiers, par σ une constante, par D_1, D_2, D_3 les opérateurs que définissent les égalités

$$D_1 = (1-\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\upsilon^2 - \frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(\upsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\upsilon},$$
$$D_2 = (1-\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\mu^2 - \frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\mu},$$
$$D_3 = (1-\beta\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\varphi},$$

l'équation différentielle que vérifie U_1 peut s'écrire

$$\left[D_1^2 - i(i+1)[\upsilon^2(1-\beta)-1] - s^2 + \beta\sigma\right]U_1 = 0,$$

et celle que vérifie U_3,

$$[D_3^2 - i(i+1)\beta\cos 2\varphi + s^2 - \beta\sigma]\,U_3 = 0;$$

quant à celle que vérifie U_2, il n'y a qu'à remplacer l'indice 1 par l'indice 2 dans l'équation relative à U_1.

M. Darwin montre comment les fonctions de υ (ou de μ) auxquelles on parvient ainsi s'expriment au moyen des fonctions sphériques ordinaires, comment les fonctions de φ s'expriment linéairement soit au moyen des cosinus, soit au moyen des sinus des multiples de l'arc φ. Il y a d'ailleurs huit cas à distinguer suivant la parité des entiers i et s et suivant que l'on a affaire à des cosinus ou à des sinus. Une Table des diverses fonctions, pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$, termine son Mémoire, où les explications relatives à la façon dont les calculs doivent être effectués sont données avec détail. La détermination de la constante dépend d'une équation algébrique, qui peut être résolue explicitement pour les harmoniques dont le degré est inférieur à 4.

L'auteur applique sa méthode à la détermination du potentiel d'une déformation harmonique d'un ellipsoïde solide, et du potentiel d'un ellipsoïde solide.

Il insiste à plusieurs reprises sur les grands services que M. E.-W. Hobson lui a rendus dans le cours de ses recherches.

Tome CXCVIII (A); 1902.

Filon (*L.-N.-G.*). — Sur l'équilibre élastique des cylindres circulaires sous certains systèmes pratiques de charges. (147-233).

Les conditions sous lesquelles on traite soit de l'extension et de la compression, soit de la torsion d'une barre élastique, sont rarement réalisées dans la pratique, en particulier dans les machines à essayer. L'auteur s'attache au contraire à l'étude théorique de divers cas intéressant la pratique.

Pearson (*K*). — Sur la théorie mathématique des erreurs de jugement, avec une application spéciale à l'équation personnelle. (235-299).

Darwin (*G.-H.*). — Sur la figure pyriforme d'équilibre d'une masse liquide animée d'un mouvement de rotation. (301-331).

Ce Mémoire est une application de la méthode donnée par l'auteur dans son Mémoire sur les fonctions ellipsoïdales harmoniques. L'auteur donne d'abord les expressions rigoureuses de ces fonctions pour les trois premiers degrés et les harmoniques solides correspondants exprimés au moyen des coordonnées rectangulaires x, y, z. Les fonctions harmoniques de seconde espèce (fonctions Q) sont exprimées au moyen d'intégrales elliptiques.

Les équations des ellipsoïdes de Jacobi sont obtenues en exprimant que l'énergie doit être stationnaire et la valeur superficielle est exprimée au moyen des fonctions P et Q. M. Darwin détermine le terme additionnel de l'énergie quand la masse fluide est soumise à une déformation ellipsoïdale harmonique. Sur ce point, l'auteur reprend, sous une forme et avec des notations nouvelles, les recherches de M. Poincaré dans son Mémoire sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation (*Acta mathematica*, t. VII). Il développe les propriétés des *coefficients de stabilité* de M. Poincaré : l'évanouissement de ces coefficients montre que l'ellipsoïde de Jacobi correspondant appartient à la fois à deux séries de figures d'équilibre. Cet ellipsoïde critique peut bifurquer suivant deux figures définies par des harmoniques zonales. La première bifurcation se présente avec la troisième harmonique zonale. M. Darwin a fait les calculs numériques pour le cas où le coefficient de stabilité correspondant à la troisième harmonique zonale est nulle : il trouve que les axes de l'ellipsoïde critique sont proportionnels aux nombres 0,65066, 0,81498, 1,88583 et que le carré de la vitesse angulaire est donné par la formule $\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = 0{,}14200$. Il étudie enfin la figure pyriforme, en détermine approximativement les éléments et la dessine. Les recherches de M. Darwin et celles de M. Poincaré, exposées dans le Mémoire suivant, ont été le sujet d'une correspondance active entre les deux savants.

Poincaré (*H.*). — Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation. (333-373).

La *poire* ou figure pyriforme du précédent Mémoire est une forme d'équilibre pour une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Mais s'agit-il d'une figure stable?

Soient ω la vitesse angulaire de rotation et J le moment d'inertie.

Considérons la série des ellipsoïdes de Jacobi et, d'autre part, la série des poires. Il y aura un ellipsoïde critique appartenant à l'une et à l'autre des deux séries, à partir duquel il peut y avoir bifurcation. D'ailleurs à chaque poire correspond une autre poire, symétrique de la première par rapport au plan de l'équateur des ellipsoïdes.

Si l'on suit la série des ellipsoïdes de Jacobi en allant du moins allongé au plus allongé, ω va en décroissant, ωJ est croissant.

Si l'on suit la série des poires, ω atteindra soit un minimum, soit un maximum quand on passera par l'ellipsoïde critique. De même pour ωJ. La condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire, c'est que ωJ soit minimum, c'est-à-dire plus petit pour l'ellipsoïde de Jacobi critique que pour les autres poires.

« Si ωJ est minimum, on aura pour une valeur donnée de ωJ

» inférieure au minimum, 1 jacobien *stable*,

» supérieure au minimum, 1 jacobien instable, 2 figures pyriformes, *stables* et symétriques l'une de l'autre.

» Si ωJ est maximum, on aura pour une valeur donnée de ωJ

» inférieure au maximum, 1 jacobien *stable* et deux figures pyriformes, *instables* et symétriques l'une de l'autre.

» La question est donc de savoir si ωJ est maximum ou minimum; mais elle ne peut être résolue que par un calcul compliqué. Supposons qu'une masse fluide homogène en rotation se refroidisse lentement, elle prendra successivement (dans la première hypothèse ωJ minimum) la forme d'un ellipsoïde de révolution de plus en plus aplati, puis celle d'un ellipsoïde de Jacobi, puis celle d'une poire.

» Si, au contraire, on venait à reconnaître que ωJ est maximum et non minimum, on devrait conclure que cette masse, après avoir pris la forme de divers ellipsoïdes de révolution, puis de divers ellipsoïdes de Jacobi, et avoir atteint finalement celle de jacobien critique, subira tout à coup une déformation énorme et une série d'oscillations, par une sorte de catastrophe subite.

» Diverses raisons contribuent à rendre la première hypothèse beaucoup vraisemblable; néanmoins jusqu'ici la preuve n'est pas faite, et je déclare tout de suite que je ne l'apporte pas dans le présent travail.

» Mais, quelle que soit l'hypothèse qui doive triompher un jour, je tiens à mettre tout de suite en garde contre les conséquences cosmogoniques qu'on pourrait en tirer. Les masses de la nature ne sont pas homogènes, et, si l'on reconnaissait que les figures pyriformes sont instables, il pourrait néanmoins arriver qu'une masse hétérogène fût susceptible de prendre une forme d'équilibre analogue aux figures pyriformes, et qui serait stable. Le contraire pourrait d'ailleurs arriver également.

» A la suite d'une correspondance que j'ai eue avec M. Darwin, nous nous sommes mis l'un et l'autre à étudier la question et, pendant qu'il écrivait deux Mémoires sur ce sujet et que dans l'un de ces Mémoires il déterminait les

axes du jacobien critique, j'obtenais les résultats du présent travail. J'ai formé l'inégalité qui doit être satisfaite pour qu'il y ait stabilité, mais je ne l'ai pas traduite en chiffres, parce que je me défie de mon habileté arithmétique et que je ne suis pas un calculateur assez sûr. »

J. T.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome CXLIV, 1907 (1).

Schœnflies (*A.*). — Sur un théorème de Heine et un théorème de Borel. (22-23).

A 0430

Lecornu (*L.*). — Sur les turbines à axe flexible. (23-25).

B 1640

Hurwitz (*A.*). — Sur les points critiques des fonctions inverses. (63-65).

A 3610 3620

Rémoundos (*G.*). — Sur les points critiques d'une classe de fonctions. (65-67).

A 3610 3620

Boggio (*T.*). — Sur les potentiels d'un volume attirant dont la densité satisfait à l'équation de Laplace. (67-70).

A 5600 B 1220

Merczyng (*G.*). — Sur le mouvement des liquides à grande vitesse par conduites très larges. (70-72).

B 2810

Seux (*E.*). — Sur l'importance de l'épaisseur du bord antérieur de l'aile de l'oiseau dans le vol à voile. Son application aux aéroplanes. (73-74).

B 2840

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXI, p. 117.

Jacob (*A.*). — Sur la résistance et l'équilibre élastique des tubes frettés. (121-123).

B 3240

Fréchet (*M.*). — Sur l'approximation des fractions par des suites trigonométriques limitées. (124-125).

A 3210 5610

Vlahavas (*J.*). — Sur les hélices de propulsion. (125-128).

B 2840

Ferrer (*F.*). — Sur les hélices propulsives (128-130).

B 2840

Duhem (*P.*). — Sur la propagation des quasi-ondes de choc. (179-181).

B 2460 3220

Waelsch. — Sur les fonctions sphériques et leurs multipèdes. (186-189).

A 4420 5620

Ocagne (*M. d'*). — Sur la représentation par points alignés de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale. (190-192).

A 0090

Kœnigs (*G.*). — Sur la courbure des courbes enveloppes dans le mouvement le plus général d'un corps solide dans l'espace. (192-194).

A 8420 8440

Zoard de Geöcze. — Quadrature des surfaces courbes. (253-256).

A 8460

Tsoucalas (*P.*) et *Vlahavas* (*J.*). — Étude comparative des hélicoptères et des aéroplanes. (257-259).

B 2840

Lebesgue (*H.*). — Sur le problème de Dirichlet. (316-318).

A 5660

Baire (*R.*). — Sur la non-applicabilité de deux continus à n et $n+p$ dimensions. (318-321).

A 0430 3210

Blum (*G.*). — Appareil simple reproduisant toutes les particularités de l'expérience de Foucault sur la rotation de la Terre. (364-366).

B 1640

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions quasi-entières et quasi-méromorphes. (366-367).

A 3610

Boutroux (*P.*). — Sur la croissance des intégrales des équations différentielles du premier ordre. (368-371).

A 4870

Kœnigs (*G.*). — Construction du rayon de courbure des courbes enveloppes dans le mouvement le plus général d'un corps solide. (371-373).

A 8420 8440

Remy (*L.*). — Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre 3. (412-414).

A 7650 8060

Jouguet. — Remarque sur les ondes de choc. Application à l'onde explosive. (415-417).

B 2460 3220

Crussard. — Sur quelques propriétés de l'onde explosive. (417-420).

B 2460 3220

Niels Nielsen. — Sur les formules d'addition des fonctions sphériques. (477-479).

A 4420 5620

Kœnigs (*G.*). — Sur les déformations élastiques qui laissent invariables les longueurs d'une triple infinité de lignes droites. (537-560).

A 8420

Crussard et *Jouguet*. — Sur les ondes de choc et combustion. Stabilité de l'onde explosive. (560-563).

B 2460 3220

Riesz (*F.*). — Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. (615-619).

A 5620 4470

Lalesco (*T.*). — Sur les solutions périodiques des équations différentielles linéaires. (619-622).

A 4460 4850

Lebesgue (*H.*). — Sur le problème de Dirichlet. (622-623).

A 5660

Remy (*L.*). — Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre 3. (623-625).

A 8060 7650

Barré (*G.*). — Sur les hélices considérées comme génératrices d'une surface. (625-628).

A 8450

Hilleret (*G.*). — Sur la méthode des isopérimètres. (628-630).

A 3220 6810

Etève (*A.*). — Sur les aéroplanes. (630-632).

B 2840

Jouguet. — Sur les ondes de choc et de combustion sphériques. (632-633).

B 2460 3220

Boussinesq (*J.*). — Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir vertical en mince paroi, sans contraction latérale et à nappe libre. (668-671).

B 2810

Lecornu (*L.*). — Sur une généralisation du mouvement de Poinsot. (678-680).

B 1620

Ferrer (*F.*). — Sur le coefficient de la résistance de l'air à adopter dans un projet d'aéroplane. (680-682).

B 2840

Boussinesq (*J.*). — Calcul de la contraction intérieure de la nappe sur un déversoir en mince paroi et de hauteur modérée, à nappe libre, armé à sa partie supérieure d'une plaque horizontale rejetant vers l'amont les filets fluides inférieurs. (705-709).

B 2810

Buhl (*A.*). — Sur une extension de la méthode de sommation de M. Borel. (710-712).

A 3610

Barré (*G.*). — Sur la surface engendrée par une hélice circulaire. (727-730).

A 8450

Stekloff (*W.*). — Sur un problème d'Analyse intimement lié avec le problème du refroidissement d'une barre hétérogène. (730-733).

A 5620 C 2050

Riesz (*F.*). — Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm. (734-736).

A 4170 5620

Krebs. — Appareil pour la mesure de l'écoulement des liquides. (747-749).

B 2800

Gambier (*B.*). — Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale est à points critiques fixes. (827-830).

A 4870

Popovici. — Sur les équations aux intégrales réciproques (830-832).

A 4830

Humbert (*G.*). — Sur les représentations d'un entier par une somme de dix ou douze carrés. (874-878).

A 2840 4040

Goldziher (*C.*). — Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. (887-889).

A 4840 3280

Krygowski (*Z.*). — Sur le développement des fonctions hyperelliptiques en séries trigonométriques. (889-892).

A 4070 5610

Barré (*E.*). — Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire. (892-895).

A 8420 8450

Ocagne (*M. d'*). — Sur la représentation de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale par un nomogramme conique. (895-898).

A 0090

Jacob. — Intégromètre à lame coupante. (898-900).

A 0080 4820

Brunhes (*B.*). — Action d'un courant aérien horizontal sur un tourbillon vertical (900-902).

B 2840

Gambier (*B.*). — Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. (962-964).

A 4870

Michel (*Ch.*). — Sur certaines congruences de droites. (965-966).

A 8455

Crémieu (*V.*). — Dispositif auto-amortisseur du roulis des navires. (966-969).

B 2850

Picard (*E.*). — Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles. (1010-1012).

A 4840 4470

Maillet (*E.*). — Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants. (1020-1022).

A 2815 2920

Fischer (*E.*). — Sur la convergence moyenne. (1022-1024).

A 3220 5620

Bernstein (*S.*). — Méthode générale pour la résolution du problème de Dirichlet. (1025-1027).

A 5660

Ocagne (*M. d'*). — Sur la représentation des équations d'ordre nomographique 4 à trois et quatre variables. (1027-1030).

A 0090

Canovetti. — Sur la résistance de l'air au mouvement des corps. (1030).

B 2860

Dautriche. — Vitesse de détonation des explosifs. (1030-1032).

B 0160

Benoît (*R.*), *Fabry* (*Ch.*), *Perot* (*A.*). — Nouvelle détermination du mètre en longueurs d'onde. (1082-1086).

B 0120

Hadamard (*J.*). — Sur la variation des intégrales doubles. (1092-1094).

A 3280

Cartan (*E.*). — Les groupes de transformation continus. (1094-1097).

A 1230

Barré. — Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire. (1097-1099).

A 8480 8450

Fischer (*E.*). — Application d'un théorème sur la convergence en moyenne. (1148-1151).

A 3220 5620 0430

Brillouin (*M.*). — Sur la viscosité des fluides. (1151-1153).

B 3650

Carathéodory (*C.*). — Sur quelques applications du théorème de Landau-Picard. (1203-1206).

A 3610 4410 8840

Goursat (*E.*). — Sur les invariants intégraux. (1206-1209).

A 5240

Tzitzéica (*G.*). — Sur une nouvelle classe de surfaces. (1257-1259).

A 8830

Stekloff (*W.*). — Sur une méthode nouvelle pour résoudre plusieurs problèmes du développement d'une fonction arbitraire en séries infinies. (1329-1332).

A 3220 5620

Barré. — Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire. (1332-1334).

A 8480 8450

Filloux (*L.*). — Sur l'intégration mécanique de l'hodographe. (1334-1336).

A 0080 B 0160

Riesz (*F.*). — Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables. (1409-1411).

A 5620 0430 3190

Korn (*A.*). — Sur l'équation fonctionnelle de M. Fredholm. (1411-1414).

A 4470

Fréchet (*M.*). — Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires. (1414-1416).

A 5610 5620 0430

Tome CXLV.

Humbert (*G.*). — Quelques formules relatives au nombre de classes des formes quadratiques. (5-10).

A 2830 2890 4050

Boussinesq (*J.*). — Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir vertical en mince paroi, sans contraction latérale et à nappe noyée en dessous. (10-14).

B 2800 2810

Fabry (*E.*). — Courbes algébriques à torsion constante. (47-49).

A 7660 8440

Boutroux (*P.*). — Sur les intégrales de l'équation différentielle $y' + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0$. (50-52).

A 4870

Boussinesq (*J.*). — Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir avec armature (ou analogue à l'ajutage rentrant de Borda) et à nappe noyée en dessous. (101-103).

B 2800 2810

Denjoy (*A.*). — Sur les fonctions entières de genre fini. (106-108).

A 3610

Barré. — Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire. (161-163).

A 8480 8450

Carathéodory (*C.*) et *Fejér* (*L.*). — Remarques sur le théorème de M. Jensen. (163-165).

A 3610

Korn (*A.*). — Sur un problème fondamental dans la théorie de l'élasticité. (165-168).

A 5655 5660 B 3200

Séguier (*de*). — Sur les représentations linéaires homogènes des groupes finis. (303-305).

A 1210

Chazy. — Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes. (305-308).

A 4880

Garnier (*R.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale est uniforme. (308-311).

A 4880

Massau (*J.*). — Sur la représentation des équations entières de degré quelconque. (311-314).

A 2400 0840

Rémoundos (*G.*). — Sur les courbes intégrales des équations différentielles. (386-387).

A 4870

Claude (*G.*). — Sur des accidents constatés pendant la manipulation de l'oxygène comprimé. (387-389).

B 0090

Levi-Civita (*T.*). — Sur le mouvement de l'électricité sans liaisons ni forces extérieures. (417-422).

C 4040

Fejér (*L.*). — Sur la racine de moindre module d'une équation algébrique. (459-461).

A 2420

Jouguet. — Sur les fluides physiquement semblables. (475-477).

B 2020 2400

Jouguet. — Sur la résistance de l'air. (500-502).

B 2020 2840

Breguet (*L.*), *Breguet* (*J.*), *Richet* (*C.*). — D'un nouvel appareil d'aviation dénommé *gyroplane*. (523-524).

B 2840

Riesz (*M.*). — Sur les séries trigonométriques. (583-586).

A 5610 0430

Buhl (*A.*). — Sur la sommabilité des séries de Laurent. (614-617).

A 3600 3610

Delassus (*E.*). — Sur les invariants des systèmes différentiels. (617-619).

A 5240

Boggio (*T.*). — Un théorème sur les équations intégrales. (619-622).

A 4470

Humbert (*G.*). — Quelques formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques, binaires et positives. (654-658).

A 2830

Goursat (*E.*). — Sur les équations intégrales. (667-670).

A 4470

Boutroux (*P.*). — Sur les intégrales de l'équation

$$y' + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0.$$

(670-673).

A 4870

Boutroux (*P.*). — Sur les points critiques transcendants et sur les fonctions inverses des fonctions entières. (708-710).

A 3600 3610

Bagnera (*G.*) et *de Franchis*. — Sur les surfaces hyperelliptiques. (747-749).

A 8060 1230

Popovici. (*C.*) — Sur les fonctions adjointes de M. Buhl. (747-752).

A 5210

Goursat (*E.*). — Sur quelques propriétés des équations intégrales. (752-754).

A 4420

Maillet (*E.*). — Sur les fractions continues algébriques. (788-789).

A 3610 3630

Myller (*A.*). — Sur les solutions périodiques de l'équation $\Delta u + \lambda\alpha(x, y, z)\, u = 0$. (790-792).

A 4070

Lalesco (*T.*). — Sur l'ordre de la fonction entière $D(\lambda)$ de Fredholm (906-907).

A 4470 3610

Heywood (*B.*). — Sur quelques points de la théorie des fonctions fondamentales relatives à certaines équations intégrales. (908-910).

A 4470

Montel (*P.*). — Sur les points singuliers des séries convergentes de fonctions analytiques. (910-913).

A 3630

Dulac (*H.*). — Sur quelques propriétés des intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle. (913-915).

A 4870

Humbert (*G.*). — Rapport sur le prix Bordin. (981-983).

A 8050 4060

Painlevé (*P.*). — Rapport sur le prix Vaillant. (983-986).

A 5660 3280

Picard (*E.*). — Rapport sur le prix Vaillant. (986-988).

A 5660

Poincaré (*H.*). — Rapport sur le prix Vaillant. (988-991).

A 5660

Lévy (*M.*). — Rapport sur le prix Montyon. (991).

B 3620 1640

Darboux (*G.*). — Rapport sur le prix Binoux. (1056).

A 6010

Darboux (*G.*). — Rapport sur le prix Saintour. (1059).

A 1210

Darboux (*G.*). — Rapport sur le prix Petit d'Ormoy. (1059).

A 5630 B 2020

Académie des Sciences. — Prix Bordin (pour 1909). (1068).

A 8060

Académie des Sciences. — Grand prix des Sciences mathématiques pour 1910. (1069).

A 3640

Académie des Sciences. — Prix Fourneyron pour 1910. (1071).

B 3260

Tzitzéica. — Sur certaines surfaces réglées. (1132-1133).

A 8830

Buhl (*A.*). — Sur la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles. (1134-1137).

A 4800 5230

Lalesco (*T.*). — Sur la fonction D(λ) de Fredholm. (1136-1137).

A 4470

Riquier. — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles auxquelles conduisent : 1° l'étude des déformations finies d'un milieu continu dans l'espace à n dimensions; 2° la détermination des systèmes de coordonnées curvilignes à n variables. (1137-1139).

A 4830

Cosserat (*E.*) et *Cosserat* (*F.*). — Sur la Mécanique générale. (1139-1142).

A 5240 B 2000

Bertin. — Rapport sur un Mémoire intitulé : « Étude sur les mouvements d'eau qui peuvent se produire au contact et au voisinage d'une paroi plane verticale », par MM. Fortant et Le Besnerais. (1249-1252).

B 2480 2850

Jacob (Colonel). — Fonctionnement de l'appareil qui permet l'intégration numérique de l'équation de Riccati. (1254).

A 0080

Egorov (*D.*). — Sur la transformation de Laplace et les systèmes conjugués persistants. (1256-1259).

A 8830

Séguier (*de*). — Sur la théorie des matrices. (1259-1260).

A 0850

Saltikow (*N.*). — Sur les transformations infinitésimales et les fonctions adjointes. (1260-1262).

A 5230

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes. (1263-1266).

A 4840

Waelsch (*E.*). — Sur les invariants différentiels vectoriels et la théorie des formes binaires. (1396-1399).

A 5240 4420 0840

Maillet (*E.*). — Sur la décomposition d'un nombre en une somme de puissances huitièmes d'entiers. (1399-1400).

A 2860

Holmgren (*E.*). — Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$. Note. (1401-1403).

A 5650 5660

Cartan (*E.*). — Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbe (1403-1406).

A 8460

Boutroux (*P.*). — Sur les fonctions inverses des fonctions entières. (1406-1489).

A 3610 3620

Cosserat (*Eugène* et *François*). — Sur la statique de la ligne déformable. (1409-1412).

B 1280 2000

J. T.

MEMORIE DELLA SOCIETA ITALIANA DELLE SCIENZE, fondata da Anton-Mario Lorgna, ora residente in Modena (1). 2e série, in-4°.

Tome I; 1862.
Modena, R. tip. governativa.

Bianchi (*G.*). — [I 1, 2]. Propriétés et relations des nombres entiers et composés, avec les chiffres simples ou les éléments dont ils se composent. Mémoire I (1-36).

Bianchi (*G.*). — [I 1, 2]. Appendice [au Mémoire précédent] (207-218).

Mainardi (*G.*). — [C 2 ref. J 3]. Sur les conditions d'intégrabilité des fonctions. (79-90).

Conditions pour qu'il soit

$$f_1[x, y, y', \ldots, y^{(r+p)}] = D_x^{(p)} f[x, y, y', \ldots, y^{(r)}].$$

Tortolini (*B.*). — [F 6 *b*]. Sur la division des arcs d'une courbe du quatrième ordre, représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

(91-104).

Bellavitis (*G.*). — [B 12 *d*]. Le calcul des quaternions de W.-R. Hamilton, et sa relation avec la méthode des équipollences. (126-186).

Tome II; 1866.
Modena, tip. dell' erede Soliani.

Marianini (*P.-D.*). — [K]. Soixante-quinze porismes tirés presque tous de l'Ouvrage de Chasles intitulé : *Les trois Livres des porismes d'Euclide,* etc. et démontrés la plupart avec une méthode qui, à la suite de certaines considérations, semble avoir été probablement employée par Euclide. (1-131, 8 planches).

---

(1) C'est la Société des XL. La première série comprend 25 Tomes et commence en 1783.

Tardy (*P.*). — [C 2 *j*]. Sur les quadratures. (133-172, une page d'errata).

Bianchi (*G.*). — [U]. La valeur de la latitude de Modène confirmée et défendue. (175-190).

44° 38′ 52″,75.

Troisième série; Tome I, première Partie.
Firenze, Stamperia reale, 1867.

Secchi (*A.*). — [U]. Sur les spectres prismatiques des étoiles fixes. (67-152, 3 planches).

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Notes et considérations sur la théorie astronomique des étoiles filantes. (153-384, 4 planches).

Turazza (*D.*). — [R 8]. Recherches sur les axes de rotation et sur le mouvement des systèmes rigides. (285-311).

Tome I, seconde Partie.
Firenze, Stamperia reale, 1868.

Dini (*U.*). — [O 5]. Sur quelques points de la théorie des surfaces. (17-92).

Représentation d'une surface par une autre en général. Application à la représentation sphérique, et déduction de la théorie de la courbure. Démonstration des formules

$$(1)\quad \begin{cases} (r_1 - r_2)\dfrac{d\log\sqrt{E'}}{dv} - \dfrac{dr_2}{dv} = 0 \\[2ex] (r_1 - r_2)\dfrac{d\log\sqrt{G'}}{du} + \dfrac{dr_1}{du} = 0. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{d\log\sqrt{E}}{dv} - \dfrac{d\dfrac{1}{r_2}}{dv} = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{d\log\sqrt{G}}{du} + \dfrac{d\dfrac{1}{r_1}}{du} = 0; \end{cases}$$

l'auteur en déduit des théorèmes concernant des surfaces dont les rayons de courbure d'un système sont constants sur les courbes de l'autre système, et aussi

la relation

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}{du\,dv}+\frac{d\frac{1}{r_2}}{du}\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}=0,$$

qui caractérise les surfaces dont les lignes de courbure forment un double système isotherme, et qui est toujours satisfaite par les surfaces à courbure moyenne constante. Par l'échange de $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ en r_1, r_2 (et de E, G en E', G') on a l'équation

$$(r_1-r_2)\frac{d^2(r_1+r_2)}{du\,dv}+\frac{dr_2}{du}\frac{dr_2}{dv}-\frac{dr_1}{du}\frac{dr_1}{dv}=0,$$

pour les surfaces chez lesquelles les représentations sphériques des lignes de courbure sont isothermes, et à cette équation satisfont toujours les surfaces minima, et aussi les surfaces dont les lignes de courbure sont planes.

Ensuite l'auteur déduit des (1) le théorème de Weingarten : *Si deux systèmes de lignes orthogonales u, v de la sphère sont tels qu'on ait*

$$ds'^2=\frac{du^2}{k^2}+\frac{dv^2}{\theta'(k)^2},$$

ils correspondent aux lignes de courbure d'une surface, sur laquelle les rayons de courbure sont

$$r_2=\theta(k)$$
$$r_1=\theta(k)-k\theta'(k),$$

et le théorème réciproque; puis il ajoute le théorème suivant, en le déduisant des (2) :

Si dans une surface l'un des rayons de courbure est une fonction de l'autre, on peut prendre les paramètres u, v des lignes de courbure de manière que, en les prenant pour lignes coordonnées, l'élément linéaire soit

$$ds^2=\frac{du^2}{h^2}+\frac{dv^2}{\theta'(h)^2},$$

étant

$$\frac{1}{r_2}=\theta(h),$$

$$\frac{1}{r_1}=\theta(h)-h\theta'(h),$$

et la relation entre r_1, r_2 étant celle que l'on obtient d'ici par l'élimination de h.

Suit un théorème général relatif aux surfaces sur lesquelles il y a deux systèmes de lignes orthogonales ayant constantes les courbures géodésiques; l'auteur en déduit la forme de l'élément linéaire de la sphère lorsqu'on prend pour lignes coordonnées deux systèmes de cercles orthogonaux. On en obtient comme conséquence le théorème de Lagrange que, *en représentant une surface de révolution sur une sphère ou sur un plan, de manière que les angles soient conservés, si les lignes correspondant aux méridiens sont des cercles, celles qui correspondent aux parallèles le sont aussi; et que, dans les surfaces minima, si les lignes de courbure d'un système sont planes, celles de l'autre le*

sont aussi. Par l'application des théorèmes précédents et de celui de Weingarten on trouve des classes de surfaces dont l'un des rayons de courbure est une fonction de l'autre, et dont les lignes de courbure sont planes. Ce sont

1° Les surfaces de révolution,

2° Les surfaces moulures dont la directrice est plane,

3° Les surfaces minima à lignes de courbure planes,

4° Les surfaces à lignes de courbure planes, dont les rayons de courbure sont liés par la relation qu'on obtient en éliminant k entre les deux relations

$$r_2 = \gamma k + \gamma\gamma' \log(k - \gamma') + \gamma'',$$

$$r_1 = r_2 - \frac{\gamma k^2}{k - \gamma'},$$

où γ, γ' γ'' sont des constantes.

Après cela l'auteur cherche les équations en termes finis des surfaces ayant les lignes de courbure planes et trouve les coordonnées des points de la surface exprimées par les paramètres des lignes de courbure et avec deux fonctions arbitraires, chacune d'une seule variable, de manière que la détermination de ces fonctions ne dépend que de quadratures. Comme application il trouve que les surfaces non de révolution à lignes de courbure planes et isothermes sont : les surfaces cycliques de Dupin, les surfaces minima à lignes de courbure planes et deux autres classes de surfaces dont il donne les équations en termes finis. Puis il démontre que les surfaces à lignes de courbure circulaires sont les seules dont les rayons de courbure sont constants sur les lignes correspondantes, et enfin il fait la démonstration de la formule de Bonnet relative aux rayons de courbure des asymptotiques, sur les surfaces à courbures opposées.

Secchi (*A.*). — [U]. Sur la grande nébuleuse de θ′ Orion. (99-134, une planche).

Betti (*E.*). — [T 4 *c*]. Sur la détermination des températures dans les corps solides et homogènes. (165-190).

Les températures étant connues, à un temps donné, en tout point du corps, et en certains points de la surface pour tout le temps qu'on prend à considérer, tandis que d'autres parties sont exposées à l'air libre, dont on connaît la température, la détermination des températures se réduit à l'intégration de l'équation

$$\frac{dv}{dt} - k\,\Delta^2 v = 0,$$

avec des conditions données aux limites. L'auteur prouve qu'il y a toujours une fonction, et une seule, du temps et des points du corps, satisfaisant aux conditions imposées. Pour l'intégration il suit la méthode de la fonction multiplicatrice, qu'on emploie aussi dans d'autres parties de la Physique mathématique, et qui est propre à mettre en évidence qu'à tout phénomène de propagation continue en correspond un autre identique dû à une action à distance. Ensuite il détermine les températures stationnaires d'une sphère ayant en un point α' une source constante de chaleur, et dont la surface est maintenue à zéro; la température cherchée est égale à la fonction potentielle de α' et du point réciproque de α' par rapport à la sphère, en supposant qu'on ait

en ces deux points deux forces, l'une d'attraction et l'autre de répulsion, agissant suivant la loi newtonienne, et dont les intensités soient dans le rapport de r' à R, étant R le rayon de la sphère et r' la distance de x' au centre; le flux permanent de la chaleur en tout point de la sphère est égal en intensité et direction à l'action que ces forces exerceraient sur ce point. Même recherche pour le cas d'une demi-sphère, dont la partie plane est maintenue à des températures données et la partie sphérique à l'air libre.

En supposant les températures variables, l'auteur traite le cas d'un parallélépipède rectangle et celui d'une sphère ou d'une couche comprise entre deux sphères concentriques, en supposant que la surface soit maintenue à des températures données quelconques. La fonction dont dépendent les températures dans le corps est exprimée par les fonctions jacobiennes. De la même fonction multiplicatrice dépend la détermination des températures dans le cas d'une sphère très grande (cas des corps célestes) même lorsqu'on tient compte des variations (avec le temps) de la température de l'espace traversé par le corps; l'auteur donne les températures des différentes couches du corps, exprimées par deux intégrales définies, l'une simple et l'autre double, où entrent les fonctions jacobiennes. De la formule convenant à un temps très grand, compté depuis le commencement du refroidissement, il déduit, par une transformation du premier ordre des fonctions jacobiennes, une autre formule qui convient aux temps rapprochés de ce commencement.

Tome II.

Firenze, Stamperia reale, 1869-1876.

Dini (*U.*). — [O 5]. Recherches sur la théorie des surfaces. (1-71) [publiée en 1869].

L'auteur fait encore des applications des formules données dans le Mémoire précédent (*Sur quelques points de la théorie des surfaces;* t. I, 2° partie, 1868, p. 17) :

$$(1)\quad \begin{cases} (r_1 - r_2)\dfrac{d\log\sqrt{E'}}{dv} + \dfrac{dr_2}{dv} = 0, \\[2ex] (r_1 - r_2)\dfrac{d\log\sqrt{G'}}{du} + \dfrac{dr_1}{du} = 0. \end{cases}$$

Si l'on a sur la sphère les lignes orthogonales u et v, pour lesquelles

$$ds'^2 = E'\,du^2 + G'\,dv^2,$$

et r_1, r_2 satisfont aux (1), et si X, Y, Z sont les coordonnées des points de la sphère, exprimées par u, v, il y a une seule surface dont les cosinus de la normale sont Y, Y, Z, les rayons de courbure r_1, r_2, et les lignes de courbure sont les u, v correspondant aux u, v sphériques. Les équations de cette surface s'obtiennent par des quadratures

$$x = \int_{u,v}\left(r_2\frac{dX}{du}\,du + r_1\frac{dX}{dv}\,dv\right) + C_1, \quad \ldots$$

Le problème : *étant donné un système de valeurs*

$$r_1 = \varphi(u, v),$$
$$r_2 = \psi(u, v),$$

trouver les surfaces correspondantes, en supposant que les u, v soient leurs lignes de courbure, n'est pas possible en général, et l'auteur indique le moyen de le résoudre lorsque la condition de possibilité est satisfaite. Par ces observations l'auteur est amené à donner une propriété relative aux surfaces à lignes de courbure planes, et en particulier aux surfaces minima à lignes de courbure planes et n'étant pas de révolution. Ces dernières forment une classe complète de surfaces dont les points se correspondent de manière que les lignes de courbure sont correspondantes et les rayons de courbure aux points correspondants sont égaux.

Suit un théorème sur les développées par rapport aux lignes de courbure v des surfaces dont les rayons de courbure satisfont, sur les v, à une relation donnée $r_1 = \varphi(r_2, v)$. Sur ces développées, les lignes $r_2 = \text{const.}$ ont même courbure géodésique aux points qui correspondent aux mêmes valeurs de r_2 et de v; et en ces points les surfaces développées ont même courbure. Ces surfaces développées se distribuent en classes complètes de surfaces applicables les unes sur les autres, ce qui permet de faire dépendre les problèmes sur les surfaces applicables de ceux sur les développées, et réciproquement; une application en est la recherche des surfaces gauches dont les génératrices peuvent se réduire, par une déformation des surfaces, à des lignes planes ou à des hélices cylindriques; l'auteur trouve que cela n'a lieu que pour les surfaces gauches applicables sur une surface gauche minima; et l'on a le premier cas (lignes planes) lorsqu'elles deviennent de révolution, les génératrices devenant les méridiens; le second (hélices cylindriques) lorsqu'elles se transforment en certaines surfaces dont l'auteur donne les équations en termes finis et qui sont un nouveau système de surfaces applicables sur la surface gauche minima. Dans ce but l'auteur trouve les coordonnées $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ des points et l'élément linéaire de la sphère, en supposant les u, v orthogonales, et que les v soient un système de cercles (non de grands cercles) dont le rayon r est fonction de v. Les surfaces du système mentionné sont les développées de deux classes de surfaces dont la première est donnée par

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \int \left(r_2 \dfrac{\partial X}{\partial u} du + r_2 \dfrac{\partial X}{\partial v} dv \right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

étant

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = \sqrt{1 - r^2} \cos v + r \sin v \operatorname{tang} h \left(u + \dfrac{\sqrt{1 - r^2}}{r} v \right), \\ Y = \sqrt{1 - r^2} \sin v - r \cos v \operatorname{tang} h \left(u + \dfrac{\sqrt{1 - r^2}}{r} v \right), \\ Z = \dfrac{r}{\cos h \left(u + \dfrac{\sqrt{1 - r^2}}{r} v \right)}, \end{array} \right.$$

$$r_1 = \alpha + \frac{\beta}{\sin h \left(u + \dfrac{\sqrt{1 - r^2}}{r} v \right)}.$$

et

$$r_2 = \alpha - \beta \sin h \left(u + \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r} v \right),$$

où α et β sont des fonctions de c. La seconde classe est donnée aussi par les (1), où

$$(B) \quad \begin{cases} X = \sqrt{1 - r^2} \sin \varphi + r \cos \varphi \operatorname{tang} h (u - R), \\ Y = \sqrt{1 - r^2} \cos \varphi - r \sin \varphi \operatorname{tang} h (u - R), \\ Z = \dfrac{r}{\cos h (u - R)}, \end{cases}$$

$$r_1 = \alpha - \beta \frac{\sqrt{1 - G'}}{\sqrt{G'}},$$

$$r_2 = \alpha - \beta \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{1 - G'}},$$

$$\sqrt{G'} = \frac{r'}{\lambda} + cr^2 \sin h (u - R),$$

$$\left(\frac{r'}{\lambda}\right)^2 = c^2 r^4 + pr^2 + 1 \qquad (c \text{ et } p \text{ const.}),$$

$$\varphi = -c \int r^2 dv + c_1, \qquad R = c \int \frac{r\, dr}{\sqrt{c^2 r^4 + pr^2 + 1}}.$$

De ces surfaces (A) et (B), celles qui correspondent à $\alpha = 0$ sont les seules à courbure constante négative $-\frac{1}{\beta^2}$, qui ne sont pas de révolution et qui ont un système v de lignes de courbure planes. De la classe (B) on obtient une classe de surfaces à courbure constante positive $\frac{1}{\beta^2}$, qui ne sont pas de révolution et qui ont un système de lignes de courbure planes, en changeant β en $\beta\sqrt{-1}$. Pour toutes ces surfaces les lignes de courbure de l'autre système sont sphériques, et c'est cette propriété qui permet de trouver les équations des surfaces sans faire l'intégration des (1), et sous des formes qui pour la classe (A) ne contiennent que des transcendantes circulaires et hyperboliques, et pour la classe (B) des fonctions elliptiques.

Au moyen de celles des surfaces trouvées qui ont une courbure constante négative, en en prenant les développées, on a une autre classe de surfaces applicables sur l'hélicoïde gauche minima, et dans lesquelles les lignes correspondant aux génératrices sont des géodésiques de cônes ayant leurs sommets dans une même droite. Au moyen des surfaces trouvées, à courbure constante positive, en prenant les surfaces parallèles, pour $\alpha = \beta$, on a les surfaces à courbure moyenne constante n'étant pas de révolution et qui ont un système de lignes de courbure planes; les plans de ces lignes sont parallèles à une droite fixe, et les autres lignes de courbure sont sphériques. Enfin, l'auteur trouve les équations en termes finis des surfaces non développables dont les lignes de courbure d'un système sont planes, et trouve aussi que les surfaces sur lesquelles un système de géodésiques est formé par des hélices circulaires, cylindro-coniques ou sphériques ne sont que des surfaces cylindriques.

Secchi (le Père *A.*). — [U]. Sur les spectres prismatiques des étoiles fixes. Mémoire II. (73-133).

Dini (*U.*). — [O 5]. Sur les surfaces ayant un système de lignes de courbure sphériques. (135-151).

Si u, v sont des lignes orthogonales sur la sphère de rayon $= 1$, *et si, étant* X, Y, Z *les coordonnées des points de la sphère exprimées par u, v, on a*

$$\Sigma V'_1 X + \alpha' = \beta \sqrt{G'}, \tag{1}$$

où V_1, V_2, V_3, α et β *sont des fonctions de v seulement, ces lignes correspondent aux lignes de courbure d'une surface*

$$x = \alpha X + \beta \frac{\frac{dX}{dv}}{\sqrt{G'}} + V_1,$$

$$y = \alpha Y + \beta \frac{\frac{dY}{dv}}{\sqrt{G'}} + V_2,$$

$$z = \alpha Z + \beta \frac{\frac{dZ}{dv}}{\sqrt{G'}} + V_3,$$

pour laquelle es u et v sont lignes de courbure, et les v sont sphériques. Les rayons de courbure relatifs aux u et v respectivement sont

$$r_1 = \alpha + \frac{\beta'}{\sqrt{G'}} + \frac{1}{G'} \sum V'_1 \frac{dX}{dv},$$

$$r_2 = \alpha + \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}.$$

En conséquence de ce théorème et du théorème réciproque (c'est-à-dire que, *lorsque les lignes de courbure v sont sphériques, ces conditions sont vérifiées*), la recherche des surfaces ayant un système de lignes de courbure sphériques dépend de celles des systèmes *u*, *v* orthogonaux sur la sphère, pour lesquels existent cinq fonctions α, β, V_1, V_2, V_3 de *v* satisfaisant à la condition (1).

L'auteur démontre ce théorème et en développe quelques conséquences, par exemple le théorème de Picart, que *lorsque les v sont sur des sphères concentriques, les u sont géodésiques et par cela planes, et leurs plans passent par le centre commun des sphères.* Ces surfaces sont les seules qui aient un système de lignes de courbure géodésique et l'autre sphérique, et l'auteur en trouve les équations en termes finis. Suit la condition pour que les *v* soient sphériques :

$$r_2 = \alpha + \beta \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}.$$

En prenant alors

$$r_1 = r_2 + \frac{\dfrac{dr_2}{dv}}{\dfrac{d \log \sqrt{E}}{dv}},$$

la surface est

$$x = \int \left(r_2 \frac{\partial X}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial X}{\partial v} dv \right).$$

Etc.

La condition donnée par l'auteur est identique avec celle de Brioschi (*Annali di Matematica de Tortolini*, 1857); l'auteur démontre cette identité, et puis il indique une voie plus simple que celle suivie par Bonnet, pour rechercher les surfaces dont les lignes de courbure sont deux systèmes de lignes à courbure géodésique constante. Cette simplification est fondée sur le théorème de Brioschi qui établit que ces lignes sont sphériques et situées sur des sphères normales à la surface. Les surfaces en question sont des enveloppes d'une sphère variable dont le centre parcourt une courbe plane, et qui passe par deux points fixes réels ou imaginaires, symétriques par rapport au plan de la courbe.

Genocchi (*A.*). — [R 4 *a* ref. Q I *a*]. Sur les premiers principes de la Mécanique et de la Geométrie, en relation avec le postulatum d'Euclide (153-189, 1 planche).

Le postulatum d'Euclide reste établi en admettant celui d'Archimède relatif à la résultante de deux forces parallèles, égales et de même sens. Étant A, A′ les points d'application des deux forces P, B le milieu de AA′ et $x = \mathrm{AB}$, on a pour la résultante R

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}\varphi(x),$$

et pour $\varphi(x)$ on arrive à l'équation fonctionnelle

$$2 + \varphi(2x) = [\varphi(x)]^2,$$

dont la solution est

$$\varphi(x) = k^x + k^{-x}.$$

L'hypothèse $k = 1$ correspond à $\varphi(x) = 2$, c'est-à-dire au postulatum d'Archimède, et par cela à la Géométrie euclidienne; le cas où $\varphi(x)$ est variable correspond à la Géométrie non euclidienne, et en particulier k imaginaire à la Géométrie hyperbolique et k réel à la Géométrie elliptique. Cependant les formules pour la composition des forces concourantes restent les mêmes dans toutes les hypothèses. Pour celle des forces parallèles et inégales on a des formules qui se réduisent aux formules ordinaires pour $k = 1$.

L'hypothèse de la Géométrie euclidienne est aussi une conséquence de certains postulata admis par Newton et par d'Alembert dans la démonstration du parallélogramme des forces ou des vitesses.

Suivent d'autres considérations sur la théorie des parallèles et sur un postulatum que l'on pourrait substituer à celui d'Euclide.

Secchi (le Père *A.*). — [U]. Sur les spectres prismatiques des corps célestes. Mémoire III (191-248).

Tome III; 1879.
Napoli, Tip. delle R. Acad. delle Sc. Fis. e Mat., diretta de M. de Rubertis.

[Chaque Mémoire a une pagination spéciale.]

Siacci (*F.*). — [R 8 $a\alpha$]. Sur la rotation des corps libres. Mémoire I (30 pages et 1 p. de table des matières).

Étude du mouvement des axes de la section invariable, c'est-à-dire de la section diamétrale de l'ellipsoïde central, obtenue par un plan parallèle au plan fixe, laquelle, par un théorème de Poinsot, a une aire constante. La recherche est fondée sur une propriété des lignes de courbure de l'ellipsoïde. La longitude des axes est exprimée par les fonctions jacobiennes. Les axes ont un mouvement d'oscillation autour d'une droite, qui tourne uniformément dans le sens du mouvement de l'ellipsoïde, et l'inégalité du mouvement des axes est toujours $< \frac{\pi}{2}$.

De Saint-Robert (*P.*). — [R 8 $a\alpha$]. Sur le mouvement sphérique du pendule, en ayant égard à la résistance de l'air et à la rotation de la Terre (32 pages et 1 page de corrections).

La projection horizontale du centre d'oscillation devient une spirale, qui tourne autour de la verticale avec une vitesse égale et contraire à la composante verticale de la vitesse de la Terre. Cette spirale est la projection orthogonale d'une spirale logarithmique. Application au pendule de Foucault, et au cas des expériences faites à Rome par le Père A. Secchi, le 10 mai 1851.

Siacci (*F.*). — [R 8 $a\alpha$]. Sur la rotation des corps libres. Mémoire II (39).

Autre solution du problème traité dans le Mémoire I, publié dans ce même Tome (*voir* ci-dessus), faite en considérant la longitude d'une droite quelconque liée à l'ellipsoïde et en y ajoutant la projection de l'angle formé par cette droite avec l'un des axes de la section invariable. Cette méthode conduit l'auteur à établir un théorème de calcul intégral. En faisant coïncider la droite considérée avec les axes du corps et avec l'axe instantané, les relations qui ont lieu entre ces droites et les axes de la section invariable donnent le théorème de l'addition des paramètres des intégrales elliptiques de troisième espèce, et l'interprétation géométrique de quelques autres transformations de ces paramètres.

Expressions, en fonction du temps, des angles que les axes de la section invariable font avec ceux de l'ellipsoïde et avec l'axe instantané.

Des expressions des longitudes des axes l'auteur déduit un théorème de Géométrie, relatif à un ellipsoïde et une sphère concentrique. Puis il trouve le lieu des sommets de la section invariable (antipoloïde).

Bellevitis (*G.*). — [L_1 ref. M_1 5, 6 ref. B 12 *b*]. Sur quelques courbes de construction facile (43, 2 planches).

Application du calcul des équipollences. Si *h*, *k* sont deux droites du plan, et si une droite menée par O les rencontre en H, K, un point M satisfaisant à l'équipollence

$$OM = OH + OK$$

décrit une hyperbole passant par O et ayant *h*, *k* pour asymptotes, et que l'on peut appeler la *somme* géométrique des droites *h*, *k* par rapport à O.

Si au lieu de deux droites on en prend trois *h*, *h*, *l*, l'équipollence

$$OM = OH + OK + OL$$

donne lieu à une courbe du troisième ordre, *somme* des trois droites.

Par cette méthode l'auteur expose plusieurs propriétés relatives aux cubiques, tangentes, foyers, etc.

Somme d'une conique et d'une droite. Strophoïde et courbe des points brillants sur un système de cercles concentriques. Conchoïde, cardioïde.

Après cela l'auteur suppose que les rayons vecteurs dont il faut chaque fois faire la somme ne soient pas de même direction; par exemple, en supposant que les rayons CK, CL de deux cercles concentriques tournent autour de C avec des mouvements uniformes, la somme

$$CM = CK + CL$$

donne lieu à une *épicycloïde* ou à une *hypocycloïde,* suivant que les deux mouvements sont de même sens ou de sens contraires.

Courbes inverses des coniques. Lemniscate. Propriétés principales relatives à l'inversion.

Suit un petit Chapitre où l'auteur emploie les notations de Grassmann pour exposer les constructions des coniques données par cinq éléments, au moyen de la règle.

Construction des courbes aplanétiques.

De Gasparis (*A.*). — [U2]. Développement, en série ordonnée suivant les puissances du temps, de la valeur inverse du cube de la distance variable entre deux planètes. (31).

Tome IV; 1882.

Rubini (*R.*). — [V9]. Biographie de F. Padula. (LXXXVII-XCIV).

Minich (*S.-R.*). — [H6*b*]. Sur la manière la plus prompte de réduire l'intégration des équations du premier ordre à trois ou plusieurs variables à l'intégration d'équations explicites à deux seules variables. (48).

Après avoir exposé (Ire Section) la méthode ordinaire d'intégration d'une équation aux différentielles totales, et après une digression (Appendice à la Ire Section) sur les intégrales des fonctions homogènes, l'auteur donne, dans la IIe Section, une nouvelle méthode.

Soit l'équation

$$(1) \qquad A\,dx + B\,dx_1 + \ldots + K\,dx_{n-1} = 0,$$

où l'on regarde x comme fonction des $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

L'équation

$$MA\,dx + MB\,dx_1 = 0$$

donne

$$(2) \qquad \int_{a_1} MB\,dx_1 + \int M_1 A_1\,dx + \psi_1 = 0,$$

M_1, A_1 étant les valeurs de M, A pour une valeur particulière a_1 de x_1, et ψ_1 une fonction des $x_2, \ldots, x_{n-1}$. On détermine ψ_1 de manière qu'en différentiant la (2) on ait la (1) multipliée par M. On trouve une expression de $d\psi$,

$$\begin{aligned} d\psi_1 = & \left(MC - \int \frac{\partial(M_1 A_1)}{\partial x_2}\,dx - \int_{a_1} \frac{\partial(MB)}{\partial x_2}\,dx_1\right) dx_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(MK - \int \frac{\partial(M_1 A_1)}{\partial x_{n-1}}\,dx - \int_{a_1} \frac{\partial(MB)}{\partial x_{n-1}}\,dx_{n-1}\right) dx_{n-1}, \end{aligned}$$

dans laquelle, en introduisant la valeur de x donnée par (2), on doit trouver éliminée aussi la x_1. Cela conduit aux $n-2$ équations de condition, et, lorsque celles-ci sont satisfaites, on peut attribuer à x_1 la valeur particulière a_1 sans que la ψ_1 en soit altérée.

Étant v_1 la valeur de x correspondant à $x_1 = a_1$, et $M_1^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, ... les valeurs de M_1, A_1, ... pour $x_1 = a_1$ et $x = v_1$, on a

$$(3) \qquad \int M_1^{(1)} A_1^{(1)}\,dv_1 + \psi_1 = 0,$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\psi_1 = & \left[M_1^{(1)} C_1^{(1)} - \int \frac{\partial(M_1^{(1)} A_1^{(1)})}{\partial x_2}\,dv_1\right] dx_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[M_1^{(1)} K_1^{(1)} - \int \frac{\partial(M_1^{(1)} A_1^{(1)})}{\partial x_{n-1}}\,dv_1\right] dx_{n-1}. \end{aligned} \right.$$

En éliminant v_1 entre ces équations on a une équation entre les $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_{n-1}, \psi_1$, à laquelle on peut appliquer le même procédé. La modification proposée par l'auteur consiste en premier lieu dans la manière plus simple de déduire l'équation différentielle (4) et puis dans le fait qu'au lieu d'éliminer v_1 entre (3) et (4) il élimine ψ_1 entre les (2), (3) et (4) en faisant la soustraction de (3) et (2) et en substituant la valeur (4) de $d\psi_1$ dans l'équation obtenue en différentiant (3). En observant qu'il est

$$\int M_1 A_1\,dx - \int M_1^{(1)} A_1^{(1)}\,dv_1 = \int_{v_1} M_1 A_1\,dx,$$

on a

$$\int_{v_1} M_1 A_1 \, dx + \int_{a_1} MB \, dx_1 = 0,$$

$$A_1^{(1)} \, dv_1 + C_1^{(1)} \, dx_2 + \ldots + K_1^{(1)} \, dx_{n-1} = 0,$$

et le problème est ramené à l'intégration d'une équation à deux variables et d'une à $n - 1$ variables.

D'Ovidio (*E.*). — [B5*a* ref. B7*a*, *c*]. — Sur certains invariants de deux formes binaires des ordres 5 et 2, ou 5 et 3, et en particulier sur leur résultante. (19).

Expression de la résultante de deux formes d'ordres 5 et 2, au moyen des quatre invariants du système de degrés non supérieurs à 2 et 5 respectivement. Expression de la résultante de deux formes d'ordres 5 et 3, au moyen des 13 invariants de degrés non supérieurs à 3 et 5.

Genocchi (*A.*). — [H3*f*]. Sur certains couples d'égalités dans la théorie des nombres. (31).

Étude des égalités en nombres entiers

$$p^2 + a z q^2 = r^2,$$
$$p^2 + b z q^2 = s^2,$$

a et b étant donnés.

Siacci (*F.*). — [R8*a*α]. Les groupements statiques dans les systèmes de forme invariable. (16).

Si l'on a un corps tournant autour d'un point et auquel sont appliquées des forces constantes en direction et intensité, l'auteur appelle *axes statiques* les quatre axes autour desquels il faut faire tourner le corps pour le porter dans les quatre positions d'équilibre. Leur position dépend d'une équation du quatrième degré et ils ont les propriétés suivantes :

Le plan de deux quelconques des quatre axes est perpendiculaire au plan des deux autres.

En prenant respectivement sur les axes des segments égaux aux sinus des rotations, les extrémités (*points statiques*) ont leur barycentre au point fixe.

Si l'équation du quatrième degré a des racines multiples, les points statiques, et par conséquent les axes, sont en nombre infini; mais on peut les joindre quatre à quatre en des groupements ayant les propriétés énoncées. Le système est astatique lorsque les racines sont toutes égales.

Fergola (*E.*). — [F8*f*β]. Sur certaines équations relatives à la théorie des fonctions elliptiques, et sur des théorèmes de géométrie qui s'y rattachent. (10).

Polygones inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre.

Tome V; 1882.

Ce Tome, publié à l'occasion du centenaire de la Société, contient le statut, des notices historiques et la liste des Mémoires publiés. Un appendice à ce Tome, publié en 1885, contient le catalogue de la bibliothèque sociale.

Tome VI; 1887.

D'Ovidio (*E.*). — [V9]. Notice biographique sur D. Chelini. (LVIII-LXIV). Avec la liste des 53 travaux de D. Chelini.

D'Ovidio (*E.*). — [V9]. Notice biographique sur B. Tortolini. (LXV-LXXII). Avec la liste des 110 travaux de Tortolini.

D'Ovidio (*E.*). — [V9]. Biographie de G. Bellavitis. (LXXIII-LXXXV). Avec la liste des 174 travaux de Bellavitis.

D'Ovidio (*E.*). — [V9]. Notice biographique sur J. Plana. (LXXXVI-XC). Avec la liste des 146 travaux de Plana.

Genocchi (*A.*). — [E1*e*]. Sur la fonction $\Gamma(x)$ et sur la série de Stirling qui en exprime le logarithme. (18).

Genocchi (*A.*). — [E1*e*]. Encore sur la série de Stirling. Appendice au Mémoire précédent. (19-24).

Le reste de la série de Stirling sous la forme d'intégrale définie, trouvée par Schaar (1848) et par Liouville (1852), peut se déduire de la formule de Gudermann

$$\mu(p) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\left(p + n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{p+n}\right) - 1 \right],$$

étant

$$\log\Gamma(p) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(p - \frac{1}{2}\right)\log p - p + \mu(p).$$

La série de Stirling est semi-convergente, et l'auteur indique le nombre de termes que l'on doit prendre pour avoir la plus grande approximation.

Segre (*C.*). — [R8*aα* ref. L_2 17*iδ* ref. N_2 1*e*]. Sur l'équilibre d'un corps rigide soumis à des forces constantes en direction et intensité, et sur quelques questions géométriques qui s'y rattachent. (35).

Une rotation du corps est déterminée par les rapports des quatre quantités

$$x_0 = \cos\tfrac{1}{2}\Theta, \qquad x_1 = l \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\Theta, \qquad x_2 = m \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\Theta, \qquad x_3 = n \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\Theta,$$

et par conséquent peut se regarder comme représentée par le point dont les x_i sont les coordonnées homogènes (pôles). Les coordonnées d'un point du corps dans la nouvelle position sont des fonctions linéaires des coordonnées primitives, dont les coefficients sont des formes quadratiques par rapport aux x_i. Par cela la fonction

$$U = \Sigma(Xx + Yy + Zz),$$

dont la variation doit s'annuler pour avoir l'équilibre, est une expression

$$U = \Sigma a_{ik} x_i x_k,$$

et les points pour lesquels U a une même valeur constante u satisfont à l'équation

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k - u \Sigma x_i^2 = 0$$

(puisqu'il est $\Sigma x_i^2 = 1$). Cette équation représente un faisceau de quadriques homocycliques, très important dans ces recherches, et au moyen duquel l'auteur retrouve les propriétés relatives aux *axes statiques* de M. Siacci, et aussi d'autres propriétés relatives à l'espèce d'équilibre que l'on a en chaque position, aux complexes des axes statiques des points de l'espace, aux points où l'on a un nombre infini de positions d'équilibre, etc. Pour tout point de l'espace on a deux droites telles que le corps est toujours en équilibre autour de chacune d'elles. Ces droites forment une congruence quadratique que l'on peut employer dans d'autres questions d'équilibre du corps.

Lorgna (*A.-M.*). — [V8]. Lettre à M. Volta. (4).

La lettre, publiée par M. Scacchi, est de 1781, et elle est importante pour ce qui regarde l'origine de la Société.

Volterra (*V.*). — [B2 ref. H 4]. Sur les fondements de la théorie des équations différentielles linéaires. Ire Partie. (107).

L'auteur établit un calcul différentiel et intégral relatif aux substitutions, et trouve que ce calcul correspond à la théorie générale des équations différentielles linéaires, en donnant le passage des intégrales fondamentales aux coefficients, et réciproquement.

Dans cette première Partie il définit les opérations fondamentales de ce calcul et en expose les propriétés, en se rapportant, pour simplicité, aux substitutions du deuxième ordre, et en donnant dans le dernier paragraphe la généralisation à un ordre quelconque.

Soit $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ une substitution à déterminant $= 1$ et dont les coefficients sont des fonctions finies et continues d'une variable réelle x. Le produit

$$S_{x_0 \to \Delta x, x_0} = \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}_{x_0 + \Delta x} \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}_{x_0}^{-1}$$

pour $\Delta x = 0$ a pour limite l'identité. En posant

$$S_{x_0+\Delta x, x_0} = \begin{pmatrix} 1+\lambda, & \mu \\ \nu, & 1+\rho \end{pmatrix},$$

considérons la substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\Delta x}, & \frac{\mu}{\Delta x} \\ \frac{\nu}{\Delta x}, & \frac{\rho}{\Delta x} \end{pmatrix};$$

la condition pour que cette substitution, pour $\Delta x = 0$, ait pour limite une substitution finie $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ est que les fonctions A, B, C, D aient en x_0 une dérivée déterminée et finie. Sous cette condition on a

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A', & B' \\ C', & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}^{-1},$$

que l'on appelle *dérivée à gauche,* et où les A', ... sont les dérivées des A, ...

Semblablement, en partant du produit

$$S'_{x_0, x_0+\Delta x} = \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}_{x_0+\Delta x}$$

et sous la même condition, on trouve la *dérivée à droite*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A', & B' \\ C', & D' \end{pmatrix}.$$

Les différentielles, respectivement à gauche et à droite, de la substitution $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ sont

$$S_{x_0+dx_0, x_0} = \begin{pmatrix} 1+\alpha\, dx, & \beta\, dx \\ \gamma\, dx, & 1+\delta\, dx \end{pmatrix},$$

$$S'_{x_0, x_0+dx} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 dx, & \beta_1 dx \\ \gamma_1 dx, & 1+\delta_1 dx \end{pmatrix}.$$

La dérivée à gauche (à droite) ne change pas en multipliant à droite (à gauche) la substitution donnée par une substitution constante (à déterminant $= 1$). Une substitution $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ ne peut être la dérivée d'une autre (à déterminant $= 1$) que lorsqu'il est $\alpha + \delta = 0$. La dérivée à droite est la transformée de celle à gauche au moyen de la substitution donnée.

La dérivée du produit de deux substitutions est

$$\frac{d}{dx}\left[\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\right] = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\left[\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}^{-1},$$

ayant indiqué par $\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ la dérivée à gauche, et par $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\frac{d}{dx}$ celle à droite.

Le théorème du produit est aussi étendu au cas de plusieurs facteurs.

Soit encore $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ une substitution fonction de x $(p < x < q)$. Ayant divisé l'intervalle $p, \ldots, q$ en n parties $h_1, h_2, \ldots, h_n$, et étant $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ des valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comprises entre les limites supérieures et inférieures de ces quantités en h_i, formons les produits

$$A_n = \prod_1^n \begin{pmatrix} \alpha_i, & \beta_i \\ \gamma_i, & \delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n h_n, & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n, & 1 + \delta_n h_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1, & 1 + \delta_1 h_1 \end{pmatrix},$$

$$A'_n = \prod_n^1 \begin{pmatrix} \alpha_i, & \beta_i \\ \gamma_i, & \delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1, & 1 + \delta_1 h_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n h_n, & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n, & 1 + \delta_n h_n \end{pmatrix}.$$

Sous une condition analogue à celle de l'intégrabilité d'une fonction $\left(\lim \sum_1^n h_i D_i = 0\right)$, A_n et A'_n ont respectivement pour limites deux substitutions S et S' que l'on appelle l'*intégrale à gauche* et l'*intégrale à droite*, en posant

$$S = \int_p^q \begin{pmatrix} 1 + \alpha\, dx, & \beta\, dx \\ \gamma\, dx, & 1 + \delta\, dx \end{pmatrix} = \int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} dx,$$

$$S' = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\, dx, & \beta\, dx \\ \gamma\, dx, & 1 + \delta\, dx \end{pmatrix} \int_p^q = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} dx \int_p^q.$$

Les intégrales sont des substitutions continues par rapport à la limite supérieure. La dérivée à gauche de l'intégrale à gauche est égale à la substitution primitive; analoguement pour l'intégrale à droite. Une propriété analogue a lieu par rapport à la limite inférieure.

Le paragraphe III est dédié aux substitutions qui dépendent de plusieurs variables, à leurs différentielles totales, et aux secondes dérivées d'une substitution. On y trouve les conditions pour qu'une expression différentielle de substitutions soit une différentielle exacte. Ces conditions étant vérifiées, l'auteur, dans le paragraphe IV, expose la méthode d'intégration, qui est semblable à celle ordinaire.

La *variation* d'une intégrale de substitution est définie dans le paragraphe V. En donnant à a, b, c, d des variations $\delta a, \delta b, \delta c, \delta d$, la *variation à gauche* de $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ est

$$\delta \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \delta a, & b + \delta b \\ c + \delta c, & d + \delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}^{-1},$$

et celle *à droite*

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \delta = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a + \delta a, & b + \delta b \\ c + \delta c, & d + \delta d \end{pmatrix};$$

alors, étant

$$S = \int_p^q \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} dx,$$

et en donnant une variation à tous les éléments et aux limites, de manière qu'il soit

$$\delta(a+d)=0,$$

on a

$$\delta S=\begin{pmatrix}1+a\,\delta q, & b\,\delta q\\ c\,\delta q, & 1+d\,\delta q\end{pmatrix}_q S\begin{pmatrix}1-a\,\delta p, & -b\,\delta p\\ -c\,\delta p, & 1-d\,\delta p\end{pmatrix}_p S^{-1}\left[T\begin{pmatrix}\delta a, & \delta b\\ \delta c, & \delta d\end{pmatrix}T^{-1}\right]dx\int_p^q,$$

où

$$T=\int_x^q\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}dx.$$

Dans le paragraphe suivant l'auteur définit l'intégrale double, et démontre un théorème relatif à la transformation d'une intégrale curviligne en intégrale double.

Enfin il forme deux substitutions du deuxième ordre $\Delta_2'S$ et $\Delta_2''S$ qui ont par rapport à $S=\begin{pmatrix}A, & B\\ C, & D\end{pmatrix}$ des propriétés analogues au second paramètre différentiel d'une fonction.

L'application aux équations différentielles est renvoyée à un autre Mémoire.

Tome VII; 1890.

Torelli (*G.*). — [H 5*f*]. Sur quelques propriétés des intégrales définies trinomes, satisfaisant à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre illustrée par Gauss. (18).

Ce sont les intégrales

$$X=\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}dz,$$

$$X'=\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}[1-(1-x)z]^{-\alpha}dz$$

(les parties réelles de $\alpha+1-\gamma$, $\gamma-\beta$, β, $1-\alpha$ étant positives), qui satisfont à l'équation hypergéométrique

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0.$$

Toutes les valeurs des X, X' en un point x sont données par la substitution

$$S_0^m=\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ -2i\dfrac{\operatorname{sen}(\gamma-\beta)\pi\operatorname{sen}m(1-\gamma)\pi}{\operatorname{sen}(1-\gamma)\pi}e^{m(1-\gamma)\pi i}, & e^{2m(1-\gamma)\pi i}\end{matrix}\right\},$$

m étant le nombre (positif ou négatif) des tours que l'on fait autour du point singulier 0.

Recherche analogue pour le point singulier 1, qui conduit à une autre substitution S_1^n.

En tournant autour de ∞ on change les X, X′ en des fonctions linéaires homogènes de ces quantités, représentées par $S_1^{-1}S_0^{-1}$ ou par $S_0^{-1}S_1^{-1}$, ou bien par S_0S_1 ou par S_1S_0.

En supposant

$$\alpha + \beta = \gamma = 1,$$

on obtient une extension d'un théorème de Kronecker-Hermite. Toutes les valeurs que peut prendre le quotient

$$H = \frac{X'}{X}$$

en un point x (H_0 étant l'une quelconque de ces valeurs) sont représentées par

$$\frac{\nu i + \rho H_0}{\lambda + \mu i H_0},$$

où les λ, ρ ont la forme

$$1 + A_1(2 \operatorname{sen} \alpha)^2 + A_2(2 \operatorname{sen} \alpha)^4 + \ldots,$$

et les μ, ν la forme

$$B_1(2 \operatorname{sen} \alpha) + B_2(2 \operatorname{sen} \alpha)^3 + \ldots$$

(A_i, B_i réels et entiers). Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a le théorème de Kronecker-Hermite.

Emery (*G.*). — [R 4 *b*]. Sur les courbes funiculaires sollicitées par des nœuds coulants. (29).

Dans la théorie des polygones funiculaires on traite aussi le cas où les points d'application des forces peuvent se mouvoir le long du fil. L'auteur suppose que ces *nœuds coulants* soient infiniment rapprochés sur toute la longueur du fil, et fait une étude générale de cette question, qui se présente dans quelques recherches de statique. En général on ne peut avoir l'équilibre, mais il suppose que les nœuds soient assujettis à la condition de rester chacun sur une surface donnée ou sur une courbe donnée.

De Paolis (*R.*). — [Q 3]. Théorie des groupes géométriques et des correspondances que l'on peut établir entre leurs éléments. (165).

Les éléments des groupes peuvent être quelconques, mais ici on suppose généralement qu'ils soient des points, ou des lignes, ou des surfaces, ou des solides. Un ensemble de groupes est un *groupement*. On définit les groupes finis et indéfinis, les groupes limités (en démontrant aussi le théorème Weierstrass), les groupes dérivés, les groupes isolés, fermés, condensés, parfaits, bien enchaînés, et les groupes *continus*, puis les groupes *séparables*. Deux groupes G′, G″ sont *séparables* lorsqu'il n'existe pas un point qui soit limite pour G′ et G″ à la fois, ni un point de l'un qui soit limite de l'autre, ni un point commun aux deux groupes. Une ligne est *élémentaire* lorsque l'un quelconque de ses points la divise en deux parties *parfaites*. Définition analogue pour les surfaces élémentaires. Les lignes tracées sur une surface sont divisées en cinq

espèces suivant la constitution du contour de la surface et les points qu'elles ont sur ce contour; et l'on étudie les divisions que ces lignes déterminent dans la surface. Vient ensuite la distinction des surfaces en *unilatérales* et *bilatérales*, en ajoutant à ceux de Moebius d'autres exemples de surfaces unilatérales fermées, obtenues par déformation d'une sphère flexible et extensible où l'on a pratiqué un ou deux trous. Après cela vient un Chapitre dédié à la connexion des surfaces et aux coupures dans les surfaces unilatérales et bilatérales.

Les correspondances biunivoques entre les éléments de deux groupes sont considérées d'abord au point de vue de ce qu'on appelle la *puissance* d'un groupe, et l'on démontre qu'un groupe isolé est dénombrable, que le groupe des points rationnels d'un segment est aussi dénombrable, et que le groupe des points d'un segment et celui des points d'un espace limité à deux, trois, même n dimensions ont même puissance.

Puis ces correspondances sont considérées au point de vue de la continuité, et par une longue étude on établit les conditions pour l'existence d'une correspondance biunivoque continue entre deux groupes, en particulier entre deux lignes ou surfaces.

Après cela l'auteur passe aux correspondances $[m, n]$ entre deux groupes, dont il fait aussi une étude principalement pour ce qui regarde la continuité, et enfin aux correspondances $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ entre r groupes.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS (1).

Tome XXXIII; 1903-1904.

Glaisher (*J.-W.*). — Sur la série

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \ldots$$

(1-19).

L'auteur montre comment diverses transformations données par lui dans deux Mémoires du Tome XXXII du *Quarterly Journal* (*On a method of increasing the convergence of certain series for* π, $\pi^2, \ldots$; *Methods of increasing the convergence of certain series of reciprocals*) permettent le calcul rapide de la précédente série; ces transformations sont en très grand nombre; j'en signale deux, au hasard, pour indiquer leur caractère :

$$-\frac{1}{2} + 4\sum (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{5m^4+4}{m^2(m^4+1)^2},$$

$$\frac{181}{126} - \frac{16}{21}\log 2 + \frac{96}{7}\sum_3 (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)} \frac{1}{m^2(m^2-1)(m^2-4)^2}.$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVIII$_2$, 1904, p. 206.

Glaisher (*J.-W.*). — Sur la série

$$1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} - \ldots$$

(20-30).

Elliot (*E.-B.*). — Une formule qui contient la relation de Legendre

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

(31-32).

Soit, en désignant par k le module des fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$,

$$L(a, b, c : k) = \int_0^K \operatorname{sn}^a u \operatorname{cn}^b u \operatorname{dn}^c u \, du;$$

(a, b, c sont des nombres réels plus grands que -1). On a

$$\begin{aligned} &L(a, b, c+2 ; k) L(c, b, a ; k') \\ &\quad + L(a, b, c ; k) L(c, b, a+2 ; k') - L(a, b, c ; k) L(c, b, a ; k') \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{a+b+c+3}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Nanson (*E.-J.*). — Un théorème de Salmon. (33-40).

Démonstration simple et générale d'un théorème de Salmon, qui n'avait été établi par lui que pour $n = 2$, 3 et en vertu duquel l'ordre du système

$$\left\| \begin{matrix} a+\alpha & b+\alpha & c+\alpha & \ldots \\ a+\beta & b+\beta & c+\beta & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{matrix} \right\| = 0,$$

où $a + \alpha$ par exemple symbolise un quantic d'ordre $a + \alpha$, s'obtient au moyen de la formule

$$C_n + C_{n-1} H_1 + C_{n-2} H_2 + \ldots + H_n,$$

dans laquelle C_r est la somme des produits r à r des lettres a, b, c, ... ; H_r est la somme des produits homogènes de la dimension r des lettres α, β, ... ; $n - 1$ est l'excès du nombre des colonnes sur le nombre des lignes.

Elliot (*E.-B.*). — Sur les premiers principes de la théorie des fonctions analytiques dans une région. (41-45).

L'auteur montre comment le théorème fondamental de Cauchy peut s'établir pour une fonction $f(x)$, en supposant qu'à chaque nombre positif ε corresponde dans la région considérée un nombre positif η tel qu'on ait

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{f(z+imh) - f(z)}{imh} \right| < \varepsilon,$$

sous la condition que h soit réel et qu'on ait $|h| < \eta$; m est une constante réelle.

Stephenson (*A.*). — Note sur la solution complète d'une certaine équation différentielle dans un cas particulier. (46-48).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

où P, Q dépendent de la variable x et d'un paramètre, dans le cas où deux solutions particulières deviennent identiques pour une valeur spéciale du paramètre.

Escott (*E.-B.*). — Note concernant les facteurs numériques de $a^n - 1$. (49).

Corrections aux articles de M. Bickmore du *Messenger* (1895 et 1896) et des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1896).

Hudson (*R.-W.*). — La surface de flottaison. (50-53).

L'auteur forme une équation approximative de cette surface en coordonnées tangentielles.

Jolliffe (*A.-E.*). — Une propriété des quartiques trinodales. (54-55).

Cette propriété concerne les tangentes menées des trois points doubles.

Webb (*H.-A.*). — Le développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions de Bessel. (55-58).

L'auteur, après avoir établi la forme des coefficients d'un tel développement, indique diverses conditions sous lesquelles il est valable.

Barnes (*E.-W.*). — Sur l'expression de la constante d'Euler par une intégrale définie (59-61).

Démonstration simple de la formule

$$C = \int_0^1 \frac{1 - e^{-z} - e^{-\frac{1}{z}}}{z}\, dz$$

donnée par l'auteur dans son Mémoire *The theory of the gamma function* (*Messenger*, t. XXIX).

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. XIII. (62-67).

Suite de l'étude (*Messenger*, t. XXXI, p. 132) des conditions sous lesquelles on peut différentier sous le signe $\int$.

Hardy (*G.-H.*). — Le nombre cardinal d'un ensemble clos de points. (67-69).

Démonstration simple du théorème de Cantor sur le nombre cardinal d'un ensemble clos de points contenu dans le continu linéaire (0, 1).

Stephenson (*A.*). — Une extension de la méthode de Fourier en série de sinus. (70-77).

Développement de $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = A_1 \sin \alpha_1 x + A_2 \sin \alpha x_2 + \ldots,$$

où les α sont les racines de l'équation

$$\cos \alpha c + p \alpha \sin \alpha c = 0,$$

p et c étant des constantes.

On a par exemple, approximativement,

$$x = 3{,}046 \sin 0{,}3974 x - 0{,}227 \sin 1{,}269 x + 0{,}051 \sin 2{,}235 x - 0{,}018 \sin 3{,}241 x + \ldots.$$

Jourdain (*E.-B.*). — Le nombre cardinal de l'ensemble des fonctions intégrales. (78-79).

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. XIV. (80-85).

Constructions d'intégrales dont les discontinuités forment un ensemble partout dense.

Anglin. — Sur la parabole osculatrice à une conique. (86-89).

Nanson (*E.-J.*) — Sur une inégalité. (89-90).

Dans une suite d'un nombre impair de termes où les différences secondes sont toutes positives, la moyenne arithmétique des termes de rang impair est plus grande que la moyenne arithmétique des termes de rang pair.

Jolliffe (*A.-E.*). — Une autre propriété des quartiques trinodales. (90-91).

Les trois couples de points de contact des tangentes menées à une quartique trinodale des trois points doubles autres que les tangentes en ces points sont les sommets d'un hexagone inscriptible à une conique : les tangentes doubles à la quartique sont quatre des lignes de Pascal de cet hexagone.

Mathews (*G.-B.*). — Une transformation du cercle en une hyperbole équilatère au moyen d'une projection imaginaire. (92-94).

Cunningham (*A.*). — Note sur les facteurs de 10^{n-1}. Corrections. (95-96).

Gwyther (*R.-F.*). — Emploi d'une construction géométrique pour établir la série de Schlömilch et pour la transformation d'une intégrale définie liée à ce développement. (97-107).

La formule évidente

$$(1)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\xi\cos\varphi)\xi\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \frac{\pi}{2}[f(\xi)-f(0)]$$

s'interprète aisément en considérant une sphère de rayon ξ, où φ et ψ seraient la colatitude et la longitude d'un point de coordonnées rectangulaires x, y, z. En désignant par dS l'élément d'aire sur la sphère, on en déduit que le second membre de l'égalité précédente, multiplié par ξ, est égal à

$$\int f'(x)\,dS = \int f'(y)\,dS = \int f'(z)\,dS,$$

les intégrales étant étendues à l'octant sphérique contenu dans le trièdre des coordonnées positives. Il en résulte que les deux membres de l'égalité (1) peuvent aussi bien s'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\xi\sin\varphi\cos\psi)\,\xi\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\xi\sin\varphi\sin\psi)\,\xi\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi;$$

d'ailleurs, si $\xi\sin\varphi$ appartient à l'intervalle $(0, \pi)$, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\xi\sin\varphi\sin\psi)\,\xi\sin\varphi\, d\psi$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\xi\sin\varphi) + a_2\cos(2\xi\sin\varphi) + \ldots,$$

où

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\lambda\sin\psi)\, d\psi\cos n\lambda\, d\lambda.$$

En intégrant par rapport à φ et en tenant compte de la relation

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n\xi\sin\varphi)\, d\varphi = J_0(n\xi),$$

on obtient la formule de Schlömilch. Des considérations du même genre appliquées soit à la sphère, soit à un hyperboloïde à une nappe, conduisent soit à des transformations de ce développement, soit à des développements analogues.

Elliott (*E.-B.*). — Sur les ternariants pour le sous-groupe cyclique spécial de transformations linéaires. (108-112).

Dans un Mémoire récent [*The sizygetic theory of orthogonal binariants* (*Proc. Lond. math. Society*, t. XXXIII, p. 226)], l'auteur a montré le rôle, dans la recherche des invariants orthogonaux des formes binaires, de la décomposition du déterminant $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ d'une transformation orthogonale binaire en deux facteurs $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$. Dans la présente Note, il appelle l'attention sur un sous-groupe cyclique spécial d'une transformation linéaire ternaire pour laquelle le déterminant de la transformation se décompose en trois facteurs algébriques, comme il résulte de l'identité

$$l^3 + m^3 + n^3 - 3lmn = (l + m + n)(l + \omega^2 m + \omega n)(l + \omega m + \omega^2 n).$$

Young (*A.*). — Développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un déterminant. (113-116).

Hill (*M.-J.*). — Sur les facteurs primaires de Weierstrass. (117-124).

Quand un facteur primaire est de degré $k-1$, la valeur numérique des coefficients de son développement en série ne peut dépasser $\frac{1}{k}$.

Burnside (*W.*). — Sur les groupes qui admettent certains isomorphismes. (124-126).

Sur les groupes qui admettent un isomorphisme d'ordre 3 et qui ne laissent aucune opération inaltérée, sauf l'opération identique.

Burnside (*W.*). — Sur les coordonnées du huitième point d'intersection d'un système de quadriques qui ont sept points donnés. (127-128).

Young (*W.-H.*). — Sur une extension du théorème de Heine-Borel (129-132).

L'auteur propose de désigner sous le nom de *carreau* (*tile*) l'ensemble $d\mathrm{P}$ d'un point P et d'une petite région qui entoure ce point, lequel est dit *point d'attache* du carreau. Deux carreaux qui coïncident sans que leurs points d'attache coïncident sont regardés comme deux figures distinctes. Les points intérieurs à un carreau, mais non les points de la frontière, sont recouverts par lui.

Étant donné un système de carreaux dont les points d'attache remplissent une région close S, tels qu'un carreau quelconque puisse être rapetissé autant qu'on veut sans que cette propriété cesse d'avoir lieu, on peut déterminer un

nombre fini ν de ces carreaux ayant les propriétés suivantes : les dimensions linéaires de chaque carreau dP_i sont moindres que ε ; chaque point de S est recouvert par un ou plusieurs dP_i ; le point d'attache P_i n'est recouvert par aucun autre carreau que dP_i ; la somme des parties de S recouvertes par plus d'un carreau est moindre que ε'. On a désigné par ε, ε' des nombres positifs aussi petits qu'on veut.

Burnside (*W.*). — Sur les substitutions linéaires de déterminant 1 à coefficients entiers. (133-137).

Toute matrice à n lignes et à n colonnes, dont les éléments sont des entiers rationnels et dont le déterminant est 1, peut être obtenue par la multiplication des deux matrices

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} 0, & \rho_2, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \rho_3, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \rho_4, & \ldots, & 0 \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \ldots, & \cdot \\ \rho_1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{matrix}\right\}.$$

Dans la dernière matrice les ρ représentent $+1$ ou -1 ; ils peuvent être pris arbitrairement, sous la condition

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n = (-1)^{n+1}.$$

Hardy (*G.-H.*). — Note sur une série de Fourier divergente. (137-144).

Une fonction qui, dans un intervalle, n'admet pas d'autres discontinuités que des pôles, qui, ailleurs qu'en ces pôles, satisfait aux conditions ordinaires pour le développement en série de Fourier, peut être développée en une telle série, divergente mais sommable, sauf pour les pôles. L'auteur compare ses résultats à ceux du Mémoire de M. Fejér, inséré dans le Tome LVIII des *Mathematische Annalen*, sous le titre *Untersuchungen über Fourierschen Reihen*, qu'il n'avait pas lu avant de rédiger sa Note.

Cunningham (*A.*). — Sur les Tables d'exposants principaux (*Haupt-Exponent*). (145-155).

Bibliographie et corrections de Tables donnant les exposants auxquels appartiennent les entiers relativement à un module donné.

Dickson (*L.-E.*). — Une nouvelle extension du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers. (155-161).

Existe-t-il m formes linéaires $a_i n + b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), où a_i, b_i sont des nombres premiers entre eux, donnant m nombres premiers pour la même valeur de n, et cela pour une infinité de valeurs du nombre naturel n?

Bates (*G.-N.*). — Sur l'occurrence des chiffres dans les fractions systématiques périodiques simples. (162-163).

Hilton (*H.*). — Note sur les propriétés des quartiques trinodales dues à M. Jolliffe. (163).

Miller (*G.-A.*). — Note sur les groupes dont les ordres sont des puissances d'un nombre premier impair? (164-165).

Soit G un groupe d'ordre p^m (p premier impair), non cyclique. On sait que G contient au moins un sous-groupe invariant d'ordre p^β ($\beta = 1, 2, \ldots, m-1$). Il y a au moins un sous-groupe invariant non cyclique pour chaque valeur de $\beta > 1$. Toutes les fois que G contient un sous-groupe invariant cyclique d'ordre p^s ($1 < s < m$), il en contient p.

Jourdain (*Ph.*). — Sur les fonctions dont toutes les singularités sont non essentielles. (166-171).

Démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre, fondée sur ce qu'un polynome n'a qu'une singularité non essentielle à l'infini et où interviennent les nombres transfinis.

Dixon (*A.-L.*). — Une solution d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles. (172-176).

Il s'agit des équations de la forme symbolique

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) V = 0,$$

où F est une fonction homogène à trois variables. La forme des solutions est la même que celle qui a été donnée par M. Forsyth dans le *Messenger* (t. XXVII, p. 99) pour l'équation de Laplace.

Dixon (*A.-L.*). — Note sur l'évaluation d'une intégrale prise le long d'un contour. (176-178).

En supposant que la partie réelle de p soit comprise entre les entiers négatifs $-n$, $-n-1$, l'intégrale $\int x^{p-1} f(x)\, dx$ prise, dans le sens positif, le long d'un contour qui part d'un point a, entoure l'origine et revient au point a, est égale à

$$(e^{2ip\pi} - 1) \int_0^a x^{p-1} \left[f(x) - f(0) - x f'(0) - \ldots - \frac{x^n}{n!} f^{n}(0) \right] dx$$
$$+ (e^{2ip\pi} - 1) \left[f(0) \frac{a^p}{p} + f'(0) \frac{a^{p+1}}{p+1} + \ldots + \frac{f^{n)}(0)}{n!} \frac{a^{p+n}}{p+n} \right].$$

La fonction $f(x)$ est supposée holomorphe à l'intérieur du contour.

Stephenson (*A.*). — Un cas plus général de développement en série de sinus. (178-182).

Développement de $f(x)$, dans l'intervalle $(0, c)$, en une série

$$A_1 \sin \alpha_1 x + A_2 \sin \alpha_2 x + \ldots,$$

où les α sont les racines de l'équation

$$\cot \alpha c = \sum_{r=0}^{r=n} p_r \alpha^{2r-1},$$

les p_r étant des constantes données.

Bateman (*H.*). — Sur certaines intégrales définies et des développements contenant des fonctions de Legendre et de Bessel. (182-188).

Signalons, par exemple, les formules

$$\int_0^\infty J_m(r \cos\theta \cos\omega) J_m(r \sin\theta \sin\omega) J_{2n+1}(r)\, dr$$
$$= (-1)^{n-m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos 2\theta) P_n^m(\cos 2\omega),$$

$$J_m(r \cos\theta \cos\omega) J_m(r \sin\theta \sin\omega)$$
$$= \frac{2}{r} \sum_{n=m}^{m=\infty} (2n+1)(-1)^{n-m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos 2\theta) P_n^m(\cos 2\omega),$$

et les conséquences qu'on en tire en faisant $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Dixon (*A.-C.*). — Développement des fonctions thêta au moyen d'une intégrale prise le long d'un contour. (188-190).

On définit la fonction θ comme une fonction entière par les équations fonctionnelles relatives à l'addition d'une période 2ω, $2\omega'$, et l'on considère l'intégrale

$$\int e^{\frac{i\pi z}{2\omega}} \frac{\theta(z)\, dz}{\theta(z-a)\theta(z-b)},$$

prise le long du contour du parallélogramme dont les côtés sont

$$\pm \omega \pm (2n+1)\omega',$$

en supposant les deux points a, b à l'intérieur du parallélogramme dont les sommets sont $\pm\omega \pm \omega'$.

Nanson (*E.-J.*). — Note sur une identité algébrique. (190-192).

Si $a, b, c, \ldots$ sont les racines de $f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots$, on a

$$\sum af'(a) \sum \frac{1}{af'(a)} = n^2 + \frac{p_1 s_{n-1} + 2 p_2 s_{n-1} + \ldots + (n-1) p_{n-1} s_1}{p_n}.$$

Tome XXXIV : 1904-1905.

Hardy (*G.-H.*). — Note sur une fonction entière. (1-2).

La fonction entière

$$f(x) = \prod_{1}^{\infty}\left[1 + \frac{x}{n(\log n)^{\alpha}}\right],$$

en supposant $1 < \alpha < 2$, *est du genre* 0, *ainsi que* $f(-x)$, *tandis que*

$$f(x) - f(-x)$$

est du genre (1) (P. Boutroux, E. Lindelöf). M. Hardy établit la proposition analogue pour les deux fonctions $f(x) - c$, $f(x) + f(-x)$ en se servant des expressions asymptotiques des racines, d'après une méthode qu'il a exposée ailleurs (*Quarterly Journal*, t. XXXVI).

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral. XV, XVI. (3-10).

M. W.-H. Young a établi récemment la proposition suivante :

Si f est une fonction finie et F *la fonction supérieure semi-continue associée, les intégrales supérieures de f et de* F *dans un même intervalle sont égales.*

La fonction F est définie en un point x comme la limite, pour $\delta = 0$, de la borne supérieure de f' dans l'intervalle $(x - \delta, x + \delta)$. M. Hardy démontre que la proposition de M. Young subsiste quand, pour définir la fonction F, on exclut, des valeurs considérées de la fonction f, celle qu'elle prend au point lui-même, et montre l'avantage de cette nouvelle définition.

La proposition énoncée dans le cas d'une variable, s'étend de suite au cas de n variables.

Une seconde Note est consacrée au théorème suivant :

En supposant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positifs et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ réels, en supposant en outre que la fonction $\varphi(u)$ tende régulièrement vers 0 *pour $u = \infty$, l'intégrale*

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} e^{C_0}\varphi(A)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

où l'on a posé pour abréger

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$
$$A = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

est convergente.

Hardy (*G.-H.*). — Une généralisation de l'intégrale de Frullant. (11-18).

Il s'agit de l'intégrale

$$S = \int_0^\infty \frac{A\varphi(ax) + B\varphi(bx) + \ldots + K\varphi(kx)}{x^m}\,dx,$$

où m est un nombre naturel, où $a, b, \ldots, k$ sont positifs et où A, B, ..., K sont des constantes telles qu'on ait

$$\sum A a^p = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

La fonction $\varphi(x)$ est supposée continue pour x positif; on suppose en outre, pour $m = 1$, qu'elle est continue pour $x = 0$ et $x = +\infty$; on a alors

$$S = [\varphi(\infty) - \varphi(0)] \sum A \log a.$$

Pour $m > 1$, on suppose que, dans le voisinage de 0, la fonction $\varphi(x)$ est développable en série de Taylor et que l'intégrale

$$\int^{8} \frac{\varphi(u)}{{}^{m}u}$$

converge; on a alors

$$S = -\frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} \sum A a^{m-1} \log a.$$

Nanson (*E.-J.*). — Analogues dans l'espace d'un théorème de Hesse. (19-23).

Le théorème de Hesse est le suivant :

Si deux couples de sommets opposés dans un quadrilatère complet sont conjugués par rapport à une conique, il en est de même pour les troisièmes couples.

Les propositions analogues dans l'espace à 3 ou à n dimensions sont la traduction de propriétés simples des déterminants.

Cunningham (A.). — Tables de facteurs. (*Errata :* 24-31).

Jackson (*F.-H.*). — Pseudo-périodiques fonctions analogues aux fonctions circulaires. (32-39).

La fonction $\sin x$ peut être définie par la formule

$$\sin x = \frac{\pi}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{x}{\pi}\right)},$$

la fonction Γ étant définie par un produit infini.

Si de même on définit la fonction Γ_p de x par la formule

$$\Gamma_p(a+1) = \lim_{k=\infty} \frac{[1][2]\ldots[k]}{[a+1][a+2]\ldots[a+k]}[k]^a p^{\frac{1}{2}a(a+1)},$$

où l'on suppose en général

$$[a] = \frac{p^a - 1}{p - 1},$$

on pourra définir par la formule

$$S_p(x) = \frac{\omega}{\Gamma_p\left(\left[1 - \frac{x}{\omega}\right]\right)\Gamma_p\left(\left[\frac{x}{\omega}\right]\right)}$$

une fonction $S_p(x)$, jouissant de la propriété

$$S_p(x + \omega) = -p^{-\frac{x}{\omega}} S_p(x)$$

dont M. Jackson développe quelques propriétés curieuses.

Webb (*H.-A.*). — Sur la résolution, au moyen d'une intégrale définie, des équations linéaires aux différences. (40-43).

En appliquant à l'équation aux différences

$$(a_n x + b_n) u_{n+k} + (a_{n-1} x + b_{n-1}) u_{n+k-1} + \ldots + (a_0 x + b_0) u_k = 0$$

la méthode de Laplace, on trouve que

$$u_k = \int t^k F(t)\, dt$$

est une solution, si l'on a

$$(b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_0) F(t) = \frac{d}{dt}[F(t)(a_n t^{n+1} + \ldots + a_0 t)]$$

et si

$$F(t) t^{n+1} (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0)$$

reprend les mêmes valeurs aux deux extrémités du chemin d'intégration. Si les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de l'équation

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

sont distinctes; on pourra poser

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{\beta - 1}{t} + \frac{\beta_1 - 1}{t - \alpha_1} + \ldots + \frac{\beta_n - 1}{t - \alpha_n}$$

et prendre

$$u_n = C \int t^{\beta + k - 1} (t - \alpha_1)^{\beta_1 - 1} (t - \alpha_2)^{\beta_2 - 1} \ldots (t - \alpha_n)^{\beta_n - 1} dt,$$

l'intégrale étant prise entre les limites α_μ et α_ν si β_μ et β_ν sont tous deux positifs, ou, s'il en est autrement, suivant un double contour enfermant les points α_μ et α_ν à l'exclusion des autres points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ce résultat se rapproche naturellement des fonctions hypergéométriques d'ordre n étudiées par M. Pochhammer (*Crelle*, t. 73, p. 136). On retrouve en particulier ainsi, pour le cas de $n = 2$, les résultats de M. Heymann (*Crelle*, t. 122, p. 156). La méthode de Laplace, convenablement modifiée, s'applique à des équations aux différences, à deux variables, par exemple à l'équation utilisée par Weierstrass pour calculer les coefficients de la fonction σu.

Hilton (*H.*). — Note sur les courbes planes. (45-52).

Théorèmes de géométrie énumérative concernant l'effet d'un point multiple sur la classe, etc., d'une courbe, sur le nombre de coniques satisfaisant à certaines conditions relatives à une courbe pour laquelle on connaît les nombres de Plücker, sur les podaires, etc.

Barnes (*E.-W.*). — Sur l'équation linéaire homogène aux différences du second degré à coefficients linéaires. (52-71).

La méthode de résolution a été donnée par M. Webb, dans le cas d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré et appliquée à l'équation du deuxième degré. M. Barnes reprend le sujet, en se bornant au cas de $n = 2$, qui, comme le montre l'auteur, est très riche en cas particuliers. Cette étude est d'autant plus intéressante qu'elle se rattache étroitement aux belles propriétés des séries hypergéométriques (ordinaires). A la fin, on trouvera des applications aux équations qui se rapportent aux fonctions de Legendre et aux fonctions de Bessel.

Cunningham (*A.*) et *Woodall* (*H.-J.*). — Détermination de grands nombres premiers successifs. Second Mémoire. (72-89).

Les auteurs donnent 856 nouveaux nombres premiers.

Woodall (*H.-J.*). — Sur la division synthétique (90-96).

L'auteur montre en particulier le parti qu'on peut tirer, pour la division, des Tables de résidus contenues dans le *Canon arithmeticus* de Jacobi.

Miller (*G.-A.*). — Extension d'un théorème fondamental dans la théorie des groupes. (96).

Tout groupe non cyclique d'ordre p^m contient un sous-groupe abélien invariant d'ordre p^α si α satisfait à la condition $m > \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$. Un tel sous-groupe est non cyclique pour $\alpha > 1$ et $p > 2$.

Hardy (*G.-H.*). — Sur les zéros d'une classe de fonctions entières. (97-101).

Les fonctions considérées par l'auteur sont de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

où

$$\frac{1}{a_\nu} = b_0 b_1 b_2 \ldots b_\nu,$$

en supposant que b_ν est la valeur pour $\xi = \nu$ d'une fonction $b(\xi)$ positive, continue pour les valeurs positives de ξ, qui tend régulièrement vers $+\infty$ avec ξ. M. Hardy montre qu'on a

$$f(x) = a_{n-1} x^{n-1}(1+\theta) + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}(1+\theta')$$

avec les conditions

$$|\theta| < \frac{b_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \qquad |\theta| < \frac{b_{n+1}}{b_{n+2} - b_{n+1}}.$$

Ce résultat est appliqué à plusieurs cas particuliers; si par exemple on suppose que la fonction $b(\xi)$ satisfait à la condition

$$b\left(\xi - \frac{1}{2}\right) = 3b(\xi),$$

on aura

$$f(x) = a_n x^n (1 + \varphi) \qquad (|\varphi| < 1);$$

$f(x)$ a exactement n racines à l'intérieur du cercle de rayon $b_{n+\frac{1}{2}}$; toutes les racines sont réelles et négatives.

Hardy (*G.-H.*). — Note sur un précédent Mémoire. (102).

Il s'agit du Mémoire analysé plus haut sous le titre *Une généralisation de l'intégrale de Frullant;* les résultats signalés dans l'analyse avaient été donnés sous une autre forme, par M. M. Lerch, dans les *Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wiss.* (1898).

Roberts (*R.-A.*). — Sur des systèmes doublement infinis de polygones gauches. (103-112).

L'auteur considère une quadrique dont les points sont définis au moyen des paramètres p, q par les formules

$$x_i = a_i pq + b_i p + c_i q + d_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 4)$$

et deux points (p_1, q_1), (p_2, q_2) sur la quadrique dont les paramètres sont donnés par deux relations; la droite qui joint ces deux points forme une congruence; les côtés des polygones qu'il considère sont ainsi inscrits dans une quadrique et appartiennent à des congruences définies comme je viens de l'expliquer. Il arrive à des résultats intéressants en particularisant les relations qui définissent les congruences, en supposant par exemple qu'il y ait des relations involutives entre p_1, p_2 et entre q_1, q_2 ou bien que $p_1 p_2$ et $p_1 + p_2$ satisfont à une équation du second degré, etc.

Bennett (*T.-L.*). — Sur la réduction du problème des n corps. (113-120).

L'ordre est abaissé de $6n$ à $6n - 6$, puis de $6n - 6$ à $6n - 10$ au moyen du théorème du centre de gravité, d'une part, du théorème des aires et de l'élimination des nœuds, de l'autre, en suivant les méthodes employées respectivement par M. Poincaré et par M. Whitaker dans le cas où $n = 3$; enfin il est abaissé de $6n - 10$ à $6n - 12$ par le théorème de la force vive et l'élimination du temps.

Edwards (*R.-W.*). — Sur une modification aux coefficients 1, 2, 4, 2, 4, ..., 2, 4, 1 de la règle de Simpson, quand l'une ou

l'autre des ordonnées extrêmes est tangente à la courbe qui limite la figure. (121-126).

Il y a alors intérêt à substituer à la courbe une parabole ayant une équation telle que

$$y = a + bx + c\sqrt{x}.$$

Muir (*Th.*). — Un certain continuant évalué par Cayley. (126-131).

Développement du continuant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & \ldots & . & . \\ x & 0 & 2 & . & \ldots & . & . \\ . & x-1 & 0 & 3 & \ldots & . & . \\ . & \ldots & x-2 & 0 & \ldots & . & . \\ . & \ldots & \ldots & . & \ldots & . & . \\ . & \ldots & \ldots & . & \ldots & 0 & n-1 \\ . & \ldots & \ldots & . & \ldots & x-n-2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Cunningham (*A.*). — Table de partitions quadratiques. (132-136).

Hilton (*H.*). — Courbes sur une quadrique. (136-139).

Propositions diverses obtenues en projetant ces courbes d'un point de la quadrique.

Blythe (*W.-H.*). — Notes sur la géométrie des surfaces cubiques. (139-141).

Démonstration analytique du théorème de Reye :

L'intersection de trois plans correspondants de trois faisceaux projectifs est située sur une surface cubique.

Démonstration, au moyen du théorème de Pascal, de cette proposition :

Le lieu d'une droite qui rencontre trois droites fixes est une surface coupée suivant une conique par un plan quelconque.

Taylor (*H.-M.*). — Sur une énigme concernant le pliage du papier. (142-143).

Cunningham (*E.*). — Note sur une proposition établie par Schlesinger. (144-145).

Inexactitude d'une proposition qu'on trouve dans la *Theorie der linearen Differentialgleichungen* de M. Schlesinger, t. I, § 95, et d'après laquelle une équation différentielle

$$z^{(n)} + \varphi_p(x)\, z^{(n-1)} + \varphi_{2p}(x)\, z^{(n-2)} + \ldots + \varphi_{np}(x)\, z,$$

où φ_r désigne un polynome de degré r, admettrait un système fondamental de solutions de la forme

$$z_\lambda = e^{c_{0,\lambda} x^{p+1} + c_{1,\lambda} x^{p+\cdots+1} + \cdots + c_{p,\lambda} x} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Hardy (*G.-H.*). — Sur certaines séries multiples, conditionnellement convergentes, liées à la théorie des fonctions elliptiques. (146-153).

Il s'agit des séries considérées par Kronecker de la forme

$$\sum \frac{e^{2m\theta - 2n\varphi - \tau i}}{a + m\omega_2 + n\omega_1};$$

θ et φ sont réels, positifs, plus petits que 1; ω_1, ω_2 sont des nombres complexes tels que, dans le rapport $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, le coefficient de i soit positif; m, n sont des entiers positifs, nuls ou négatifs; a est tel que le dénominateur du terme général ne soit jamais nul; la sommation s'étend à toutes les valeurs entières; M. Hardy montre d'abord qu'une telle série est une série double convergente au sens de M. Pringsheim. Il effectue la sommation et montre que la somme de la série est

$$e^{a(\eta_2\varphi - \eta_1\theta)} \frac{\sigma(a + \omega_1\theta - \omega_2\varphi)}{\sigma a\, \sigma(\omega_1\theta - \omega_2\varphi)}.$$

Il montre que la série est uniformément convergente dans un domaine ne contenant aucun des points $-m\omega_2 - n\omega_1$, qu'elle peut être intégrée ou différentiée terme à terme, d'où des formules que le lecteur écrira sans peine.

Gosset (*Th.*). — Sur les facteurs des nombres de Fermat. (153-154).

Cunningham (*E.*). — Sur le développement asymptotique d'une fonction analytique. (155-157).

Le quotient de deux développements asymptotiques fournit un développement formel qui est aussi asymptotique, de même que la somme ou le produit.

Hilton (*H.*). — Une extension de la théorie des groupes de mouvements. (157-160).

La symétrie, la translation, la rotation sont remplacées par des transformations projectives.

Young (*W.-E.*). — Sur un ensemble parfait. (160).

Ensemble parfait de points dans un plan, qui n'est dense nulle part, dont les projections sur les deux axes emplissent tout un segment; on peut faire passer une courbe de Jordan par les points de cet ensemble.

Roberts (*R.-A.*). — Sur des polygones inscrits à une quartique binodale et circonscrits à une conique. (161-171).

Il y a une infinité de polygones d'un nombre pair de côtés inscrits à la quartique et circonscrits à une conique convenable quadruplement tangente à la quartique.

Roberts (*R.-A.*). — Sur une quartique plane à centre et le cône correspondant. (171-183).

L'auteur désigne sous le nom de *quartique à centre* une quartique qui peut être projetée suivant une quartique ayant un centre au sens ordinaire du mot. Il développe les propriétés d'une telle quartique et, en particulier, ses relations avec certaines coniques.

Cunningham (*A.*) et *Woodall* (*H.-J.*). — Détermination de grands nombres premiers successifs. Troisième Mémoire. (184-192). J. T.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

3e série, Tome XXIV, 1907 (1).

Korn (*A.*). — Sur les équations de l'élasticité. (9-75)

Introduction. — Pour résoudre d'une manière générale le problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les déplacements $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ des points de la surface sont donnés, il faut trouver un système de solutions u, v, w des équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -X \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -Y \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -Z \end{cases} \qquad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

continues avec leurs dérivées premières dans le domaine τ du corps élastique et satisfaisant aux conditions-limite

$$(2)\qquad u = \overline{u}, \qquad v = \overline{v}, \qquad w = \overline{w}$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXI$_2$, p. 193.

à la surface σ de τ. X, Y, Z sont des fonctions de (x, y, z) données dans le domaine τ, et k est une constante inhérente au milieu élastique. En imposant certaines conditions de continuité aux fonctions X, Y, Z, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ et à leurs dérivées, on peut facilement démontrer que le problème énoncé a un système unique de solutions si

$$(3) \qquad -1 < k < +\infty;$$

mais les démonstrations générales pour l'existence des solutions n'ont pas encore été données avec une rigueur parfaite. M. Lauricella et MM. E. et F. Cosserat ont bien reconnu que la méthode des approximations successives est la voie indiquée pour trouver ces solutions; mais la convergence des séries par lesquelles les solutions sont représentées n'a pas encore été démontrée avec une rigueur suffisante.

Je me propose de combler cette lacune et, après avoir démontré (Chap. I et II) un certain nombre de théorèmes nouveaux qui permettront du reste des applications assez intéressantes dans d'autres branches de la Mathématique, je donnerai (Chap. III) la solution complète du problème proposé.

Dans ce Mémoire, je ne traiterai pas explicitement les équations *dynamiques* de l'élasticité; je me bornerai ici à énoncer le résultat qu'on peut déduire de ma solution du problème d'équilibre sur les vibrations d'un corps élastique dont la surface reste en repos (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Bavière*, 1906).

D'une manière analogue à celle imaginée par M. Poincaré dans son Mémoire célèbre *Sur les équations de la Physique mathématique*, on peut démontrer l'existence d'une infinité de constantes λ_j et de triplets U_j, V_j, W_j continus avec leurs dérivées premières dans τ, satisfaisant aux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta U_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} + \lambda_j^2 U_j = 0, \\ \Delta V_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} + \lambda_j^2 V_j = 0, \\ \Delta W_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} + \lambda_j^2 W_j = 0, \end{cases}$$

$$(5) \qquad \Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} = \frac{\partial W_j}{\partial z},$$

$$(6) \qquad \int_\tau (U_j^2 + V_j^2 + W_j^2)\, d\tau = 1$$

et s'annulant à la surface, si k est un nombre fixe satisfaisant à l'inégalité

$$-1 < k < +\infty.$$

Chaque triplet de fonctions u, v, w s'annulant à la surface et continues avec leurs dérivées premières et secondes peut être développé en séries de la manière suivante :

$$(7) \qquad \begin{cases} u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots, \\ v = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \ldots, \\ w = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \ldots, \end{cases} \qquad C_j = \int_\tau (u U_j + v V_j + w W_j)\, d\tau, \quad 0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots$$

et ces développements pourront servir à l'intégration des équations dynamiques de l'élasticité

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z \end{cases} \qquad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

dans les cas où l'on suppose à la surface σ

$$u = v = w = 0,$$

en désignant par k et σ^2 des constantes du milieu élastique, par X, Y, Z des fonctions données dans τ satisfaisant à de certaines conditions de continuité; je ne m'occuperai pas d'une manière détaillée de ces conséquences des développements (7); je me suis borné à démontrer l'existence des triplets élastiques U_j, V_j, W_j et la possibilité des développements (7).

Dans les Chapitres I et II je donnerai plusieurs théorèmes appartenant à la théorie générale des potentiels, qui seront d'une grande utilité pour la solution du problème d'équilibre élastique.

Traynard (*E.*). — Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques. (77-177).

Une application importante des fonctions thêta de deux variables est la théorie des surfaces hyperelliptiques. Les coordonnées d'un point d'une surface hyperelliptique sont des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. M. Picard a, le premier (1885), étudié ces surfaces; il a montré notamment qu'elles admettent deux intégrales de différentielles totales de première espèce, lorsqu'elles sont représentables point par point sur le champ hyperelliptique et que leur genre géométrique est égal à *un*. M. Humbert (1893) a donné de ces surfaces une théorie fondée entièrement sur la considération des fonctions thêta. Les fonctions employées dans ces recherches sont celles qui ont pour tableau de périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi, & 0, & a, & b, \\ 0, & 2i\pi, & b, & c. \end{matrix}$$

Mais, comme l'a fait voir M. Traynard, le théorème général sur la représentation des fonctions quadruplement périodiques de deux variables conduit à considérer des fonctions pour lesquelles la première période est divisée par un entier M; les conséquences de l'introduction de l'entier M sont étudiées dans le présent travail.

La revision de la théorie générale, nécessitée par cette introduction, fait l'objet des trois premiers Chapitres. Le Chapitre I traite du nombre des fonctions thêta, de leur parité, de leurs zéros; un cas nouveau y est signalé, celui où l'ordre des fonctions thêta est égal au produit d'un nombre M pair par un nombre impair.

Les Chapitres II et III étudient les surfaces hyperelliptiques représentables

point par point dans le champ hyperelliptique ou bien à la façon de la surface de Kummer.

Le Chapitre IV contient les éléments d'une théorie générale des surfaces représentables comme la surface de Kummer dans le cas où M est égal à 2.

Au Chapitre V, l'équation de la surface de Kummer est mise sous diverses formes destinées à servir dans la suite.

Dans le Chapitre VI est étudiée une surface hyperelliptique du huitième degré, représentable point par point sur le champ hyperelliptique; l'auteur donne la classification complète des courbes tracées sur cette surface.

Dans le Chapitre VII, il étudie une surface du quatrième degré à 14 points doubles et montre que c'est un type défini, dont il donne les caractéristiques géométriques.

Le Chapitre VIII contient la même étude pour une surface du quatrième degré à 32 droites et le Chapitre IX pour une surface du quatrième degré à 15 points doubles.

Dans un Appendice, M. Traynard donne deux Tableaux contenant les demi-périodes qui annulent les fonctions thêta dans le cas où M est pair et il fait des applications numériques pour les surfaces à 14 points doubles ou à 32 droites qui ont tous leurs éléments remarquables réels.

Merlin (*Émile*). — Errata au Mémoire sur certaines familles de réseaux concourants (t. XXIII, 1906). (178).

Landau (*E.*). — Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard. (179-201).

L'auteur commence par rappeler deux propositions qu'il a établies antérieurement et dont la première est une généralisation du théorème classique de M. Picard.

I. — *Soit une fonction analytique*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

régulière en $x = 0$ *et pour laquelle* $a_1 \neq 0$. *Il existe un cercle de centre* $x = 0$ *dont le rayon dépend seulement de* a_0 *et* a_1 (*mais non des coefficients suivants*), *à l'intérieur duquel la fonction* $G(x)$ *possède un point singulier ou prend au moins une fois l'une des valeurs* 0 *et* 1.

II. — *Toute équation trinome*

$$a_0 + a_1 x + a_n x^n = 0$$

où $a_1 \neq 0$ *et* $n \geqq 2$ *admet au moins une racine dans un cercle de centre* $x = 0$ *dont le rayon dépend de* a_0 *et de* a_1, *mais non de* n *ni de* a_n.

Il démontre ensuite cet autre résultat :

III. — *Toute fonction analytique régulière au point* $x = 0$ *et impaire*

$$G(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots$$

pour laquelle $a_1 \neq 0$, *ou bien admet un point singulier, ou bien prend la*

valeur 1 *dans un cercle de centre* $x = 0$ *et dont le rayon ne dépend que de* a_1, *mais non des coefficients suivants.*

Les propositions II et III rentrent comme cas particuliers dans un énoncé plus général que M. Landau établit :

IV. — *Il existe une constante absolue* γ *telle que toute série de puissances*

$$1 + x + b_1 x^{1+\nu} + b_2 x^{1+2\nu} + \ldots,$$

où $\nu > 1$ *et qui est convergente pour* $|x| < \gamma$, *possède au moins un zéro dans ce cercle.*

M. Hurwitz a fait observer qu'on peut établir un théorème analogue pour toute progression arithmétique k, $k + \nu$, $k + 2\nu$, ..., où k et ν sont des entiers positifs dont le premier n'est pas un multiple du second. M. Landau complète cette remarque en démontrant les propositions suivantes :

V. — *La série*

$$1 + x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \ldots,$$

où k *et* ν *sont des entiers positifs tels que* ν *ne divise pas* k, *cesse de converger ou possède une racine dans le cercle* $|x| < \gamma$, *où* γ *est une constante absolue, indépendante de* k, *de* ν *et des coefficients* b_1, b_2, ...

VI. — *Soit* $\rho = \rho(k, \nu)$ *la limite supérieure des rayons* r *tels que la série*

$$1 + x^k + b_1 x^{k+\nu} + b_2 x^{k+2\nu} + \ldots,$$

où k *et* $\nu > 1$ *sont fixes et premiers entre eux, puisse être convergente et différente de zéro pour* $|x| < r$. *Soit* $\sigma = \sigma(k, \nu)$ *la limite supérieure des nombres* r *tels que la série*

$$x^k + b_1 x^{k+1} + b_2 x^{k+2} + \ldots$$

puisse être convergente et différente de $(-1)^\nu$ *pour* $|x| < r$ *et n'avoir que des zéros d'ordre divisible par* ν *pour* $0 < |x| < r$. *On a* $\rho = \sqrt[\nu]{\sigma}$.

Les deux nombres ρ et σ sont finis. Le dernier a été déterminé par M. Carathéodory.

Hadamard. — Sur quelques questions de calcul des variations. (203-231).

Montel (*P.*). — Sur les suites infinies de fonctions. (233-334).

Introduction. — Quand on confond la notion de fonction avec celle de correspondance, on est conduit à dire qu'on a défini une fonction des éléments d'un ensemble donné E, lorsqu'on a établi une loi de correspondance entre les éléments de E et ceux d'un autre ensemble d'éléments F. Si l'ensemble E se compose de points d'un domaine à n dimensions et l'ensemble F de nombres réels ou complexes, on obtient une fonction de n variables. La théorie des fonctions étudie les propriétés que possède l'ensemble des nombres F suivant la nature de la loi de correspondance.

Lorsque l'ensemble E comprend des courbes ou des surfaces formant une famille déterminée, l'ensemble F étant toujours constitué par des nombres, on a des fonctions de courbes et de surfaces, et l'étude des propriétés de ces fonctions, suivant la nature et la famille E et suivant le mode de correspondance, fait l'objet du calcul fonctionnel.

Or, un grand nombre de propositions appartenant à la théorie des fonctions se retrouvent sous une forme équivalente dans le calcul fonctionnel. La démonstration de ces théorèmes (sur la continuité, le maximum ou minimum, etc.) exige seulement que l'ensemble E et la loi de correspondance soient assujettis à des conditions qu'on peut définir, abstraction faite de la nature des éléments de E. Pour l'ensemble E, il faut supposer : 1° que, de toute suite infinie d'éléments, on puisse extraire au moins une autre suite infinie ayant un élément limite; 2° que ces éléments limites fassent partie de l'ensemble E; en d'autres termes, que cet ensemble soit fermé. Pour la correspondance, il faut, en général, supposer qu'elle soit continue.

Les difficultés que présente, à ce point de vue, le calcul fonctionnel paraissent se trouver principalement dans la vérification des propriétés que nous venons d'énoncer pour l'ensemble E.... Il semble donc utile de connaître des familles, de plus en plus étendues, de fonctions possédant les propriétés requises pour l'ensemble E.

Dans ce travail, j'ai essayé d'étudier deux familles de fonctions continues remplissant les conditions précédentes : les familles de fonctions de variables réelles également continues et les familles de fonctions bornées de variables complexes. Pour la définition de la limite, je me suis placé dans le cas le plus simple de la convergence uniforme, cas où les propriétés des fonctions d'une suite se transmettent plus régulièrement à la fonction limite.

Le Chapitre I est consacré à l'étude de fonctions de variables réelles également continues et à celle des conditions sous lesquelles une famille de fonctions possède la continuité égale. Je fais voir, dans le Chapitre suivant, comment l'étude de familles particulières de fonctions également continues permet d'établir, dans toute leur généralité, les théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles ou de certaines équations aux dérivées partielles. Pour les équations de la forme

$$y' = f(x, y),$$

je montre, après M. Peano, l'existence du faisceau des intégrales qui passent par un point donné.

L'extension de ces méthodes au cas des équations aux différentielles totales exige l'étude préalable des conditions d'intégrabilité sous la forme la plus générale; le Chapitre III a pour but la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$p\,dx + q\,dy$$

soit une différentielle totale, et cette méthode m'a conduit, incidemment, à quelques résultats relatifs aux conditions que doivent remplir deux fonctions continues u et v de x et y pour que $u + iv$ soit une fonction de $x + iy$.

Dans les deux derniers Chapitres, je m'occupe des familles de fonctions analytiques de z, bornées dans un domaine, et j'applique les résultats obtenus aux séries convergentes de fonctions analytiques : j'établis quelques propositions nouvelles permettant d'affirmer que la somme d'une série, dont les termes sont

des fonctions holomorphes, est aussi une fonction holomorphe, et je donne des propriétés de la somme d'une série convergente de fonctions de z, lorsque la convergence n'est pas uniforme. Pour ces dernières séries, dans tout domaine intérieur au domaine de convergence, il en existe un autre où la somme est analytique. Un point autour duquel la convergence n'est pas uniforme est appelé *irrégulier* : je fais voir que l'ensemble des points irréguliers est parfait, continu, non dense et d'un seul tenant avec la frontière du domaine, et j'étudie comment se comporte la série dans le voisinage d'un de ces points.

Picard (*Émile*). — Sur la détermination des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles par les valeurs des dérivées normales sur un contour. (335-340).

Étant donnée l'équation du type elliptique

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x, y) V,$$

où la fonction $f(x, y)$ est donnée, mais de signe variable, dans l'aire A limitée par un contour C, l'auteur considère une solution V de cette équation et pose

$$(2) \qquad V(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint f(\xi, \eta) V(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\xi\, d\eta = U(x, y),$$
$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire A. La fonction U est *harmonique* et, si l'on désigne par Φ la valeur donnée sur C pour la dérivée normale de U, on aura

$$(3) \qquad \frac{dU}{dn} - \frac{1}{2\pi} \iint f(\xi, \eta) V(\xi, \eta) \frac{\cos(r, n)}{r} d\xi\, d\eta = \Phi.$$

L'élimination de V entre les équations (2) et (3) conduit à une équation fonctionnelle que M. Picard ramène à une équation de Fredholm. *En général*, le problème admet une solution et une seule. La méthode s'applique, avec peu de modifications, si l'on se donne sur le contour, non plus la dérivée normale, mais la somme

$$\frac{dV}{dn} + kV,$$

k étant une fonction du point sur le contour.

L'auteur aborde ensuite l'équation générale du type elliptique et fait voir qu'on peut résoudre le problème suivant :

Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda\left(a \frac{\partial V}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + cV\right) = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de x et y et λ un paramètre constant, trouver l'intégrale continue de cette équation qui, en chaque point d'un contour C, *satisfait à la relation*

$$\frac{dV}{dn} + kV = h,$$

k et h étant des fonctions de la position du point sur le contour.

Ce problème a en général une solution et une seule. Il n'y a d'exceptions que pour certaines valeurs particulières de λ que la méthode fait connaître.

Padé (*Henri*). — Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions. (341-400).

Ces recherches sont dominées par la notion de *fraction continue holoïde*, que M. Padé a introduite et que nous rappellerons. A chaque point (μ, ν) du plan, de coordonnées entières, positives ou nulles, on fait correspondre la fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré μ et le numérateur de degré ν, qui, développée en série de Taylor, reproduit par ses $\mu + \nu + 1$ premiers termes les $\mu + \nu + 1$ premiers termes d'une série entière ascendante donnée $f(x)$. Le plan (μ, ν) constitue alors la *Table* des fractions rationnelles approchées ou *réduites* de $f(x)$.

Deux réduites (μ, ν), (μ', ν') distinctes sont *contiguës* et *progressantes* dès que les différences $\mu' - \mu$, $\nu' - \nu$ sont nulles ou égales à l'unité.

Des réduites contiguës et progressantes choisies d'une manière quelconque dans la Table sont les réduites d'une *fraction continue holoïde :* les numérateurs partiels d'une telle fraction sont des monomes où l'exposant de la variable est différent de zéro; les dénominateurs partiels sont des polynomes dont le terme constant n'est pas nul. Les successions de réduites portées par des parallèles aux axes μ et ν donnent naissance aux *fractions continues régulières* où les numérateurs partiels sont du premier degré ainsi que les dénominateurs partiels.

L'objet du présent Mémoire est d'*étudier le développement en fraction continue de la fonction génératrice d'une quantité qui satisfait à une équation aux différences finies, linéaire et du premier ordre, à coefficients linéaires relativement à l'indice.*

L'étude de la convergence des fractions continues régulières, fondée sur une importante proposition de Laplace relative aux fonctions génératrices, conduit, *dans le cas général,* aux résultats suivants :

Les fractions continues régulières, dont les réduites sont portées par les parallèles à l'axe des ν, *sont convergentes dans un cercle ayant l'origine pour centre et passant par un point déterminé* A *du plan; elles sont divergentes hors de ce cercle; dans le cercle, leur valeur est la fraction développée.*

Les fractions continues régulières dont les réduites sont portées par des parallèles à la bissectrice de l'angle des axes μ, ν *sont convergentes dans le plan, coupé suivant le prolongement de la droite qui va de l'origine au point* A. *Elles ont, dans ce domaine, la fonction pour valeur.*

Deux *cas limites* du cas général donnent lieu à d'autres conclusions. Dans le premier, le point A s'éloigne indéfiniment, et les domaines de convergence des fractions régulières s'étendent à tout le plan. La fonction développée est alors une fonction de même nature que l'exponentielle et toutes les fractions continues holoïdes dont les réduites progressent dans la Table, suivant une direction intermédiaire entre l'axe des ν et la bissectrice, sont convergentes dans tout le plan et ont la fonction pour valeur.

Dans le second cas limite, le point A vient, au contraire, se confondre avec

l'origine. Le domaine de convergence des fractions régulières, à réduites portées par les parallèles à l'axe des ν, se réduit à l'origine; en particulier, la série développée, qui est la série équivalente à la première de ces fractions régulières, est divergente dans tout le plan, sauf à l'origine. Les fractions régulières à réduites portées par les parallèles à la bissectrice de l'angle des axes μ, ν sont convergentes et ont pour valeur la fonction développée, dans tout le plan, coupé suivant une certaine demi-droite partant de l'origine.

Les résultats de M. Padé établissent un lien logique entre de nombreux travaux antérieurs jusqu'ici séparés les uns des autres; ils les généralisent et les complètent de telle sorte que ceux-ci viennent se fondre, comme cas particuliers, dans l'étude générale de la Table des réduites de l'unique catégorie de fonctions que l'auteur a définies dans l'énoncé de son problème.

En outre, ces résultats apportent une contribution à l'étude des séries divergentes, en montrant nettement comment la Table des réduites d'une fonction définie par une équation linéaire du premier ordre comporte des catégories de fractions continues dont les domaines de convergence ne sont pas nécessairement les mêmes : les unes et, parmi elles, celle qui a pour série équivalente le développement en série entière de la fonction, pouvant être divergentes dans tout le plan; les autres étant, au contraire, convergentes et ayant pour valeur la fonction, dans tout le plan, coupé suivant une certaine demi-droite.

Volterra (*Vito*). — Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes (401-517).

Cet important Mémoire est consacré à une étude systématique de l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ses sept premiers Chapitres ont fait l'objet de plusieurs Notes publiées successivement dans les Comptes rendus de l'Académie *dei Lincei*. Les deux derniers sont inédits. En voici le résumé d'après l'auteur lui-même :

Dans le premier Chapitre, je montre qu'il y a des cas d'équilibre pour les corps à connexion multiple, qui ne se présentent pas pour les corps à connexion simple. Le point de départ de ces recherches est le groupe de formules (I), (I′), (I″) du premier Chapitre. Lorsqu'on déforme un corps élastique, on peut calculer, par ces formules, les déplacements en connaissant les éléments caractéristiques de la déformation. Les formules (I), (I′), (I″) caractérisent la polydromie des déplacements et montrent qu'un corps élastique multiplement connexe, à déformation régulière, peut garder la déformation, étant en équilibre, sans l'action de forces extérieures. On obtient ces états d'équilibre par des opérations que j'ai appelées des *distorsions*.

Dans le deuxième Chapitre j'ai étudié les éléments qui caractérisent les distorsions.

La composition des tensions, qui sollicitent les éléments d'un corps élastique, sur lequel on a fait une ou plusieurs distorsions, donne lieu aux *efforts* que j'ai étudiés dans le Chapitre III. On peut exprimer l'énergie de déformation du corps élastique par les caractéristiques des distorsions et par celle des efforts ou par des formes bilinéaires de deux différentes espèces de caractéristiques. J'ai donné aussi dans ce Chapitre deux propositions fondamentales: le *théorème de réciprocité* pour les efforts et le *théorème des coupures équivalentes*.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des corps élastiques multiplement connexes et symétriques par rapport à un axe. La symétrie simplifie l'expres-

sion de l'énergie, et de cette expression simplifiée on peut tirer plusieurs théorèmes très singuliers sur la distribution des efforts.

Dans le Chapitre V, j'ai commencé des applications particulières afin de comparer les résultats du calcul à ceux de l'expérience, et je les ai continuées dans les Chapitres VI et VII. J'ai envisagé un cylindre creux, qui est un corps à connexion double, et j'ai calculé les formes qu'il doit prendre en l'assujettissant aux six distorsions élémentaires. On peut dessiner ces formes et les comparer avec celles qu'un gros cylindre creux de caoutchouc prend effectivement. Les dessins dont je viens de parler et les photographies du cylindre sont reproduits dans ces Chapitres.

Enfin, dans les Chapitres VIII et IX, j'ai étudié le problème suivant : *Déterminer les efforts en connaissant les distorsions d'un système formé par plusieurs parties déformables reliées rigidement entre elles.* On arrive par là à une théorie du même type que celle de Kirchhoff sur la distribution des courants électriques dans les fils.

J'ai ajouté aussi trois Notes : la première renferme une démonstration des formules (I), (I'), (I'') donnée par Cesarò, après la publication de mes résultats; dans la seconde j'ai exposé les élégantes expériences faites par M. Rolla dans le laboratoire de Physique de l'Université de Gênes, dirigé par M. Garbasso. Par des expériences très ingénieuses d'optique, faites sur un cylindre creux de gélatine, on peut distinguer les parties comprimées et celles dilatées lorsqu'on assujettit le cylindre à des distorsions. La troisième Note se rapporte à une méthode que M. Almansi vient de publier pour déterminer les déformations des cylindres à connexions multiples.

Padé (*Henri*). — Sur la généralisation des formules de Sylvester relatives aux fonctions qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm, et sur la convergence de la Table des réduites d'une fraction rationnelle. (519-534).

Les célèbres formules de Sylvester, pour la représentation des polynomes qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm, ont donné lieu à de très nombreux travaux : en rapprochant ces travaux de la théorie générale des réduites d'une fonction qu'il a constituée dans ses publications antérieures, M. Padé a été conduit à des formules qui comprennent comme cas très particulier celles de Sylvester. La première Partie du présent Mémoire a pour objet la démonstration de ces formules générales, relatives à la fraction rationnelle approchée générale non seulement d'une fraction rationnelle, mais d'un développement de Taylor absolument quelconque : en faisant découler de cette source les formules de Sylvester, l'auteur montre mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici la place qu'elles occupent dans la théorie des fractions continues algébriques, où elles ont, comme on l'a d'ailleurs reconnu, leur véritable origine.

Le problème qui consisterait à traiter complètement la question de la convergence de *toutes* les fractions continues holoïdes d'une Table de réduites (*voir* ci-dessus l'analyse du précédent Mémoire de M. Padé) semble des plus difficiles; il n'a été résolu que pour le cas de la fonction exponentielle. Aussi le cas de la fraction rationnelle, bien que relativement simple, offre-t-il un réel intérêt. Or les formules obtenues dans la première Partie permettent d'étudier la convergence des fractions continues holoïdes attachées à une frac-

tion rationnelle; c'est à cette étude qu'est consacrée la seconde Partie du Mémoire.

Riquier (*Charles*). — Sur les conditions d'intégrabilité complète de certains systèmes différentiels. (535-645).

Introduction. — Dans un Mémoire publié il y a quelques années (*Acta mathematica*, t. XXIII) nous avons formulé la définition des systèmes *orthonomes* et établi un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pareil système soit complètement intégrable. A cette règle on peut en substituer une autre qui présente le double avantage d'être, dans bien des cas, notablement plus simple et de s'appliquer à des systèmes différentiels notablement plus généraux.

Considérons d'abord un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et cela de telle façon qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre; attribuons ensuite aux diverses variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1 et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques (positives, nulles ou négatives); cela étant, l'application d'un procédé tout élémentaire permet de donner aux conditions initiales du système une forme telle que diverses circonstances (un peu longues à énumérer et dont on trouvera l'indication détaillée au n° 18) se trouvent réalisées. Nous conviendrons, en pareil cas, d'adopter, pour les conditions initiales, l'écriture à laquelle il vient d'être fait allusion, et nous désignerons alors par δ la cote minima des premiers membres du système proposé, par Γ la cote maxima des premiers membres des conditions initiales; enfin, adjoignant par la pensée aux équations du système toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations d'ordres quelconques, nous partagerons l'ensemble illimité résultant de cette adjonction en groupes limités successifs d'après les cotes croissantes δ, $\delta+1$, $\delta+2$, ... des premiers membres, et nous nommerons S_δ, $S_{\delta+1}$, $S_{\delta+2}$, ... les groupes dont il s'agit.

Cela posé, nous formulerons la proposition suivante :

Considérons un système différentiel satisfaisant à la double condition ci-après :

1° *Le système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, aucun des premiers membres n'est une dérivée de quelque autre, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale;*

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à* 1 *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies* (positives, nulles ou négatives), *chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités* (*inconnues et dérivées*) *dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Cela étant, et dans les limites où certaines restrictions d'inégalité (*concernant les valeurs numériques des variables indépendantes, des inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques*) *se trouvent satisfaites, il faut et il suffit, pour que le système soit complètement intégrable, qu'en éliminant entre les groupes*

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1},\quad S_{\Gamma+2}$$

les diverses dérivées principales qui ont pour cote l'un ou l'autre des entiers (algébriques)

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+1, \quad \Gamma+2,$$

les relations résultantes soient vérifiées identiquement (c'est-à-dire pour toutes valeurs numériques des variables, des inconnues et de leurs dérivées paramétriques).

Dans le cas où les diverses dérivées qui constituent les premiers membres du système proposé appartiennent à des inconnues toutes différentes, il n'y a pas de conditions d'intégrabilité et, dans celui où le système proposé est orthonome, aucune restriction d'inégalité n'est à formuler.

Voici un exemple très simple où la règle formulée ci-dessus présente un notable avantage sur la règle ancienne, tirée de la considération des dérivées *cardinales*. Supposons qu'un système, impliquant une fonction inconnue u des variables indépendantes $x, y, \ldots$, ait pour premiers membres toutes les dérivées d'ordre m de u, les seconds membres ne contenant, avec les variables $x, y, \ldots$, que l'inconnue u et ses dérivées d'ordre inférieur à m; pour ce système, visiblement orthonome, la nouvelle règle conduit à ne considérer que des dérivées d'ordre $m+1$; l'ancienne, au contraire, si l'on observe que les dérivées cardinales ont pour ordre maximum $2m$, exigerait (sauf le cas de $m=1$) un calcul beaucoup plus long et, parmi les conditions obtenues, un grand nombre se trouveraient n'être que de simples conséquences des autres.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS.

Tome XXXV; 1905-1906.

Bromwich (*T.-J.*). — Quelques contributions à la théorie de deux sphères électrisées. (1-12).

Lord Kelvin [1] a calculé la force entre deux sphères égales qui se touchent, au moyen d'une série double, laquelle ne converge malheureusement pas uniformément; en sorte que l'analyse de lord Kelvin ne permet pas de conclure à la valeur cherchée; toutefois la valeur donnée par lord Kelvin est exacte, comme l'auteur le montre autrement.

La densité superficielle, immédiatement avant le contact, au point où celui-ci va se produire, a été calculée correctement par Kirchhoff. M. Bromwich la retrouve autrement, par une méthode connexe à celle qu'il a suivie pour la solution du premier problème.

Cunningham (*A.*). — Tables de puissances. (13-24).

Nombreuses corrections.

---

[1] *Philos. Magazine*, 1853.

Glaisher (*J.-W.*). — Sur les fonctions elliptiques et les fonctions zêta de $\frac{2}{3}$K. (25-45).

Ce travail se relie à divers autres Mémoires de M. Burnside (*Messenger*, t. XII) et de l'auteur (*Proceedings of the London mathematical Society*, 2e série, t. II); parmi les très nombreuses formules qu'il contient, on remarquera, dans les développements en série suivant les puissances de q, le rôle joué par certaines fonctions numériques, comme l'excès du nombre des diviseurs de la forme $4k+1$ (ou $3k+1$) de n sur le nombre de diviseurs de la forme $4k+3$ (ou $3k+2$), la somme des diviseurs impairs, et les propriétés de ces fonctions qui résultent de ces développements.

Burnside (*W.*). — Sur les groupes finis pour lesquels tous les sous-groupes de Sylow sont cycliques. (46-50).

Burnside (*W.*). — Sur une propriété générale des groupes finis irréductibles de substitutions linéaires. (51-55).

Généralement un groupe fini irréductible de substitutions linéaires a cette propriété que, pour quelque sous-groupe, autre que celui qui consiste dans la substitution identique seule, il y ait une fonction linéaire des variables qui reste absolument invariable. M. Burnside détermine et classe tous les groupes irréductibles qui n'ont pas cette propriété.

Dans le cas où le groupe est une puissance d'un nombre premier p, les seules exceptions sont un groupe cyclique à une seule variable et un groupe d'ordre $2n$ à deux variables, contenant seulement une opération d'ordre 2.

Le cas général donne encore lieu à une classification très simple. Les résultats obtenus dans la présente Note dépendent de la Note précédente.

Jourdain (*P.-H.*). — La définition d'une suite ordonnée semblablement à la suite de tous les nombres ordinaires. (56-58).

Hill (*M.-J.*). — Sur les séries pour le sinus et le cosinus. (58-69).

Démonstration élémentaire fondée sur l'identité

$$3^n \sin\frac{2}{3^n} - \sin x = 4\left[\sin^2\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + \ldots + 3^{n-1}\sin\frac{x}{3^n}\right].$$

Guldberg (*A.*). — Sur les équations aux différences linéaires et homogènes. (70-72).

Méthode pour reconnaître si une telle équation, à coefficients rationnels, est irréductible ou non.

Holden (*H.*). — Sur diverses expressions du nombre h de classes proprement primitives pour un déterminant p, où $-p$ est un nombre premier de la forme $4n+3$. Premier Mémoire. (73-80).

Le Mémoire de M. Holden contient un très grand nombre de formules où figure le nombre h; voici deux des plus simples :

Si l'on suppose

$$4\frac{x^p-1}{x-1} = Y^2 + pZ^2,$$

en désignant par Y, Z des polynomes en x, à coefficients entiers, on a

$$\left(\frac{dZ}{dx}\right)_{x=1} = -h, \qquad \left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)_{x=1} = \frac{(p-3)h}{2}.$$

Taylor (*H.-G.*). — Sur quelques découpages géométriques. (81-101).

Nombreuses transformations de polygones en polygones équivalents.

Holden (*H.*). — Sur diverses expressions du nombre h de classes proprement primitives de déterminant $-p$, où p est un entier de la forme $4n+3$, et est premier ou le produit de nombres entiers différents. Deuxième Mémoire. (102-110).

Holden (*H.*). — Sur diverses expressions du nombre h de classes proprement primitives de déterminant négatif, ne contenan pas de facteur carré. Troisième Mémoire. (110-117).

Hilton (*H.*). — Groupe de soustraction et de division. (117).

Muir (*Th.*). — Égalité de deux déterminants composés d'ordre $n-1$. (118-121).

Considérons n Tableaux rectangulaires contenant chacun $n-1$ lignes et n colonnes; on forme deux déterminants : la $r^{\text{ième}}$ colonne du premier a pour élément les n déterminants du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre tirés du $r^{\text{ième}}$ Tableau; dans le second déterminant la $r^{\text{ième}}$ colonne a pour éléments les $n-1$ déterminants du $n^{\text{ième}}$ ordre en adjoignant au $r^{\text{ième}}$ Tableau une ligne du $n^{\text{ième}}$ Tableau : ces deux déterminants sont égaux.

Kapteyn (*W.*). — Sur le développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions de Bessel. (122-125).

Les formules

$$\int_0^\infty \frac{1}{z} J_m(z) J_n(z)\, dz = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{m-n}{2}\pi}{m^2-n^2} \qquad (m \neq n),$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{z} J_n^2(z)\, dz = \frac{1}{2n},$$

où J_m, J_n sont des fonctions de Bessel de première espèce, fournissent sans

peine les coefficients C_n d'un développement de la forme

$$\varphi(z) = C_1 J_1(z) + C_3 J_3(z) + C_5 J_5(z), \qquad \ldots,$$

supposé possible.

M. Kapteyn montre que le développement sera possible si la fonction $\varphi(z)$ est impaire, s'annule pour $z = 0$, est continue pour toutes les valeurs réelles de la variable et satisfait en outre à la condition

$$\int_0^\infty \frac{J_1(t)}{t} [\varphi(t+\gamma) + \varphi(t-\gamma)]\, dt = 2\, \frac{d\varphi(\gamma)}{d\gamma}.$$

Hardy (*G.-H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral (XVII). (126-130).

Si $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, A), si $\varphi(x)$ peut être développé en une série de fonctions continues

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots,$$

uniformément convergente dans l'intervalle $(a, A - \varepsilon)$, si petit que soit le nombre positif ε; si, en posant

$$\overline{\varphi(x)} = |\varphi_0(x)| + |\varphi_1(x)| + \ldots,$$

l'intégrale

$$\int_a^A \overline{\varphi(x)}\, dx$$

est convergente, on aura

$$\int_a^A \varphi f\, dx = \sum \int_0^A \varphi_n f\, dx.$$

Bromwich (*T.-J.*). — Règles classiques élémentaires du Calcul intégral. (131-141).

L'auteur insiste avec raison sur la façon insuffisante dont, dans nombre de formules élémentaires de Calcul intégral, sont spécifiés les signes de certaines quantités ou les valeurs de certaines fonctions ambiguës.

Nanson (*E. J.*). — Séries de puissances pour $\sin x$, $\cos x$. (132-144).

Démonstration élémentaire.

Hardy (*G.-H.*). — Une formule pour les facteurs premiers d'un nombre quelconque. (145-146).

Expression, d'un caractère analytique, d'une fonction $\theta(x)$ qui, pour des valeurs naturelles de x, est égale au plus grand facteur premier de x.

Cunningham (*E.*). — Sur la réversion d'un développement asymptotique. (147-149).

Lees (*Ch.*). — Sur une extension de la méthode de Fourier pour développer une fonction en une série de sinus et de cosinus. (149-158).

L'auteur signale un cas étendu où un développement de la forme

$$f(x) = b_0 + b_1 \cos\beta_1 x + b_2 \cos\beta_2 x + \ldots$$
$$+ a_1 \sin\alpha_1 x + a_2 \sin\alpha_2 x + \ldots$$

est possible.

Hardy (*G. H.*). — Notes sur quelques points de Calcul intégral (XVIII). (158-166).

La Note de M. Hardy concerne principalement l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax - b\sin x)}{x}\,dx,$$

où a et b sont réels, et qui jouit de propriétés curieuses. En particulier, elle est discontinue pour toutes les valeurs entières de a.

Cunningham (*A.*). — Décompositions pelliennes de grands nombres. (166-185).

Il s'agit de la décomposition de nombres N de la forme $y^2 + 1$, déduites de solutions connues de l'équation de Pell $y^2 - Dx^2 = -1$.

Glaisher (*J.-W.*). — Note sur un développement de $(1 + x)^k$ en fonctions de Legendre. (186-189).

Si $k = r - \frac{1}{2}$ est la moitié d'un nombre impair, la forme du développement change après le $r^{\text{ième}}$ terme.

Burnside (*W.*). — Sur la figure formée par un pentagone régulier et la droite de l'infini. (190-192).

L'auteur montre comment cette figure fournit une représentation intuitive du groupe icosaédrique.

J. T.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. In-4° (1).

Tome XIII, mai 1904 à avril 1905.

Korteweg (*D.-J.*). — Nicolaas Theodoor Michaelis, *In memoriam*. (3-4).

Van der Stok (*J.-P.*). — Une période de vingt-six jours dans les moyennes journalières du baromètre. (5-21).

Julius (*W.-H.*). — Sur les bandes de dispersions dans les spectres d'absorption. (26-32, 1 pl.).

Schuh (*Fr.*). — Sur une expression de la classe d'une courbe plane algébrique à singularités supérieures. (57-60).

Définition de la classe d'une courbe plane algébrique, donnée par une équation en coordonnées ponctuelles, comme le nombre des points d'intersection mobiles de cette courbe avec la première courbe polaire d'un point arbitraire P qui ne se trouve pas sur la courbe, ni sur une des tangentes dans un point multiple, ni sur une tangente à contact supérieur.

Démonstration du théorème suivant :

Soient P *un point de l'ordre* t' *de la courbe* (*c'est-à-dire que* t' *représente pour les droites par* P *le minimum du nombre des points d'intersection avec la courbe coïncidant avec* P) *et* S *un point quelconque de l'ordre* t *de la courbe. Supposons que la droite* PS *coupe la courbe en* w *points coïncidant avec* S. *Alors la classe de la courbe est égale à* t' *augmentée de la somme des différences* $w - t$ *prises par rapport à tous les points* S *de la courbe, sous la condition qu'on prenne pour la droite* PS *toutes les droites par* P *quand* S *coïncide avec* P.

Ici, au lieu de s'occuper de *tous* les points S et de *toutes* les droites par P quand S coïncide avec P, on peut se restreindre à tous les points S et toutes les droites par P qui contribuent à augmenter $\sum (w - t)$.

Le cas particulier $t' = 0$ où P est un point quelconque du plan.

Landau (*Edm.*) — Remarques sur le Mémoire de M. Kluyver : Séries dérivées de la série $\sum \frac{\mu(m)}{m}$. (71-83).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIX$_2$, p. 115.

Dans sa dernière Communication [1], M. Kluyver s'est occupé de la série

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(mb+h)}{mb+h},$$

où b et h représentent deux nombres entiers positifs et où l'on peut supposer $h \leqq b$ sans nuire à la généralité. Toutefois, ses recherches ne fournissent pas la preuve que la série en question est convergente, c'est-à-dire que, pour chaque couple de valeurs b, h, l'expression $\lim A_{x=\infty}$ existe. Ici M. Landau supplée à cette démonstration en se basant sur une étude antérieure (*Sitzungsber. der Wiener Akad.*, t. CXII, p. 493-535).

Schuh (*Fr.*). — Sur une expression du genre d'une courbe plane algébrique à singularités supérieures. (127-132).

Démonstration du théorème suivant :

Le genre d'une courbe plane algébrique qui est coupée par les courbes d'un faisceau complanaire en n' points mobiles, ces points d'intersection se distribuant pour les différentes courbes de ce faisceau sur $N_1, N_2, \ldots$ *branches de la courbe fixe, est représenté par l'expression*

$$1 - n' + \frac{1}{2} \sum_i (n' - N_i),$$

où la somme $\sum_i (n' - N_i)$ *s'étend à toutes les courbes du faisceau.*

Dans cette démonstration, l'auteur commence par le cas d'un faisceau de droites pour considérer ensuite le cas d'un faisceau de courbes rationnelles. Il ne passe du dernier cas à celui d'un faisceau quelconque qu'avec hésitation, à l'aide de raisonnements moins rigoureux. Il remarque que les courbes rationnelles du faisceau qui contribuent à augmenter $\sum_i (n' - N_i)$ sont : 1° celles qui passent à l'origine d'une branche superlinéaire, ce point étant distinct des points de base du faisceau; 2° celles qui touchent la courbe fixe en un point distinct des points de base; 3° celles où deux ou plusieurs des points d'intersection mobiles se trouvent sur la même branche de la courbe fixe tout à proximité d'un point de base. Ainsi, le théorème donné se base principalement sur la détermination du nombre des courbes du faisceau qui touchent la courbe fixe et des changements que subit ce nombre à cause des singularités supérieures de cette courbe. Or, il est très difficile de s'imaginer que le genre des courbes du faisceau puisse influencer ce résultat; car, dans les deux cas, celui d'un faisceau de courbes rationnelles et celui d'un faisceau de courbes admettant un genre différent de zéro, les coefficients de l'équation de la courbe variable satisfont à un nombre de conditions linéaires égal au nombre des conditions nécessaires à la détermination de cette courbe moins *un*. Exemple : le nombre des cubiques d'un faisceau qui touchent une courbe donnée.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIX, p. 147.

L'expression donnée par l'auteur se distingue de toutes les autres qu'on a proposées, en ce qu'on voit tout de suite qu'elle est invariante par rapport à des transformations rationnelles, parce qu'elle est exprimée en quantités, chacune desquelles jouit de cette propriété.

Schuh (*Fr.*). — Sur le nombre des courbes d'un faisceau qui touchent une courbe complanaire algébrique à singularités supérieures. (133-138).

A l'aide des considérations de l'étude précédente, l'auteur résout la question de la détermination du nombre des courbes d'un faisceau, tangentes à une courbe C_n de l'ordre n, de la classe k et du genre g. Il trouve le théorème suivant :

Soit n' le nombre des points d'intersection mobiles de la courbe C_n de l'ordre n et de la classe k avec les courbes du faisceau; supposons que w de ces points coïncident avec l'origine S d'une branche de l'ordre t de C_n. Alors on a

$$\sum_i (w_i - t_i) = k + 2(n' - n),$$

ou la somme $\sum_i (w_i - t_i)$ s'étend aux origines S de toutes les branches de C_n, aussi à celles qui coïncident avec un point de base.

Ce théorème résout le problème de contact posé. Discussion. Étude de plusieurs cas particuliers.

Van der Waals (*J.-D.*). — La déduction de la formule faisant connaître la composition des phases coexistantes dans les mélanges binaires (145-151).

Autrefois l'auteur a remplacé la formule

$$\mathrm{MRT}\, l\, \frac{x_1}{1 - x_1}\, \frac{1 - x_2}{x_2} = \left(\frac{\frac{da}{dx}}{v} - \mathrm{MRT}\, \frac{\frac{db}{dx}}{v - b} \right)$$

par

$$l\, \frac{x_1}{1 - x_1}\, \frac{1 - x_2}{x_2} = \frac{f}{\mathrm{T}}\, \frac{d\mathrm{T}_k}{dx} + \frac{1}{p_k}\, \frac{dp_k}{dx}.$$

Ici il fait voir comment la dernière formule se transforme quand, dans l'équation d'état, on suppose la quantité b indépendante du volume.

Van Dalfsen (*B.-M.*). — Sur la fonction $\frac{a}{b}$ des mélanges multiples. (167-181).

Les quantités a et b de ce quotient sont les constantes de l'équation d'état de Van der Waals appliquée à un mélange de n composantes; alors $\frac{a}{b}$ est

proportionnel à la température critique de ce mélange, déterminé par les fractions moléculaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$, où $\sum x = 1$. De plus, a et b sont représentés par les formes homogènes quadratiques

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{pq} x_p x_q \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} b_{pq} x_p x_q.$$

L'auteur s'occupe principalement de la question s'il y a un mélange pour lequel $\frac{b}{a}$ est stationnaire.

Easton (*C.*). — Les nébuleuses considérées dans leurs rapports avec le système galactique. (189-199).

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Zakrzewski* (*C.*). — La détermination des conditions d'équilibre des phases gazeuse et fluide de mélanges de gaz à des températures basses. (199-206, 1 pl.).

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Zakrzewski* (*C.*). — La validité de la loi des états correspondants pour des mélanges de chlorure de méthyle et d'acide carbonique. (207-111, 380-386).

Versluys (*W.-J.*). — Sur la relation entre le rayon de courbure R d'une courbe gauche en un point P et le rayon de courbure r en P de la section de la surface développable de cette courbe avec le plan osculateur au point P. (271-275).

L'auteur démontre, d'abord pour la cubique gauche, ensuite pour une courbe gauche quelconque, qu'on a la relation $4R = 3r$.

Kluyver (*J.-C.*). — Évaluation de deux intégrales définies. (276-280).

Les intégrales

$$f(x, m) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{(1+t^2)^m} dt, \qquad \varphi(x, m) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{(1+t^2)^m} dt$$

ont une signification déterminée, pour x réel, pourvu que la partie réelle du paramètre m soit positive. L'auteur trouve

$$f(x, m) = \frac{\pi}{2\cos\pi m} \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(m)} \left| \mathrm{L}(x, m) + \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \mathrm{M}(x, m) \right|,$$

$$\varphi(x, m) = \frac{\pi}{2\sin\pi m} \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(m)} \left| \mathrm{N}(x, m) + \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \mathrm{M}(x, m) \right|.$$

où

$$L(x, m) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h}}{h!\,\Gamma\left(-m+\frac{3}{2}-h\right)}, \qquad M(x, m) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h}}{h!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+h\right)},$$

$$N(x, m) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h+1}}{\Gamma\left(h+\frac{3}{2}\right)\Gamma(-m+2+h)}.$$

De Vries (*J.*). — Sur la congruence des coniques situées sur les surfaces cubiques d'un faisceau. (281-284).

Les couples de droites des coniques dégénérées de la congruence se trouvent sur le lieu O_{42} des trisécantes de la courbe de base C_9; cette courbe est une courbe de la multiplicité 11 sur O_{42}.

La surface (P) des coniques de la congruence dont les plans passent par P est de l'ordre 111.

La surface (l) des coniques qui rencontrent la droite l est de l'ordre 288.

Les coniques qui passent par un point donné de la courbe de base C_9 engendrent une surface de l'ordre 94.

La surface O_{42} des trisécantes admet une courbe double de l'ordre 255.

Les paraboles de la congruence engendrent une surface de l'ordre 354, leurs plans enveloppent une surface de la classe 138.

Weeder (*J.*). — Une nouvelle méthode d'interpolation avec compensation appliquée à la réduction de la position et de la marche de l'horloge principale de l'Observatoire de Leyde, la pendule Howü 17, à l'aide des observations avec l'instrument de passage en 1903. (302-322).

Schoute (*P.-H.*) et *Cardinaal* (*J.*). — Rapport sur un Mémoire de M. A. Toxopeus intitulé : *Les nombres des hyperespaces quadratiques dans l'espace à cinq dimensions.* (326-327).

De Vries (*J.*). — Sur une congruence de coniques d'ordre et de classe 2. (355-358).

Soient Q^2 une quadrique quelconque et $[R^2]$ un réseau de quadriques.

Supposons qu'on ait établi une correspondance projective entre les plans tangents π de Q^2 et les surfaces R^2 de $[R^2]$. Alors les ∞^2 coniques d'intersection des couples d'éléments correspondants (π, R^2) forment une congruence (2, 2) de coniques.

Les coniques (π, R^2) situées en des plans π passant par un point fixe T engendrent une surface T^6 de l'ordre 6, dont T est un point biplanaire.

Les coniques dégénérées engendrent une surface de l'ordre 27; les coniques s'appuyant sur une droite donnée engendrent une surface de l'ordre 28.

Korteweg (*D.-J.*) et *de Lange* (*D.*). — Les points ombilicaux double et multiple comme singularités du premier ordre d'exception de surfaces générales en coordonnées ponctuelles. (388-398)

Si l'on varie d'une manière continue les paramètres figurant dans l'équation cartésienne d'une surface, la surface elle-même varie généralement d'une manière continue. Alors deux ou plusieurs des points singuliers qui se présentent en nombre fini, comme les points de plissement, les points ombilicaux, etc., peuvent se réunir en un même point, point de coïncidence double ou multiple de cette espèce. Comme le montrent les résultats, il y a ordinairement plus d'un mode de coïncidence; quelques-uns de ces modes correspondent à une condition unique entre les coefficients de l'équation, tandis que d'autres ne peuvent se présenter que si plusieurs conditions entre ces coefficients sont remplies. Les auteurs s'occupent seulement de la première catégorie.

Les particularités du premier ordre qui s'interprètent comme des points de plissement multiples ont été étudiées par M. Korteweg en 1889 et 1890 (¹); il trouvait deux espèces de points de plissement doubles, les points homogènes et les points hétérogènes; les points d'osculation équivalent à des points de plissement triples et chaque point double correspond à 24 points de plissement coïncidés. Dans cette Communication-ci, les auteurs font connaître les résultats analogues pour les points ombilicaux :

a. Le point ombilical double à distance finie. Les trois espèces. Résultats d'une considération plus rigoureuse.

b. Le point double d'une surface dont l'équation en coordonnées ponctuelles est générale équivaut à douze points ombilicaux. Les points ombilicaux à l'infini. Considérations générales.

c. Le point de contact d'une surface générale avec le plan à l'infini comme point ombilical quadruple.

d. Le point de contact d'une surface générale avec le cercle commun à toutes les sphères comme point ombilical double.

e. Les points de la courbe spinodale situés à l'infini comme points ombilicaux simples, si la tangente se trouve à l'infini.

f. Les points d'intersection de la surface avec le cercle commun à toutes les sphères comme points ombilicaux simples, si l'une des deux tangentes dans le plan tangent se trouve à l'infini.

Application des résultats aux quadriques.

Schoute (*P.-H.*). — L'équation qui détermine les angles entre deux espaces polydimensionaux. (409-410).

Solution du problème suivant :

Dans un espace E_n *à n dimensions, on donne un système de coordonnées rectangulaires* $O(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *et un espace* E_p *passant par* O *représenté*,

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIX, p. 129.

par rapport à ce système, par les équations

$$x_{p+1} = a_{1,i}x_1 + a_{2,i}x_2 + \ldots + a_{p,i}x_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-p);$$

à déterminer les p angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *entre cet espace* E_p *et l'espace de coordonnées* $O(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ *dans la supposition que ces deux espaces à p dimensions n'admettent pas d'autre point commun que* O.

Soient P un point quelconque de E_p et Q sa projection sur $O(X_1, X_2, \ldots, X_p)$. Alors l'angle $POQ = \alpha$ est déterminé par la relation

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{OP^2 - OQ^2}{OQ^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-p}(a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{p,i}x_p)^2}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}.$$

Considérons en E_p les points P dont les coordonnées vérifient l'équation

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n-p}(a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{p,i}x_p)^2 = 1,$$

exprimant que la projection Q de P sur $O(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ se trouve sur l'espace quadratique représentée par (1). Alors on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{OQ}.$$

Représentons par $b_1, b_2, \ldots, b_p$ les demi-axes de l'espace quadratique (1). Alors

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{1}{b_1}, \qquad \operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{1}{b_2}, \qquad \ldots, \qquad \operatorname{tang}\alpha_p = \frac{1}{b_p}.$$

A l'aide des substitutions

$$\sum_{i=1}^{n-p} a_{k,i}^2 = A_{k,k} \qquad \sum_{i=1}^{n-p} A_{k,i}a_{l,i} = A_{k,l}$$

l'équation (1) prend la forme symbolique $(A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_px_p)^{(2)} = 1$; donc, l'équation séculaire

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{21} & \ldots & A_{p,1} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & \ldots & A_{p,2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,p} & A_{2,p} & \ldots & A_{p,p} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

fait connaître par ses racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les coefficients de l'équation de l'espace quadratique réduite aux axes. Enfin, les relations

$$\lambda_1 = \frac{1}{b_1^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{b_2^2}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_p = \frac{1}{b_p^2}$$

font voir qu'on obtient l'équation demandée en remplaçant λ en (2) par $\operatorname{tang}^2 \alpha$.

Cardinaal (*J.*). — Le lieu géométrique des axes principaux d'un faisceau de quadriques. (411-416).

L'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* mentionne que M. Trebitscher a déterminé l'enveloppe des axes d'un faisceau de coniques, tandis qu'on n'y trouve rien par rapport à la question analogue de la théorie des quadriques.

Ici, M. Cardinaal s'occupe du lieu des axes d'un faisceau de quadriques, une surface gauche du neuvième ordre, admettant comme courbe triple la cubique gauche qui forme le lieu des centres; cette surface à cône directeur cubique admet aussi une courbe double de l'ordre 18, de manière que son genre est l'unité. La différence entre l'ordre de la surface et de son cône directeur est due à ce que six des génératrices de la surface se trouvent à l'infini.

Ensuite, l'auteur étudie en détail le cas particulier où la courbe de base du faisceau s'appuie en deux points sur le cercle commun à toutes les sphères, où la surface S^9 se décompose en une surface S^6 et une surfaee S^3 dont la première passe deux fois, la seconde une fois par la cubique gauche des centres, tandis que S^6 admet encore une courbe double de l'ordre 7.

Kapteyn (*W.*). — Sur les valeurs de quelques intégrales définies en rapport avec des fonctions de Bessel. (416-418).

L'auteur considère l'intégrale

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{f(x, \theta, \varphi)}{\cos\theta + \cos\varphi}\, d\theta,$$

où $f(x, \theta, \varphi)$ représente successivement

1° $\cos(x \sin\theta) - \cos(x \sin\varphi)$,

2° $\sin(x \sin\theta) \sin\theta - \sin(x \sin\varphi) \sin\varphi$,

3° $\cos(x \cos\theta) - \cos(x \cos\varphi)$,

4° $\sin(x \cos\theta) \cos\theta - \sin(x \cos\varphi) \cos\varphi$.

En représentant par I_p la fonction $I_p(x)$ de Bessel de l'ordre p, il trouve en ces quatre cas

$$P_1 \sin\varphi = -4\pi[I_2 \sin 2\varphi + I_4 \sin 4\varphi - I_6 \sin 6\varphi + \ldots],$$
$$P_2 \sin\varphi = -2\pi[(I_3 - I_1) \sin 2\varphi + (I_5 - I_3) \sin 4\varphi + \ldots],$$
$$P_3 \sin\varphi = 4\pi[I_2 \sin 2\varphi - I_4 \sin 4\varphi + I_6 \sin 6\varphi - \ldots],$$
$$P_4 \sin\varphi = -2\pi[I_1 \sin 2\varphi - I_3(\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) + I_5(\sin 4\varphi + \sin 6\varphi) - \ldots],$$
$$= -4\pi \cos\varphi[I_1 \sin\varphi - I_3 \sin 3\varphi + I_5 \sin 5\varphi - \ldots].$$

Sommerfeld (*A.*). — Déduction simplifiée du champ et des forces agissant sur un électron en mouvement. (431-452).

Dans les *Göttinger Nachrichten*, l'auteur a communiqué des formules gene-

rales pour le champ d'un électron se mouvant d'une manière quelconque, d'une apparence plus simple que les formules potentielles de M. Lorentz. La différence est la suivante : les formules de M. Sommerfeld représentent les potentiels à l'aide d'une intégrale simple par rapport au temps parcouru, où entrent seulement des distances variables d'un point fixe au centre de l'électron, supposé sphérique; au contraire, les formules antérieures pour les potentiels ralentis contiennent des intégrales doubles ou triples qui s'étendent sur l'espace de la charge et où entre en même temps la distance du point fixe à la position antérieure de la charge. Seulement pour des cas particuliers, M. P. Hertz, dans sa thèse (Göttingen, 1904), a appliqué une méthode capable de remplacer l'investigation générale de M. Sommerfeld, en faisant usage, pour la loi de la formation des potentiels, de l'image d'une sphère creuse se contractant avec la vitesse de la lumière. Dans les *Göttinger Nachrichten*, M. Sommerfeld s'est servi d'une représentation à l'aide d'intégrales de Fourier; ici il s'appuie exclusivement sur le théorème de Green. Alors le potentiel prend la forme d'une intégrale quadruple, une intégration se rapportant au temps, les trois autres à l'espace. En intégrant d'abord suivant le temps, il retrouve les équations de Lorentz; en intégrant d'abord suivant l'espace, il aboutit à ses propres formules.

1. Introduction.
2. Théorème de Green.
3. Transition aux formules de Lorentz et de Sommerfeld.
4. Le champ d'un mouvement stationnaire, surtout pour des vitesses surpassant celle de la lumière.
5. Les forces exercées par le champ sur l'électron, surtout dans le mouvement stationnaire avec une vitesse surpassant celle de la lumière.

Blok (*S.*). — La jonction du réseau triangulaire du premier ordre de Soumatra méridional à celui de la côte occidentale de Soumatra. (471-477, 1 pl.).

Kapteyn (*W.*). — Sur une série à fonctions de Bessel. (477-483).

Détermination de la somme de la série

$$I_1(\alpha)\,I_1(x) + 3\,I_3(\alpha)\,I_3(x) + 5\,I_5(\alpha)\,I_5(x) + \ldots = \sum_{1,3\ldots}^{\infty} n\,I_n(\alpha)\,I_n(x).$$

L'auteur trouve d'abord

$$S = \sum_{1,3,\ldots}^{\infty} I_n(x)\cos n\varphi = \int_0^x e^{2\left(t-\frac{1}{t}\right)}(1-t^2)\,R,$$

ou

$$R = \frac{\cos\varphi}{1-2t^2\cos 2\varphi + t^4}.$$

Il en déduit par différentiation

$$\sum_{1,3\ldots}^{\infty} n\,I_n(x)\sin n\varphi = \int_0^x e^{2\left(t-\frac{1}{t}\right)}(1-t^2)\,\frac{dR}{d\varphi}$$

L'intégration de cette équation, multipliée par $\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\sin\varphi)\,d\varphi$, entre les limites 0 et π, donne ensuite

$$\sum_{1,3,\ldots}^{\infty} n\,I_n(x)\,I_n(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 e^{2\left(t-\frac{1}{t}\right)}(1-t^2)\int_0^{\pi} R\cos(\alpha\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi,$$

ce qui fait trouver d'abord

$$\sum_{1,3,\ldots}^{\infty} n\,I_n(x)\,I_n(\alpha) = \frac{\alpha}{4}\left[I_1(x-\alpha)+I_1(x+\alpha)\right]$$
$$-\frac{\alpha}{4}\int_0^{\alpha}\frac{I_1(\beta)}{\beta}\,d\beta\left[I_0(x-\alpha-\beta)-I_0(x+\alpha-\beta)\right],$$

et ensuite

$$\sum_{1,3,\ldots}^{\infty} n\,I_n(x)\,I_n(\alpha) = \frac{\alpha}{4}\int_0^{x} I_0(x-\gamma)\left[\frac{I_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}-\frac{I_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right]d\gamma.$$

Schoute (*P.-H.*) — Les théorèmes de Guldin dans l'espace polydimensional (484-490).

Dans l'espace d'opération E_n à n dimensions, on s'imagine un espace axial $E_p^{(a)}$ et dans un E_{p+1} quelconque passant par $E_p^{(a)}$ et situé en E_n une partie limitée L à $p+1$ dimensions, n'ayant pas un seul point en commun avec $E_p^{(a)}$. Si L tourne en E_n autour de $E_p^{(a)}$, un point quelconque P de L décrit une variété sphérique situé dans l'espace E_{n-p} normal à $E_p^{(a)}$ et passant par P; si Q est la projection de P sur $E_p^{(a)}$, cette variété sphérique à centre Q et à rayon PQ forme en E_{n-p} le lieu des points situés à une distance PQ de Q.

Démonstration des deux théorèmes suivants réunis en un seul :

On trouve le volume (*la surface*) *de la figure de révolution* (L) *en multipliant le volume* (*la surface*) *de* L *par la surface d'une variété sphérique* Sp_{n-p} *dont le rayon est le rayon d'inertie de l'ordre* $n-p-1$ *du volume* (*de la surface*) *de* L *par rapport à* $E_p^{(a)}$.

Le rayon d'inertie de l'ordre $n-p-1$ figurant dans ce théorème est défini de la manière suivante : Soit $d\mu$ un élément de volume (de la surface) de L et posons

$$\int_L x^{n-p-1}\,d\mu = \bar{x}^{n-p-1}\int_L d\mu,$$

les deux intégrales étendues à tous les éléments de L; alors $\bar{x}$ est le rayon d'inertie de l'ordre $n-p-1$ du volume (de la surface) de L.

Applications :

1. Soit L un segment $Sp_{n-1}(r,\rho)$ d'une variété sphérique Sp_n, r et ρ représentant les rayons de la variété sphérique et de sa base.

Supposons que ce segment engendre un *segment de révolution* $Sp(r, \rho, \alpha)_n$ par la rotation autour d'un espace axial $E_{n-2}^{(a)}$ de son espace E_{n-1} qui n'admet pas un point commun avec $Sp_{n-1}(r, \rho)$ et fait avec l'espace E_{n-2} de la base de $Sp_{n-1}(r, \rho)$ un angle α. Alors on a :

a. On trouve le volume du segment de révolution $Sp(r, \rho, \alpha)_n$ en multipliant le volume de la variété sphérique Sp_n à rayon ρ par $\cos\alpha$.

b. On trouve la surface du segment de révolution $Sp(r, \rho, \alpha)_n$, parcouru par la surface de la variété sphérique limitante de $Sp_{n-1}(r, \rho)$, en multipliant le volume de la projection de la base de $Sp_{n-1}(r, \rho)$ sur l'espace axial E_{n-2}^{a} par $2\pi r$.

2. Le groupe annulaire (extension polydimensionale du tore).

Soit L la variété sphérique $Sp_{n-k}(r)$ et supposons que cet espace tourne autour d'un espace $E_{n-k-1}^{(a)}$ de son espace E_{n-k} : soit $a > r$ la distance du centre de Sp_{n-k} à E_{n-k} et représentons par $T(r, a)_{n,k}$ la figure de révolution, par $V(r, a)_{n,k}$ son volume, par $S(r, a)_{n,k}$ sa surface. Alors on a

$$V(r, a)_{n,k} = s_{k+1} v_{n-k-1} \int_{-a}^{a} \sqrt{r^2 - x^2}^{\,n-k-1} (a + x)^k \, dx,$$

$$S(r, a)_{n,k} = r s_{k+1} s_{n-k-1} \int_{-a}^{a} \sqrt{r^2 - x^2}^{\,n-k-2} (a + x)^k \, dx,$$

d'où l'on tire la relation générale

$$S_{n,k} = 2\pi r V_{n-2,k}.$$

Dans les équations que nous venons de copier, les coefficients s et v devant le signe intégrale sont des constantes; v_t et s_t indiquent les rapports de volume et de surface

$$v_t = \frac{V}{r^t}, \qquad s_t = \frac{S}{r^{t-1}}$$

d'une variété sphérique $Sp_t(r)$ dont V et S représentent le volume et la surface. Jusqu'à $t = 12$, on a

t	2	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
v_t	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi^2$	$\frac{8}{15}\pi^2$	$\frac{1}{6}\pi^3$	$\frac{16}{105}\pi^3$	$\frac{1}{24}\pi^4$	$\frac{32}{945}\pi^4$	$\frac{1}{120}\pi^5$	$\frac{64}{10395}\pi^5$	$\frac{1}{720}\pi^6$
s_t	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8}{3}\pi^2$	π^3	$\frac{16}{15}\pi^3$	$\frac{1}{3}\pi^4$	$\frac{32}{105}\pi^4$	$\frac{1}{12}\pi^5$	$\frac{64}{945}\pi^5$	$\frac{1}{60}\pi^6$

Lorentz (H.-A.). — Le mouvement des électrons dans les métaux (493-508, 565-573, 710-719).

Si l'on s'imagine que chaque métal contient un grand nombre d'électrons libres, se mouvant avec une vitesse dépendant de la température dans l'espace intermédiaire entre les atomes métalliques, on arrive à une explication du pouvoir de conduction pour l'électricité et la chaleur des courants thermoélectriques, de l'effet de Thomson, de l'effet de Hall et de plusieurs autres phénomènes, comme l'ont démontré surtout MM. E. Riecke, P. Drude et J.-J. Thomson. Ici l'auteur applique à ces phénomènes une méthode différente.

1. Suppositions simplificatives : le métal ne contient qu'une espèce d'électrons libres admettant tous la même charge e et la même masse m; l'unité de volume contient N de ces électrons à énergie cinétique moyenne αT, où T est la température absolue et α une constante. Le mouvement rectiligne des électrons est borné principalement par les chocs contre les atomes métalliques, par rapport à l'influence desquels celle des chocs des électrons entre eux peut être négligée.

2. Détermination du nombre ν indiquant le surplus des particules se mouvant dans l'unité de temps à travers l'unité de section, normale à la direction principale du problème, comparé d'abord aux mouvements dans un barreau cylindrique, dans la direction positive, sur celles qui se meuvent en sens contraire, et de l'énergie de chaleur W correspondante. En désignant par $f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda$ le nombre des points de vitesse (ξ, η, ζ) de l'élément $d\lambda$, par dS l'élément de volume, l'auteur trouve

$$N = \int f(\xi, \eta, \zeta)\, dS, \qquad \nu = \int f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda, \qquad W = \frac{1}{2} m \int \xi r^2 f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda.$$

3. Déduction de l'équation différentielle

$$\frac{df}{d\xi} X + \frac{df}{d\eta} Y + \frac{df}{d\zeta} Z + \frac{df}{dx} \xi + \frac{df}{dy} \eta + \frac{df}{dz} \zeta = 0,$$

déterminant la fonction f.

4. Si R représente la somme des rayons des électrons et r la vitesse (ξ, η, ζ), on a

$$c = n R^2 r \int [f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta)] \cos\theta\, d\omega,$$

où n est le nombre des atomes métalliques de l'unité de volume.

5. Introduction de la loi de distribution $f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-hr^2}$ de Maxwell, ou

$$A = N \sqrt{\left(\frac{h}{\pi}\right)^3}.$$

6. La formule $f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-hr^2} + \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ correspondant au cas où l'état du métal change de point en point. La supposition $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \xi\, \chi(r)$, d'où découle

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi}{r} e^{-hr^2} \left(2hAx - \frac{dA}{dx} - rA \frac{dh}{dx} \right),$$

7. Les résultats

$$c = \frac{2}{3} \pi l \left[\frac{1}{h} \left(2hAx - \frac{dA}{dx} \right) + \frac{2A}{h^2} \frac{dh}{dx} \right],$$

$$W = \frac{2}{3} \pi m l \left[\frac{1}{h} \left(2hAx - \frac{dA}{dx} \right) + \frac{3A}{h^2} \frac{dh}{dx} \right],$$

pour le *courant d'électrons* et le *courant de chaleur*.

8. Le pouvoir de conduction électrique

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\frac{lNe^2u}{\alpha T}.$$

9. Le pouvoir de conduction de chaleur

$$k = \frac{8\pi l A\alpha}{9h^2} = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,lN\alpha u.$$

10. Introduction du potentiel φ, où

$$X = -\frac{e}{m}\frac{d\varphi}{dx}.$$

11. Déduction de la formule $F = iR$, faisant connaître l'intensité i du courant dans un circuit thermo-électrique fermé.

12. Les énergies de chaleur

$$W_1 = \frac{2\pi m l A}{3h^2}\frac{dh}{dx}, \qquad W_2 = \frac{mi}{e\Sigma h}$$

développées dans un circuit où circule un courant d'intensité i.

13. Décomposition de la quantité de chaleur développée

$$q = w - \frac{d}{dx}(W\Sigma)\,dx$$

en trois parties, la chaleur développée $\frac{i^2}{\sigma\Sigma}dx$ correspondant à la loi de Joule, la chaleur de conduction $-\frac{d}{dx}(W_1\Sigma)\,dx$, indépendante de i, et la chaleur $\frac{mi}{eh}\frac{d\log A}{dx}dx$ qui change de signe avec i et mène à l'effet de Peltier et l'effet de Thomson.

14. Les résultats obtenus sont d'accord avec la théorie thermodynamique des courants thermo-électriques.

15. La conclusion, déduite de plusieurs expériences, que les électrons négatifs sont de beaucoup plus mobiles que les électrons positifs, amène l'auteur à examiner ce qu'on peut atteindre à l'aide d'une théorie n'admettant que les électrons libres positifs.

16. Conséquences de la supposition qu'il y a deux espèces d'électrons libres, des électrons positifs et négatifs de charges e_1 et $e_2 = -e_1$. Les pouvoirs de conduction partiels.

17. Sur une difficulté par rapport à l'état stationnaire.

18. Introduction des intensités j_1 et j_2 qu'admettraient les courants partiels, s'ils étaient proportionnels aux pouvoirs de conduction partiels.

19. Étude du cas d'une chaîne ouverte, composée de plusieurs métaux maintenus à la même température.

20. La théorie la plus simple d'une chaîne thermo-électrique à deux espèces d'électrons libres dans un cas très vraisemblable.

21. Conséquences. La force électromotrice extérieure de la chaîne.

22. Phénomène calorifique de la chaîne thermo-électrique.

Zeeman (*P.*) et *Geest* (*J.*). — La réfraction double dans un champ magnétique à proximité de raies d'absorption décomposées magnétiquement (516-520, 1 pl.).

Cardinaal (*J.*). — Les équations qui déterminent le lieu géométrique des axes principaux d'un faisceau de quadriques (537-541).

Complément analytique de l'étude synthétique précédente de l'auteur.

Après avoir trouvé l'équation du cône directeur, l'auteur parvient, pour la surface gauche elle-même, à une équation de l'ordre 12, en forme de déterminant, qui permet d'être réduite dans tous les cas particuliers possibles. Ensuite, il donne quelques indications par rapport à ces cas particuliers.

Van Laar (*J.-J.*). — Sur quelques phénomènes qui peuvent se présenter en cas de miscibilité restreinte de deux fluides dont l'un est anomal comme l'eau. (573-588, 1 pl.).

Schoute (*P.-H.*). — Les systèmes non linéaires de variétés sphériques en contact. (589-600).

Démonstration du théorème suivant :

Les variétés sphériques Sp_n qui touchent n variétés sphériques fixes quelconques Sp'_n de l'espace E_n se composent de 2^{n-1} séries simplement infinies. Les variétés sphériques Sp_n d'une quelconque de ces séries se caractérisent par ceci qu'elles coupent une variété sphérique déterminée $Sp_n^{(0)}$ sous un angle droit et que leurs centres se trouvent sur une conique donnée (c); cette variété sphérique $Sp_n^{(0)}$ et cette conique (c) varient de série en série. L'enveloppe des variétés sphériques Sp_n d'une série déterminée est une variété déterminée de l'ordre quatre C_n^4, la généralisation polydimensionale de la cyclide de Dupin en E_n. Si l'on se restreint à une série unique de variétés sphériques tangentes, le système des n variétés sphériques touchées Sp'_n peut être remplacé par une série $n-2$ fois infinie de variétés sphériques touchées Sp'_n, caractérisée par ceci qu'elles coupent une variété sphérique déterminée $Sp_n^{(0)}$ sous un angle droit et que leurs centres se trouvent sur une variété quadratique de révolution de la puissance $n-3$, engendrée par la révolution d'une conique (c'), etc.

De Vries (*J.*). — Sur un complexe tétraédral particulier (600-605).

Le complexe des normales aux quadriques $\frac{x}{a}$ $\frac{y}{b}$ $\frac{z}{c}$ k, où k est

quelconque, est représenté par l'équation

$$a^2 p_1 p_4 + b^2 p_2 p_5 + c^2 p_3 p_6 = 0.$$

Le lieu des pieds des normales passant par le point P_0 aux coordonnées (x_0, y_0, z_0) est la cubique gauche ω^3 aux équations

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2 + v}, \qquad y = \frac{b^2 y_0}{b^2 + v}, \qquad z = \frac{c^2 z_0}{c^2 + v}.$$

Le lieu des courbes ω^3 passant par P est le cône de complexe de P.

Transformation du complexe des normales dans le complexe des courbes ω^3 à l'aide d'une inversion déterminée.

De Vries (*J.*). — Sur un groupe de complexes rationnels. (605-608).

Cette Communication-ci est en rapport intime avec une étude antérieure [1]. Ici l'auteur s'imagine deux plans σ, τ et dans le premier un faisceau de rayons (s) à sommet S, dans le second la série (t) des tangentes d'une courbe rationnelle τ_n de la classe n; il suppose une correspondance projective ou homographique entre les rayons s du faisceau et les tangentes t de τ_n. Les transversales communes des rayons homologues s, t engendrent le complexe. Le cône de complexe de l'ordre $n+1$ et de la classe $2n$ admet une arête de multiplicité n. Le complexe admet un point principal de multiplicité n, le point S, et $n+1$ points principaux simples. La surface de complexe d'une droite est de l'ordre $4n$; elle contient deux droites de multiplicité $2n$, la droite à laquelle elle correspond et une autre droite torsale; de plus, elle contient $6n$ droites simples.

Van der Waals (*J.-D.*). — La transformation d'un pli latéral en un pli principal et réciproquement. (625-630, 1 pl.).

Si, dans le cas d'un mélange binaire, la température T a été élevée au-dessus de la température critique T_c de l'une des composantes, la surface ψ possède un pli qui n'occupe pas toute la largeur de $x = 0$ à $x = 1$ (x = proportion de l'une des composantes), mais qui se ferme du côté de la composante dont T_c est inférieure à T. Dans les cas ordinaires, ce pli, fermé d'un côté, ne montre pas de particularités; un plan tangent double peut rouler du côté ouvert sur la ligne binodale jusqu'au point de plissement. Cependant il y a des cas plus compliqués; à côté du pli principal, un second pli peut se présenter. Si l'existence simultanée de ces deux plis se manifeste sur un intervalle de température considérable, il y a lieu de parler d'un pli transversal et d'un pli longitudinal et d'attribuer la non-miscibilité dans la forme liquide au pli transversal. Si, au contraire, ces deux plis ne s'étendent que dans un intervalle restreint de température, il vaut mieux se servir des expressions *pli principal* et *pli latéral*. Le but principal de cette Note est de faire voir que, dans ce cas, il peut arriver qu'à une température déterminée les deux plis intervertissent

[1] Voir *Bulletin*, t. XXIX, p. 143.

leurs rôles : le pli principal devient pli latéral, et réciproquement. En premier lieu, l'auteur s'occupe des transformations que doit subir la surface ψ, si T varie, pour rendre compte des résultats des expériences de M. Kuenen se rapportant aux phénomènes critiques de mélanges d'éthane et de quelques alcools.

Mehmke (*R.*). — Sur les moments d'inertie et les moments d'ordre supérieur en des espaces polydimensionaux. (630-634).

Dans les *Rendiconti di Palermo* (t. XIX, 1905), M. Schoute a calculé le moment d'inertie du simplexe de l'espace E_n. Ici M. Mehmke communique qu'il a publié le même résultat dans les *Math. Annalen* (t. XXIII, 1884); de plus, en s'appuyant sur les considérations de Grassmann, il fait voir comment on peut trouver de la même manière des moments d'un ordre supérieur quelconque.

Van Laar (*J.-J.*). — Sur les différentes formes de transition des courbes limitantes dans le cas de miscibilité partielle de deux fluides. (660-672, 1 pl.).

Van Laar (*J.-J.*). — Une expression exacte pour les lignes spinodales et points de plissement pour toutes les températures dans le cas de mélange de substances normales. (685-696).

L'auteur parvient aux deux équations

$$RT = \frac{2}{v^3}[x(1-x)\theta^2 - a(v-b)^2],$$

$$x(1-x)\theta^3[(1-2x)v - 3x(1-x)\beta]$$
$$+ (v-b)^2[3x(1-x)\theta(\theta - \beta\sqrt{a}) + a(v-b)(v-3b)]\sqrt{a} = 0.$$

Elles montrent que les formes spéciales des courbes, propres aux substances anomales, se réalisent tout de même chez les substances normales, pourvu que le rapport des deux températures critiques surpasse une certaine limite.

De Vries (*J.*). — Un groupe de complexes algébriques. (703-708).

Soient a les rayons d'un faisceau (A, α) et b_n les courbes d'ordre n d'un faisceau (b_n) à n^2 points de base B_k situé dans le plan β, et supposons que les rayons et les courbes de ces deux faisceaux se correspondent projectivement. Alors il s'agit du complexe dont les rayons rencontrent deux éléments correspondants de ces faisceaux.

Le complexe est de l'ordre $n+1$.

Le lieu des sommets des cônes de complexe admettant une arête double est un cône Δ de l'ordre $n(3n-1)$ dont A est le sommet et dont les droites AB_k sont des arêtes doubles.

La surface singulière se compose du plan principal α, du plan principal β de multiplicité n et du cône Δ.

Le lieu des arêtes doubles des cônes de complexe est un cône de l'ordre $3n-1$, au sommet A, dont les n^2 droites AB_k sont des arêtes doubles.

Le lieu des sommets des cônes de complexe à arête de rebroussement se compose de $\frac{1}{4}(n-1)(3n-1)$ arêtes du cône Δ.

La courbe de complexe d'un plan quelconque π touche n fois la droite $\beta\pi$ et est donc rationnelle.

Les plans π dont les courbes de complexe osculent la tangente n^{uple} $\beta\pi$ en un des n points de contact enveloppent une courbe plane de l'ordre $(n-1)(n+2)$. Les trois dégénérations de la courbe de complexe.

Représentation analytique du complexe.

De Vries (*J.*). — Sur des réseaux de courbes planes algébriques. (708-710).

Étude du réseau

$$y_1 a_x^n + y_2 b_x^n + y_3 c_x^n = 0,$$

où y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées homogènes d'un point Y.

La courbe (Y) correspondant à la courbe de Hesse du réseau est de l'ordre $3(n-1)^2$, de la classe $3n(n-1)-2b$, où b représente le nombre des points de base du réseau, du genre $\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)-b$.

Le réseau contient $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-n)$ courbes à deux points doubles, $2(n-1)(n-2)$ courbes à un point de rebroussement.

La courbe de Zeuthen du réseau est de l'ordre $3(n-1)(2n-3)$.

Bes (*K.*). — L'équation du neuvième ordre représentant le lieu des axes principaux d'un faisceau de quadriques. (730-732).

Ici l'équation de l'ordre douze, déduite par M. Cardinaal ([1]), est débarrassée de ses trois facteurs étrangers.

De Vries (*J.*). — Sur des systèmes linéaires de courbes planes algébriques. (748-753).

1. Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe O aux courbes c^n d'un faisceau est une courbe t^{m-1}, la *courbe tangentielle* du point O.

Par rapport à un système linéaire $(c^n)_k$ de ∞^k courbes, on peut étudier le lieu des points de contact P_{k+1} des tangentes menées par O admettant en P_{k+1} un nombre de $k+1$ points communs avec une courbe du système.

Ce lieu est une courbe P_{k+1} de l'ordre $\frac{1}{2}(k+1)(2n-k)$ dont O est un point $\frac{1}{2}k(k+1)^{\text{uple}}$.

2. Les tangentes doubles des courbes c^n d'un faisceau $(c^n)_1$ enveloppent une courbe de la classe $2n(n-2)(n-3)$.

3. Cette enveloppe a un point $(n+4)(n-3)^{\text{uple}}$ en chaque point de base du faisceau.

4. Le faisceau contient

$$\frac{1}{2}(n+4)(n-3)^2(10n^3+35n^2-21n^2-80n+20)$$

([1]) Voir *Bulletin*, t. XXXII$_2$, p. 123.

5. Le faisceau contient

$$2(n-3)(n^2+n^2-8n+4)$$

courbes admettant un point d'ondulation.

6. Une droite quelconque est tangente double de $4n-7$ courbes faisant partie d'un réseau $(c^n)_2$.

Le lieu des points de rebroussement d'un système linéaire $(c^n)_3$ est une courbe de l'ordre $4(2n-3)$.

De Vries (*J.*). — Quelques nombres caractéristiques d'une surface algébrique. (753-757).

A l'aide de considérations élémentaires, l'auteur démontre les théorèmes suivants connus, se rapportant à la surface générale φ^n de l'ordre n :

1. *Le lieu des points où la surface φ^n admet une tangente à quatre points d'intersection coïncidés (tangente flecnodale) est une courbe gauche de l'ordre $n(11n-24)$.*

2, 3. *Le lieu des points d'intersection de φ^n avec ses tangentes flecnodales est une courbe de l'ordre $2n(n-4)(3n^2+n-12)$.*

Le lieu des tangentes flecnodales de φ^n est une surface réglée de l'ordre $2n(n-3)(3n-24)$.

La surface φ^n admet $5n(n-4)(7n-12)$ tangentes à cinq points d'intersection coïncidés.

4, 5. *Le lieu des points d'osculation* A *des tangentes principales touchant φ^n en un autre point* B *est de l'ordre $n(n-4)(3n^2+5n-24)$, celui des points de contact* B *est de l'ordre $n(n-2)(n-4)(n^2+2n-12)$.*

Le lieu des tangentes principales touchant Φ^n ailleurs est une surface réglée de l'ordre $n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$.

6. *Le lieu des points de contact des tangentes triples de Φ^n est une courbe* (C) *de l'ordre $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n^2+5n-12)$.*

7. *Le lieu des tangentes triples de Φ^n est une surface réglée de l'ordre $\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)$.*

8. *La courbe spinodale de Φ^n est de l'ordre $4n(n-2)$.*

Kohnstamm (*Ph.*). — Une formule pour la pression osmotique dans les solutions concentrées dont la vapeur suit les lois des gaz. (781-787).

Kohnstamm (*Ph.*) — Déduction cinétique de la loi de Van't Hoff par rapport à la pression osmotique d'une solution diluée. (788-800).

Kohnstamm (*Ph.*). — La pression osmotique ou le potentiel thermodynamique. (800-811).

Weeder (*J.*). — Formules d'approximation exactes pour le rap-

port des triangles dans la détermination d'une orbite elliptique par trois observations. (811-819).

L'auteur représente le Soleil par S et les trois positions de la planète par P_1, P_2, P_3; il pose avec Gibbs

$$\Delta P_1 S P_2 = n_3 \Delta P_1 S P_3 \quad \text{et} \quad \Delta P_2 S P_3 = n_1 \Delta P_1 S P_3.$$

Le but de sa Communication est le développement d'expressions pour n_1 et n_3 comprenant les termes du quatrième ordre; chemin faisant, il démontre d'une nouvelle manière les expressions données par Gibbs.

Tome XIV; mai 1905-avril 1906.

Van Laar (*J.-J.*) — Sur la forme des lignes de plissement pour des mélanges de substances normales. (14-29, 1 pl.).

Van Laar (*J.-J.*). — Quelques remarques concernant les dernières Communications de M. Ph. Kohnstamm. (30-33).

Versluys (*W.-A.*). — Sur le rang de la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques. (38-43).

Démonstration de la formule

$$r = m_1 n_2 - m_2 n_1 - 2\delta - 3x,$$

où r est le rang cherché, tandis que n_1, n_2 représentent les ordres, m_1, m_2 les classes des deux surfaces, et δ, x les nombres des points de contact ordinaire et stationnaire de ces surfaces.

Application de la formule trouvée à plusieurs cas particuliers.

De Vries (*J.*). — Sur des faisceaux de surfaces algébriques. (50-54).

Par rapport à un faisceau général de surfaces d'ordre n à la courbe de base σ, l'auteur démontre les résultats suivants :

1. Les tangentes principales des surfaces du faisceau forment un complexe de l'ordre $3(n-2)$; celles qui correspondent aux points de σ forment une congruence de l'ordre $n^2(2n-3)$ et de la classe $3n^2$.

2. Les tangentes t_4 à contact de quatre points ayant leurs points de contact sur σ forment une surface réglée de l'ordre $2n^2(6n-11)$, dont σ est une courbe de multiplicité onze; le lieu des points de contact de toutes les tangentes t_4 est une surface de l'ordre $2(11n-12)$.

3. Les tangentes t_4 forment une congruence de l'ordre

$$2(n-3)(2n^2-3n+2)$$

et de la classe

$$\tfrac{9}{2}(n-3)(n^3+n^2-8n+4).$$

4. Les tangentes $t_{2,3}$ de contact et d'osculation forment une congruence de l'ordre

$$(n-3)(n-4)(5n^2-6n-4)$$

et de la classe

$$\tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(10n^3-35n^2-21n^2-80n-90).$$

5. Le lieu des points d'osculation des tangentes $t_{2,3}$ est une surface de l'ordre

$$6(n-1)(n-4)(n-4).$$

6. Le lieu des points de contact des tangentes $t_{2,3}$ est une surface de l'ordre

$$9(n-4)(n^3-9n^2-10n-12).$$

7. Le lieu des points paraboliques est une surface de l'ordre $8(n-1)$, dont σ est une courbe quadruple.

Van Laar (*J.-J.*). — L'élévation moléculaire de la température critique la plus basse d'un mélange binaire à composantes normales. (108-116).

Weeder (*J.*). — Formules d'approximation exactes pour le rapport des triangles dans la détermination des orbites elliptiques par trois observations. (160-166).

Dans cette seconde partie, l'auteur déduit des trois temps d'observation et des distances héliocentriques correspondantes des formules simples d'approximation embrassant les termes du cinquième ordre dans les intervalles de temps et qui permettent d'être complétées jusqu'aux termes du sixième ordre, problème résolu d'une autre manière par M. P. Harzer, de Kiel.

Versluys (*W.-A.*). — Sur le nombre des tangentes communes d'une courbe et d'une surface. (166-175).

En général, le nombre cherché est rm, où m représente la classe de la surface et r la classe ou le rang de la courbe suivant que cette courbe est plane ou gauche. Étude de plusieurs cas particuliers.

Van der Waals (*J.-D.*). — La forme des sections de la surface de saturation perpendiculaires à l'axe des x, dans le cas de pression à trois phases entre deux températures. (176-185, 4 pl.).

Van der Waals (*J.-D.*). — Les équilibres (T, x) de phases solides et fluides pour des valeurs variables de la pression (185-187, 1 pl.).

Smits (*A.*). — Sur les équilibres occultes dans les sections (p, x) d'un système linéaire en rapport avec la présence de substances solides. (187-192, 1 pl.).

Smits (*A.*). — Contribution à la connaissance des courbes (p, x) et (p, t) pour le cas où deux substances entrent en composition dissociée en phases fluide et gazeuse. (192-200, 2 pl.).

Van der Waals (*J.-D.*). — Propriétés de la ligne critique (ligne des points de plissement) du côté des composantes. (230-240).

Van der Waals (*J.-D.*). — Les propriétés des sections de la surface de saturation d'un mélange binaire du côté des composantes. (240-249).

Van der Waals (*J.-D.*). — Les valeurs numériques exactes pour les propriétés de la ligne du plissement du côté des composantes. (249-258).

De Vries (*H.*). — La projection centrale dans la géométrie de Lobatschewsky. (264-269).

Première Communication. — Dans l'espace hyperbolique, on se donne un plan arbitraire τ et, en un point quelconque O_1 de τ, la normale à τ; de plus, on fixe sur cette normale un point quelconque O. Cela posé, l'auteur se demande ce qu'il y a de remarquable si l'on projette les figures de l'espace hyperbolique du point O comme centre sur le plan τ comme tableau, et comment on peut déterminer inversement les figures de cet espace à l'aide de ces projections. Il considère successivement l'angle parallèle π_d de Lobatschewsky correspondant à la distance $OO_1 = d$, déterminé par la relation $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \pi_d = e^{-d}$, le cône parallèle du point O, etc.

Van der Stok (*J.-P.*). — Les courbes de fréquence de quantités météorologiques. (270-283).

Bauman (*Z.-P.*). — Le complexe tétraédral. (294-299).

Étude du complexe $Ap_1p_4 + Bp_2p_5 + Cp_3p_6$, dont $R = \frac{B - A}{C - A}$ représente le rapport anharmonique constant, dans la forme différentielle

$$A(x\,dy - y\,dx)\,dz + B(y\,dz - z\,dy)\,dx + C(z\,dx - x\,dz)\,dy = 0.$$

Les surfaces

$$z = \sqrt{\frac{x^2 - C}{R - 1}} = \sqrt{\frac{R(y^2 - C_1)}{1 - R}}$$

du quatrième ordre dont les normales font partie du complexe, etc.

Kapteyn (W.). — Une intégrale définie de Kummer. (315-322).

Dans le Volume 17 du *Journal de Crelle* Kummer a déterminé la valeur de l'intégrale

$$U_p = \int_0^\infty e^{-x - \frac{b^2}{x}} x^p \, dx,$$

en supposant b^2 positif et p entier. Il trouve

$$U_p = \Gamma(p+1) f(-p, b^2) - \Gamma(-p-1) b^{2p+2} f(p+2, b^2),$$

où

$$f(p, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!\,(p+p-1)\ldots(p-s-1)}.$$

Ici M. Kapteyn étudie le cas p entier, ce qui mène à un rapport simple entre cette intégrale et

$$V_p = \int_b^\infty e^{-x - \frac{b^2}{x}} x^p \, dx,$$

où b est supposé positif.

Kluyver (J.-C.). — Un problème de probabilité géométrique. (325-334).

Dans le journal anglais *Nature* (27 juillet 1905), M. K. Pearson proposait le problème suivant du *vagabond indécis :*

Un promeneur part d'un point O *et fait dans une direction quelconque une distance* l; *ensuite, il fait dans une autre direction également quelconque encore une distance* l; *en tout il répète cette action un nombre* n *de fois. Quelle est la probabilité pour qu'enfin il se trouve à une distance du point de départ* O *située entre* r *et* $r + dr$?

La solution de ce problème, dont lord Rayleigh a rencontré le cas particulier $n = \infty$ dans la théorie du son, est liée à la théorie des fonctions de Bessel; de plus, cette solution fait connaître à son tour la valeur de quelques intégrales définies qui dépendent de ces fonctions.

L'auteur s'occupe du cas le plus général où les distances a, a_1, a_2, ..., a_{n-1} parcourues successivement sont inégales. En représentant par $OAA_1A_2\ldots A_{n-1}$ le chemin parcouru, par s_1, s_2, ..., s_{n-1} les distances OA_1, OA_2, ..., OA_{n-1}, par φ l'angle OAA_1 et par φ_1, φ_2, ..., φ_{n-2} les angles AA_1A_2, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$, il trouve, à l'aide de l'intégrale discontinue

$$c\int_0^\infty J_1(uc) J_0 u s_{n-1} \, du$$

de Weber, qui s'annule ou devient égale à l'unité à mesure qu'on a $s_{n-1} < c$ ou $s_{n-1} > c$, pour la probabilité que le promeneur se trouve après ses pérégrinations à une distance $s_{n-1} < c$ du point O, l'expression

$$c\int_0^\infty J_1(uc) J_0(ua) J_0(ua_1)\ldots J_0(ua_{n-1}) \, du.$$

Sans doute ce résultat ne satisfera pas M. Pearson, l'intégrale à $n+1$ fonctions oscillantes ne permettant pas même une approximation grossière; mais, au point de vue mathématique, il a quelque importance. En effet, si l'on considère l'intégrale comme une fonction de c, on trouve immédiatement que cette fonction est finie et continue pour toutes les valeurs réelles de x et qu'il en est de même pour un certain nombre de dérivées d'après c. Néanmoins cette expression analytique représente en des régions différentes des fonctions analytiques différentes. Pour le premier, on n'a qu'à se rappeler la signification du résultat par rapport au problème de M. Pearson. Ainsi, il est évident que l'intégrale est positive, qu'elle accroît avec c, et qu'elle ne saurait dépasser l'unité valeur qu'elle atteint en effet aussitôt que c surpasse la somme

$$a + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

De plus, si l'on suppose $a > a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$, on a, pour des valeurs très petites de c même, la condition

$$a > c + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

qui dit que le vagabond du problème se trouve en dehors du cercle de rayon c et que la probabilité et donc aussi la valeur de l'intégrale est absolument zéro. Donc on a, par la solution du problème, les deux équations

$$\left.\begin{array}{ll} c > a + a_1 + \ldots + a_{n-1}, & 1 \\ a > c - a_1 + \ldots + a_{n-1}, & 0 \end{array}\right\} = c \int_0^\infty J_1(uc)\, J_0(ua)\, J_0(ua_1) \ldots J_0(ua_{n-1})\, du$$

dans toute indépendance du nombre des fonctions J_0, ce qui prouve que l'expression analytique continue ne saurait être considérée comme une seule fonction analytique.

Dans le cas $n = 3$, où l'on suppose $a > a_1 > a_2$ les trois côtés d'un triangle, l'intégrale représente cinq fonctions différentes pour les régions

$$\begin{array}{ll} a_1 + a_2 - a > c > 0, & a + a_1 + a_2 > c > a + a_1 - a_2, \\ a - a_1 - a_2 > c > a_1 - a_2 - a, & c > a + a_1 + a_2, \\ a + a_1 - a_2 > c > a - a_1 - a_2. & \end{array}$$

Pour le cas de n segments égaux l, la probabilité de $a_{n-1} < l$ est $\frac{1}{n+1}$. Si, en même temps, n est très grand (cas de lord Rayleigh) et l assez petit, le résultat, qui peut être calculé avec une approximation suffisante, s'accorde avec ce qu'on peut prédire : le vagabond terminera son chemin à proximité du point de départ.

Sissingh (R.) — La théorie de la réflexion de la lumière par les corps non complètement transparents. (335-344).

Lorentz (H.-A.). — Sur la radiation de chaleur dans un système de corps ayant partout la même température. (345-360, 408-412).

Korteweg (D.-J.). — Sur les horloges sympathiques de Huygens et les phénomènes analogues en rapport avec les vibrations

principales et composées d'un mécanisme à un seul degré de liberté portant deux pendules. (413-432).

En février 1665, quand Huygens fut obligé de garder la chambre pendant quelques jours, il remarqua que deux horloges qu'il venait de construire « estant suspendues l'une à costé de l'autre, gardent entre elles une justesse si exacte que les deux pendules battent toujours ensemble, sans jamais varier. Et les vibrations des pendules mis à la consonance ne vont pas en sorte que l'un soit parallèle à l'autre, mais au contraire ils s'approchent et s'écartent par des mouvemens contraires. Éloignées l'une de l'autre, en un jour il y avait cinq secondes de différence. » (*Œuvres complètes*, t. V, p. 244.)

D'abord Huygens attribue la *sympathie* des deux horloges à l'influence du mouvement de l'air; mais bientôt il en découvrit la vraie cause : une faible mobilité des chaises portant les bâtons auxquels les horloges étaient suspendues.

Quoique les expériences de Huygens aient été publiées dans le *Journal des Sçavans* de 1665 et dans le *Horologium oscillatorium*, elles étaient tombées dans l'oubli quand, en 1739, John Ellicott découvrit des phénomènes analogues (*Phil. Trans.*, t. LI, p. 126-135). Après lui plusieurs savants se sont occupés de mécanismes à phénomènes de sympathie (Euler, D. Bernoulli, Savart, Resal, Lucien de la Rive, Everett, Cellérier, Furtwängler).

Dans cette Communication-ci, M. Korteweg s'occupe de la théorie mathématique du mouvement d'un mécanisme très général à un seul degré de liberté portant en des points déterminés deux pendules composés possédant à peu près la même durée d'oscillation; la seule restriction qu'il se permet d'introduire, c'est que les mouvements des différentes parties de l'appareil ont lieu en des plans parallèles, de manière à ramener la question à un problème de deux dimensions. Par l'introduction du *système réduit*, se composant du mécanisme général augmenté des masses des pendules transportées aux points de suspension, il trouve entre les longueurs de pendules l', l_1, l_2 et λ du système réduit, des deux pendules donnés et d'une vibration principale du système entier, la relation

$$(l'-\lambda)(l_1-\lambda)(l_2-\lambda)-c_1^2 l' l_1(l_2-\lambda)-c_2^2 l' l_2(l_1-\lambda)=0,$$

où c_1^2 et c_2^2 sont des constantes. Donc, il distingue trois vibrations principales : une vibration lente, une vibration moyenne et une vibration rapide. Successivement il considère d'abord le cas général et ensuite le cas A où la différence de l_1 et l_2 est grande par rapport à c_1 et c_2, le cas B où la différence de l_1 et l_2 est petite par rapport à c_1 et c_2, le cas C où la différence $l_1 - l_2$ et c_1 et c_2 sont très petites.

Versluys (*W.-A.*). — Les équivalents plückériens d'un point cyclique d'une courbe gauche. (482-484).

En se basant sur le développement

$$x = t^n, \qquad y = t^{n+r}(t), \qquad z = t^{n+r+m}(t),$$

dû à Halphen, où n, r, m indiquent l'ordre, le rang et la classe du point cyclique, tandis que les (t) désignent des séries de puissances en t, commen-

çant par une constante, l'auteur fait connaître quelques corrections que doivent subir les formules connues de Plücker-Cayley.

Schoute (*P.-H.*). — Sur une surface gauche tordue du sixième ordre et du genre zéro dans l'espace E_4 à quatre dimensions. (485-494).

L'auteur s'occupe d'abord du problème suivant :

Dans l'espace E_4 *on fixe trois plans quelconques* α_1, α_2, α_3 *et dans ces plans trois faisceaux de rayons en correspondance projective. Quel est le lieu de la transversale commune de triples de rayons correspondants?*

Notation. — Soient

O_1, O_2, O_3 les sommets des faisceaux;

(l_1, l_2, l_3, l) un triple quelconque de rayons correspondants et leur transversale commune;

S_1, S_2, S_3 les points d'insersection de l avec l_1, l_2, l_3;

P_{23}, P_{31}, P_{12} les points d'intersection des couples de plans α_1, α_2, α_3;

Etc.

On suppose que les six points O_1, O_2, O_3, P_{23}, P_{31}, P_{12} sont tous distincts.

Après avoir démontré que le lieu du point S_i en α_i est une cubique rationnelle s_i^3 au point double O_i, on voit tout de suite que l'intersection du lieu cherché avec un espace E_3 quelconque mené par le plan α_i se compose de s_i^3 et de trois génératrices de la surface réglée en question, ce qui prouve que cette surface est une S^6 du genre zéro.

Le plan $\alpha = P_{23} P_{31} P_{12}$ contient trois génératrices de S^6.

La surface trouvée est déterminée par la correspondance projective des courbes s_1^3 et s_2^3 en α_1 et α_2; cette correspondance n'est pas la plus générale, car les triples de points d'intersection de s_1^3 avec $P_{31} P_{12}$ et de s_2^3 avec $P_{12} P_{23}$ se correspondent l'un l'autre. Ainsi la surface S^6 qui forme la solution du problème initial n'est pas encore la surface en vue. Cette surface forme en E_4 le lieu des droites $P_1 P_2$ qui joignent les points correspondants P_1, P_2 de deux cubiques rationnelles s_1^3 et s_2^3 en α_1 et α_2 dont la correspondance projective est générale.

Étude de plusieurs cas particuliers.

Sissingh (*R.*). — Déduction des équations fondamentales de la réflexion métallique de la théorie de Cauchy. (506-509).

Van der Waals Jr (*J.-D.*). — Remarques par rapport à la dynamique de l'électron. (509-518).

Lorentz (*H.-A.*). — Sur les bandes d'absorption et d'émission des corps gazeux. (518-533, 577-581).

Van der Stok (*J.-P.*) — Sur les courbes de fréquence des indications du baromètre. (548-561).

Kapteyn (*W.*). — Sur le quotient de deux fractions consécutives de Bessel. (562-564, 672-674).

Détermination du coefficient général du développement

$$\frac{I_{n+1}(z)}{I_n(z)} = f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \ldots$$

en forme de déterminant. Relations entre ces coefficients.

Smits (*A.*). — Sur les équilibres occultes dans les sections (p, x) au-dessous du point eutectique. (564-568, 1 pl.).

Smits (*A.*). — Sur les phénomènes qui se présentent si la courbe des points de plissement et la courbe des trois phases d'une composition binaire dissociante se rencontrent. (568-574, 1 pl.).

Van Laar (*J.-J.*). — Sur la forme des lignes spinodale et de plissement pour des mélanges binaires de substances normales (582-594, 1 pl.).

Postma (*O.*). — Quelques remarques sur la quantité H de Boltzmann. (402-411).

D'après Boltzmann (*Vorlesungen über Gastheorie,* § 6), la quantité

$$H = \int f . lf . dw.$$

qui atteint une valeur minimale chez un gaz à l'état stationnaire, a encore ceci de particulier que cette valeur minimale correspond à la probabilité maximale pour que les molécules du gaz aient des vitesses dont la distribution est indiquée par la fonction f. L'état stationnaire du gaz représenterait donc en même temps son état le plus probable. La distribution des vitesses moléculaires, dite de Maxwell, résultant de ce que la quantité H passe par sa valeur minimale et de la condition que l'énergie cinétique de n molécules doit avoir une valeur déterminée, serait donc la distribution qui représente l'état le plus probable. D'après l'auteur, le raisonnement de Boltzmann manque de rigueur, la supposition que les probabilités, *a priori,* pour les molécules du gaz, d'obtenir une vitesse quelconque, sont égales pour les vitesses possibles étant inadmissible. En effet, dans cette hypothèse la vitesse moyenne des molécules ne pourrait pas toujours être finie et l'énergie cinétique de n molécules serait infinie en général.

De plus, l'auteur fait voir que la démonstration de la loi de Maxwell donnée par M. J.-H Jeans (*The dynamical theory of gases,* Cambridge, 1904), et introduite par ce savant comme une méthode de dynamique générale, ne diffère pas essentiellement de la démonstration discutée de Boltzmann, et que, par conséquent, elle prête à la même critique.

Ornstein (*L.-P.*). — Sur le mouvement d'un fil métallique à travers la glace. (629-635).

Discussion mathématique se rapportant au phénomène connu du regel. L'auteur suppose qu'au-dessous du fil cylindrique de rayon R se trouve une couche concentrique d'eau d'épaisseur minimale d. Il trouve que la vitesse de la descente du fil portant un poids assez considérable est proportionnelle à $\frac{d^3}{R^2}$ ou à $\frac{d^3}{R^3}$, suivant qu'on néglige ou que l'on tient compte de la courbure du fil. Pour que le fil courbé descende en entier d'une vitesse constante, il faut que la courbe soit représentée par l'équation

$$y = -k \log \cos \frac{x}{k},$$

où k est une constante.

Boekwinkel (*H.-B.-A.*). — Sur la propagation de la lumière dans un cristal biaxial autour d'un centre de vibration. (636-651).

De Vries (*J.*). — Sur un groupe de complexes dont la surface singulière se compose d'une surface réglée et d'un certain nombre de plans. (666-668).

1. L'auteur considère une surface réglée rationnelle ρ^n de l'ordre n à une droite d de multiplicité $n-1$ et en range les génératrices l dans une involution I_p de l'ordre p; ainsi chaque couple de génératrices l, l' d'un même groupe de l'involution I_p détermine une congruence (1, 1) dont le complexe en question est le lieu géométrique.

Les génératrices de ρ^n forment une involution fondamentale I_{n-1}, dont chaque groupe se compose de $n-1$ génératrices rencontrant d au même point; cette I_{n-1} a en commun avec I_p un nombre de $(n-2)(p-1)$ couples; ainsi d porte autant de points d'intersection H de couples l, l' de I_p. Donc le complexe admet $(n-2)(p-1)$ points principaux H et $(n-2)(p-1)$ plans principaux $h = (l, l')$.

2. L'ordre du complexe est $(n-1)(p-1)$; sa surface singulière se compose de la surface réglée ρ^n et des $(n-2)(p-1)$ plans h.

3. Cas particuliers du cône de complexe.

4. Cas particuliers de la courbe de complexe.

Les droites s'appuyant sur trois génératrices d'un même groupe forment une congruence γ de l'ordre et de la classe $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(n-2)$.

5. La surface réglée des droites s'appuyant sur quatre génératrices d'un même groupe est de l'ordre $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(p-3)(4n-9)$.

6. Etude du cas où ρ^n admet encore une directrice simple.

Zwiers (*H.-J.*). — Recherches sur l'orbite de la comète périodique de Holmes et sur les perturbations de son mouvement elliptique. (674-685).

Verschaffelt (*J.-E.*). — Contribution à la connaissance φ de la surface de Van der Waals. (686-696, 1 pl.).

X. Sur la possibilité de prédire les propriétés des mélanges, connaissant celles des composantes.

L'auteur se propose de faire voir que l'équation originale

$$p = \frac{RT}{v - b_v} - \frac{a_v}{v^2}$$

de Van der Waals, où

$$a_v = a_{11}(1 - x)^2 + 2a_{12}x(1 - x) + a_{22}x^2,$$
$$b_v = b_{11}(1 - x)^2 + 2b_{12}x(1 - x) + b_{22}x^2,$$

et où l'on a introduit les suppositions simplifiantes

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}, \qquad b_{12} = \sqrt{b_{11}b_{22}},$$

donne une représentation assez précise des propriétés particulières des mélanges.

Van Laar (*J.-J.*). — Sur la forme des lignes de fusion de compositions, dissociées partiellement dans la phase fluide, pour des proportions quelconques des produits de dissociation. (711-726).

Kapteyn (*J.-C.*). — Sur la parallaxe des nébuleuses. (726-734).

Schoute (*P.-H.*). — Sur une série particulière de quadriques à huit points et huit plans tangents communs. (737-751).

1. L'auteur s'occupe tout d'abord du problème suivant :

Dans notre espace, on fixe quatre plans quelconques α_1, α_2, α_3, α_4 *et dans ces plans quatre faisceaux de rayons en correspondance projective. Quel est le lieu des couples de transversales communes des quadruples de rayons correspondants?*

Notations. — Soient

O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets des faisceaux;
(l_1, l_2, l_3, l_4) un quadruple quelconque de rayons correspondants;
l, l' leurs transversales communes;
(S_1, S'_1), (S_2, S'_2), (S_3, S'_3), (S_4, S'_4) leurs points d'intersection avec les droites du quadruple;
$l_{1,2}$, $l_{1,3}$, ..., $l_{3,4}$ les intersections des couples de plans (α_1, α_2), (α_1, α_3), ..., (α_3, α_4).

2. Le lieu des couples de points (S_i, S'_i) en α_i est une courbe c_i^5 du cinquième ordre, au point triple O_i, du genre trois.

La surface réglée en question O^8 est du huitième ordre; elle admet une courbe de l'ordre 18.

3. En général, aucun des quadruples de rayons correspondants n'est hyperboloïdique. De plus, on a les théorèmes :

Si ce cas particulier se présente k fois ($k = 1, 2, 3$), *le lieu cherché se décompose en k quadriques et en la surface proprement dite* O^{8-2k}.

Si ce cas particulier se présente quatre fois, chaque quadruple de rayons correspondants est hyperboloïdique et le lieu se compose d'un nombre infini de quadriques.

4. On réalise le cas où tous les quadruples de rayons correspondants sont hyperboloïdiques de la manière suivante. Faisons coïncider les plans α_i avec les quatre faces latérales d'un cube, les quatre points O_i avec les centres de ces faces, et considérons comme rayons correspondants l_i quatre droites faisant avec leurs projections sur le plan des quatre points O_i du même côté le même angle. Alors les hyperboloïdes de révolution admettant les groupes de quatre droites comme génératrices se touchent l'une l'autre, suivant le cercle de gorge commun, et forment donc en même temps un faisceau ponctuel et un faisceau tangentiel.

5. Le cas précédent est autant que possible spécialisé métriquement. On trouve un cas moins spécialisé où tous les quadruples de rayons correspondants sont hyperboloïdiques ainsi. Soit l_1 une droite quelconque et représentons par l_2, l_3, l_4 les droites qu'on obtient en faisant tourner l_1 d'un angle de 180° autour des axes OX, OY, OZ d'un système régulier. Si l_1 décrit un faisceau $O_1(\alpha_1)$, les droites l_2, l_3, l_4 engendreront des faisceaux $O_2(\alpha_2)$, $O_3(\alpha_3)$, $O_4(\alpha_4)$ jouissant de la propriété que chaque quadruple de droites correspondantes l_1, l_2, l_3, l_4 est hyperboloïdique, sans que O_1, O_2, O_3, O_4 soient dans un même plan ou que α_1, α_2, α_3, α_4 passent par un même point. Cas plus spécial de quatre faisceaux dans les faces d'un tétraèdre régulier.

6. La série des quadriques au tétraèdre autopolaire $OX_\infty Y_\infty Z_\infty$ des axes rectangulaires touchant le plan α au point O admet huit points communs, les sommets d'un cube, et huit plans tangents communs, les faces d'un octaèdre régulier. Les nombres caractéristiques (3, 4, 3) de la série. Transformation projective.

7. Étude du cas où O^8 se décompose en quatre surfaces O^2.

8. Démonstration du théorème :

Si quatre des quadruples sont hyperboloïdiques, tous les quadruples jouissent de cette propriété.

De Sitter (*W.*). — Sur les plans des orbites des satellites de Jupiter. (787-799).

Jaeger (*F.-M.*). — Déduction géométrique simple des relations reliant entre elles les quantités observées et cherchées figurant dans la méthode de détermination de la conduction de la chaleur par les cristaux, due à M. W. Voigt. (799-804).

Zeeman (*P.*). — La décomposition magnétique des raies du spectre et l'intensité du champ. (Première Partie). (838-841).

De Vries (*J.*). — Quelques propriétés de faisceaux de courbes algébriques. (841-845).

1. Soit A un des n^2 points de base d'un faisceau (c^n) de courbes c^n d'ordre n, et représentons par B un quelconque des n^2-1 autres. Si l'on fait correspondre à chaque c^n la droite c^1 qui la touche en A, on trouve deux faisceaux projectifs (c^n), (c^1) qui engendrent une courbe T_1 de l'ordre $(n+1)$, qui forme le lieu des points tangentiels de A. Cette *courbe tangentielle* a un point triple en A; elle y est touchée par les tangentes d'inflexion des trois courbes c^n à point d'inflexion en A. La courbe a été étudiée pour la première fois par Em. Weyr, en 1882.

L'auteur considère ici le lieu T_m des points tangentiels de l'ordre m; il représente par $\tau(m)$, $\alpha(m)$, $\beta(m)$ l'ordre de la courbe et le nombre des branches de la courbe passant en A et en B. Le cas $n=3$ a été étudié par M. Schoute, en 1885 (*Comptes rendus*, t. CI).

Introduction de la *courbe antitangentielle* T_{-1} de l'ordre $2n-1$ qui passe trois fois par A et une fois par B.

2, 3. Déduction des résultats

$$n^2\tau(m) = (n+1)(n-2)^{m-1}[(n-1)^m-1],$$
$$n^2\alpha(m) = (n-2)^{m-1}[(n+1)^{m-1}-2n+1]-(n^2-1)(-2)^m,$$
$$n^2\beta(m) = (n-2)^{m-1}[(n-1)^{m-1}-2n+1]-(-2)^m.$$

4, 5, 6. Le faisceau (c^n) admet

$$3(n-4)(n-5)(n^2+6n-4)$$

courbes possédant une tangente d'inflexion touchant la courbe ailleurs,

$$(n-5)(n-4)(n-3)(n^2-3n-2)$$

courbes possédant une tangente triple,

$$6(n-5)(3n-2)$$

courbes possédant une tangente à contact de quatre points.

7. Vérification par l'indication des points communs de la courbe d'inflexion (I) et de la courbe bitangentielle (D) formant les lieux des points d'inflexion et des points de contact des tangentes doubles du faisceau.

Van Laar (*J.-J.*). — La pression osmotique de solutions de non-électrolytes, en rapport avec la déviation des gaz parfaits. (849-858).

Smits (*A.*). — Sur l'introduction de la notion de solubilité d'ions métalliques dans la question de l'équilibre électromoteur. (859-866).

Smits (*A.*). — Sur la forme des lignes (P, T) dans un solide-fluide de composition invariable. (866-877, 1 pl.).

Tome XV; mai 1906-avril 1907.

Brouwer (*L.-J.-E.*). — La distribution des vecteurs polydimensionaux. (14-26).

L'auteur suppose que chaque point P d'un espace linéaire n-dimensional E_n porte un système p-dimensional de vecteurs donné, formant ce qu'il appelle une ${}^pX$-*distribution de vecteurs*. Par $X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$, il indique la composante parallèle à un espace coordonné C_p à p dimensions correspondant aux indices α_1, α_2, ..., α_p, le sens positif étant indiqué par l'ordre de succession de ces indices. Par rapport à cette distribution, il démontre les théorèmes suivants :

I. *L'intégrale de* ${}^pX$ *étendue à la surface d'une variété courbe bilatéralement fermée* V_p *est égale à l'intégrale de* ${}^{p+1}Y$ *étendue à la variété* V_{p+1} *incluse par* V_p; *ici l'on a*

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{\alpha_{\eta_1} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_{\alpha_{\eta_2} \alpha_{\eta_3} \ldots \alpha_{\eta_{p+1}}}}{\partial x_{\alpha_{\eta_1}}},$$

où dans chaque élément du second membre l'indicatrice $(\alpha_{\eta_1} \alpha_{\eta_2} \ldots \alpha_{\eta_p} \alpha_{\eta_{p+1}})$ *a le même sens que* $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1})$.

Ce vecteur ${}^{p+1}Y$ est appelé la *première dérivée* de ${}^pX$.

II. *La première dérivée d'une* ${}^pX$ *est une* ${}^{p+1}_{p}X$, *la seconde une* ${}^{p-1}_{p}X$; *en d'autres termes, l'opération de la première dérivation, appliquée deux fois de suite, fait trouver zéro, et il en est de même avec celle de la seconde dérivation.*

La somme de la première et de la seconde dérivée est désignée comme *dérivée totale* et représentée par ∇.

III. *On a*

$$\nabla^2 = \sum_{h=1}^{n} \frac{d^2}{dx_h^2}.$$

Corollaire. — Si $k_n \pi r^{n-1}$ représente la surface de l'espace sphérique de rayon r en E_n, l'intégrale $\int \frac{V\, dv}{k_n \pi r^{n-2}}$ de la distribution de vecteurs donnée ${}^pV$, étendue à tout l'espace, a pour seconde dérivée V.

Une distribution de vecteurs possède la *propriété du potentiel*, si ses valeurs scalaires satisfont aux conditions de disparaître à l'infini.

IV. *Une distribution de vecteurs est déterminée univoquement par sa dérivée totale* Z *du second ordre.*

V. *Une distribution de vecteurs est déterminée univoquement par sa dérivée totale du premier ordre.*

VI. *Chaque distribution de vecteurs peut être considérée comme une dérivée totale; en d'autres termes : chaque distribution de vecteurs a un potentiel déterminé univoquement par elle.*

VII. *Le potentiel d'une* ${}_{p-1}^{p}V$ *quelconque est une* ${}^{p-1}_{p}V$, *celui d'une* ${}_{p+1}^{p}V$ *est une* ${}^{p+1}_{p}V$.

VIII. *La distribution générale* ${}^{p}V$ *peut être considérée comme intégrale quelconque des champs élémentaires* Ch_1, Ch_2, *où*

$$Ch_1 = \nabla \int \frac{{}^{p-1}_{p}Z\, dv}{k_n \pi r^{n-2}},$$

${}^{p-1}_{p}Z$ *se composant des* ${}^{p-1}$ *vecteurs de la surface d'un espace sphérique infiniment petit* ${}^{p-1}Sp_z$,

$$Ch_2 = \nabla \int \frac{{}^{p+1}_{p}Y\, dv}{k_n \pi r^{n-2}},$$

${}^{p+1}_{p}Y$ *se composant des* ${}^{p+1}$ *vecteurs coupant sous un angle droit la surface d'un espace sphérique infiniment petit* ${}^{n-p-1}Sp_y$.

Application de la théorie. — 1° Au champ des forces en E_2 (dans le plan); 2° au champ des planivecteurs (des tourbillons) en E_4; 3° au champ des forces en E_3.

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Le champ des forces des espaces non euclidiens à courbure négative. (75-94).

A. *L'espace hyperbolique* E_3. — 1. Soit, par rapport à un système de coordonnées rectangulaires,

$$ds = \sqrt{A^2\, du^2 + B^2\, dv^2 + C^2\, dw^2}$$

et représentons par X_u, X_v, X_w les composantes de la distribution des vecteurs linéaires X. Alors l'intégrale de X le long d'une courbe fermée est égale à celle d'un planivecteur Y étendue aux éléments superficiels d'une surface quelconque limitée par la courbe, les composantes Y_u, Y_v, Y_w étant déterminées par les équations

$$Y_u = \frac{1}{BC}\left[\frac{\partial(X_v B)}{\partial w} - \frac{\partial(X_w C)}{\partial v}\right], \qquad \ldots.$$

Le planivecteur Y forme la *première dérivée* de X. De plus, la *seconde dérivée* de X est l'expression scalaire

$$Z = \frac{1}{ABC}\sum \frac{\partial(X_u BC)}{\partial u}.$$

Comme d'ordinaire, la première dérivée est appelée le *vecteur de rotation*, la seconde la *divergence*.

2. Pour que X soit une ${}^{1}_{2}X$, c'est-à-dire la seconde dérivée d'un planivecteur Ξ, il faut et il suffit qu'on ait $Z = 0$.

3. Pour que X soit une ${}^{1}_{0}X$, c'est-à-dire la première dérivée (gradient) d'une distribution scalaire φ, on doit avoir $Y = 0$.

4. La ${}^{1}_{0}X$, dont la divergence est une valeur scalaire isolée à l'origine, est dirigée suivant le rayon vecteur et égale à $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 r}$, où la constante de l'espace est l'unité.

5. La supposition que X possède la propriété de champ, c'est-à-dire qu'elle disparaît à l'infini, de manière que son ordre est inférieur à celui de $\frac{1}{r}$ dans la direction du rayon vecteur et à celui de e^{-r} dans la direction normale au rayon vecteur.

6. Un champ vectoriel est déterminé univoquement par la divergence et la rotation.

7. Quand on connaît des distributions élémentaires de la divergence et de la rotation, les champs vectoriels correspondants sont des champs élémentaires.

8. Le champ Ch_1 qui est la dérivée du potentiel $\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sh}^2 r}$, considéré comme la somme de deux champs fictifs d'un seul point.

9. Le champ Ch_2 d'un courant circulaire suivant le plan équatorial, identique à Ch_1 en dehors de l'origine.

10. Le produit de volume de trois vecteurs, deux desquels sont des unités de vecteurs en deux points donnés, tandis que le troisième $\frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh}^2 r}$ agit suivant les droites joignant ces deux points, etc.

Étude analogue des deux cas :
B. L'espace hyperbolique E_2.
C. L'espace hyperbolique E_n.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Occultations mutuelles et éclipses des satellites de Jupiter en 1908. (189-210, 1 pl., 439-453, 2 pl., 468-469).

De Vries (*J.*). — Complexes quadratiques de révolution. (211-216).

1. Si les rayons d'un complexe se composent des génératrices d'un des deux systèmes d'un système d'hyperboloïdes de révolution à même axe a, le complexe est de révolution autour de cet axe; s'il contient en même temps les génératrices des deux systèmes, il est aussi symétrique. Dans le système ordinaire des coordonnées de droites $p_1, p_2, \ldots, p_6$, le complexe quadratique de révolution est représenté par l'équation

$$A(p_1^2+p_2^2)+Bp_3^2+2Cp_3p_6+Dp_6^2+E(p_4^2+p_5^2)+2F(p_1p_5-p_2p_4)=0;$$

pour $C=0$ ce complexe est symétrique.

2. La surface des singularités se compose de deux quadriques de révolution se coupant suivant quatre droites isotropes.

3. La surface axiale des rayons qui s'appuient sur une droite donnée quelconque.

4. Les cas particuliers

$$p_3p_6=a(p_1^2+p_2^2),\qquad p_4^2=a(p_1^2+p_2^2),\qquad p_3^2=a(p_4^2+p_5^2),\qquad \ldots.$$

5. Le complexe hélicoïdal.

6. Transformation homographique.

Van Laar (*J.-J.*). — La forme des lignes spinodale et de plissement pour des mélanges binaires de substances normales. (227-236, 1 pl.).

Wertheim Salomonson (*J.-K.-A.*). — Quelques remarques se rapportant à la méthode des cas vrais et faux de Fechner. (246-250).

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Le champ des forces des espaces non euclidiens à courbure positive. (293-310).

Étude en rapport intime avec la précédente, où l'auteur s'occupe successivement de l'espace sphérique Sp_2, l'espace sphérique Sp_3 et l'espace sphérique Sp_n.

Versluys (*W.-A.*). — Les équivalents plückériens d'un point cyclique d'une courbe gauche. (342-344).

Seconde Communication. Pour la première, on compare plus haut (t. XIV, p. 483).

Zwiers (*H.-A.*). — Recherches sur la trajectoire de la comète périodique Holmes et sur les perturbations de son mouvement elliptique. (372-382).

Kapteyn (*W.*). — Sur une classe particulière d'équations différentielles homogènes linéaires du second ordre. (410-412).

L'auteur se propose de déterminer toutes les équations différentielles

$$Ry'' + Sy' + T = 0,$$

où R, S, T sont des polynomes en x, jouissant de la propriété d'admettre comme deuxième intégrale particulière

$$y_2(x) = \int_\alpha^\beta \frac{y_1(z)\,dr}{x - z},$$

$y_1(x)$ représentant une première intégrale particulière.

Schuh (*Fr.*). — Le lieu des couples de points communs et l'enveloppe des cordes communes de courbes faisant partie de trois faisceaux. (Première Partie). (412-422).

1. Dans un même plan on donne trois faisceaux (C_r), (C_s), (C_t) de courbes C_r, C_s, C_t des ordres r, s, t; à déterminer le lieu M des couples de points par lesquels passent des courbes C_r, C_s, C_t de ces faisceaux. On trouve :

Le lieu M *des couples de points à la fois mobiles, par lesquels passent des*

courbes de chacun des trois faisceaux, est de l'ordre

$$n = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha r + \beta s + \gamma t),$$

si α, β, γ *représentent respectivement les nombres des points d'intersection fixes des couples de faisceaux* (C_s, C_t), (C_t, C_r), (C_r, C_s).

2. Cas où les faisceaux admettent r^2, s^2, t^2 points de base simples. Si α', β', γ', δ' représentent successivement les nombres des points de base communs aux couples de faisceaux (C_s, C_t), (C_t, C_r), (C_r, C_s) et aux trois faisceaux, le lieu cherché est de l'ordre

$$n = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha' r + \beta' s + \gamma' t) - \delta'(r + s + t).$$

3. Sur le lieu en question M, la multiplicité d'un point de base A_r du faisceau (C_r) est $st - \alpha - 1$, celle d'un point de base commun A_{rs} des faisceaux (C_r), (C_s) est $rt + st - \alpha - \beta - 3$, celle d'un point de base commun A_{rst} des trois faisceaux (C_r), (C_s), (C_t) est $rs + rt + st - \alpha - \beta - \gamma - 5$.

4. Énumération des points d'intersection d'une des courbes C_r avec le lieu M. On dérive

$$(r^2 - \beta - \gamma - \delta)(st - \alpha - 1)$$

points des points A_r,

$$(\beta - \delta)(rs + st - \alpha - \gamma - 3)$$

points des points A_{rt},

$$(\gamma - \delta)(rt + st - \alpha - \beta - 3)$$

points des points A_{rs},

$$\delta(rs + rt + st - \alpha - \beta - \gamma - 5)$$

points des points A_{rst} et

$$2(rs - \gamma - 1)(rt - \beta - 1) - (r - 1)(r - 2)$$

points d'intersection mobiles avec C_r.

5. Le lieu M admet des triples de points doubles, ne coïncidant pas avec des points de base, par lesquels passent une courbe de chacun des trois faisceaux. De plus, M peut admettre des couples de points doubles.

6. Il arrive

$$4(rs + rt + st) - 6(r + s + t) + 6 - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

fois que les points d'un couple coïncident.

7. La classe de l'enveloppe de la droite joignant les points des couples est

$$3rst - 2(rs + rt + st) + (r + s + t) - \alpha(r - 1) - \beta(s - 1) - \gamma(t - 1) + \delta.$$

8. La classe de l'enveloppe s'abaisse de $r - 1$ unités par l'existence d'un point de base A_{st}, etc.

Kluyver (J.-C.). — Quelques formules se rapportant aux nombres moindres que n et premiers avec n. (423-429).

On a, en général,

$$\varphi(n) = \sum_{d'} \mu(d) d' \qquad (dd' = n),$$

où $\mu(q)$ représente la fonction arithmétique qui disparaît si q est divisible par un carré et qui égale $+1$ ou -1, au cas contraire, selon que le nombre des facteurs premiers est pair ou impair.

D'après Kronecker (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, t. I, p. 251), on a encore

$$\sum_{\nu} f(\nu) = \sum_{\substack{d \\ n}} \mu(d) \sum_{k=1}^{d'} f(kd).$$

Après avoir considéré plusieurs cas particuliers de cette formule de Kronecker, l'auteur en fait connaître quelques généralisations.

Van de Sande Bakhuysen (*H.-G.*). — J.-A. Oudemans : nécrologie. (459-464).

Schuh (*Fr.*). — Le lieu des couples de points communs et l'enveloppe des cordes communes de courbes faisant partie de trois faisceaux. Seconde Partie : Application à des faisceaux de coniques. (474-481).

9. Le lieu M est, en général, de l'ordre quinze, l'enveloppe des cordes est, en général, de la classe six.

Dans le cas des trois faisceaux de coniques aux quadruples de points de base ABCD, ABEF, CDGH, le lieu propre M se compose des droites AB, CD et d'une quintique passant deux fois aux points A, B, C, D et une fois aux points E, F, G, H, le point $K_1 = (CD, EF)$ et le point $L_1 = (AB, GH)$. L'enveloppe propre est une conique dont EF, GH, K_1L_1 sont des tangentes.

10. Si les points A, B, C, D, E, F du cas précédent se trouvent sur une conique, la quintique se décompose en cette conique et une cubique passant par A, B, C, D, G, H, K_1, L_1 et deux points déterminés de la conique.

11. Si, de plus, les points A, B, C, D, G, H se trouvent sur une même conique, la quintique se décompose en deux coniques et une droite, la droite (K_1, L_1). Si K_1 et L_1 coïncident, le lieu M devient indéterminé.

12. Cas où E et G coïncident, etc.

13. Cas où les dix points A, B, C, D, E, F, G, H, K_1, L_1 se trouvent sur une même cubique.

14. Cas de coïncidence de E et G et de F et H.

Schuh (*Fr.*). — Sur le lieu des couples de points communs de quatre faisceaux de surfaces. (481-492).

1. Si l'on se restreint aux couples communs à des surfaces F_r, F_s, F_t, F_u des faisceaux (F_r), (F_s), (F_t), (F_u) dont les deux points composants sont à la fois mobiles, on a affaire au lieu M propre.

2. Soient l une droite quelconque, Q_{stu} un point quelconque de cette droite, a le nombre des points d'intersection mobiles des trois surfaces F_s, F_t, F_u pas-

sant par Q_{stu}, et représentons par Q_r les $r(a-1)$ points d'intersection de l avec les $a-1$ surfaces F_r menées par les $a-1$ points d'intersection des surfaces F_s, F_t, F_u par Q_{stu}, différents de Q_{stu}. Faisons correspondre au point Q_{stu} les $r(a-1)$ points Q_r, et considérons les points de coïncidence, se composant des n points Q_{stu} du lieu cherché M situé sur l et des points d'intersection de l avec la surface T_{stu}, lieu du point T pour lequel les trois surfaces des faisceaux (F_s), (F_t), (F_u) qui le contiennent, admettent en T des plans tangents passant par une même droite. Si b, c, d sont les nombres des points d'intersection mobiles des triples de surfaces (F_r, F_t, F_u), (F_r, F_s, F_u), (F_r, F_s, F_t), la correspondance entre les points Q_{stu} et Q_r est une $(ar-r, bs+ct+du-r)$, admettant $ar+bs+ct+du-2r$ coïncidences.

3, 4. La surface de contact T_{stu} des trois faisceaux (F_s), (F_t), (F_u) est de l'ordre

$$2(s+t+u-2).$$

5. Le lieu M est de l'ordre

$$ar+bs+ct+du-2(r+s+t+u)+4.$$

6. Dans le cas général où $a=stu, \ldots$, l'ordre de la surface cherchée est

$$4(rstu+1)-2(r+s+t+u).$$

7, 8, 9, 10. Sur M la courbe de base B_r du faisceau (F_r) est une courbe de multiplicité $a-1$, la partie commune B_{rs} des deux courbes de base B_r, B_s une courbe de multiplicité $a+b-3$, la partie commune B_{rst} des trois courbes de base B_r, B_s, B_t une courbe de multiplicité $a+b+c-5$, la partie commune B_{rstu} des quatre courbes de base une courbe de multiplicité $a+b+c+d-7$. Les points d'intersection des courbes de base sont des points multiples de M, c'est-à-dire un point d'intersection de B_r et B_s est un point de multiplicité $a+b-2$, un point d'intersection de B_r, B_s, B_t (ou de B_r et B_{st}) un point de multiplicité $a+b+c-4$, un point d'intersection de B_r, B_s, B_t, B_u (ou de B_r, B_s, B_{tu}, ou de B_{rs} et B_{tu}, ou de B_r et B_{stu}) un point de multiplicité $a+b+c+d-6$.

11. Étude de plusieurs autres courbes particulières du lieu.

Wythoff (*W.-A.*). — La règle de Néper dans l'espace quadridimensional. (492-497).

Si l'on considère comme éléments d'un triangle sphérique $A_1A_2A_3$, rectangle en A_2, l'hypoténuse a_2, les deux angles A_1, A_3 et les compléments $\frac{1}{2}\pi - a_1$, $\frac{1}{2}\pi - a_2$ des côtés a_1, a_2, chaque formule du triangle sphérique rectangle admet la substitution cylindrique $(A_3, \frac{1}{2}\pi - a_3, a_2, \frac{1}{2}\pi - a_1, A_1)$.

Ici cette règle mnémonique de Néper est étendue à l'espace quadridimensional, au tétraèdre hypersphérique $A_1A_2A_3A_4$ birectangle, les arêtes A_1A_2 et A_3A_4 étant respectivement normales aux faces $A_2A_3A_4$ et $A_1A_2A_3$. Ainsi, les deux séries de cinq triangles sphériques rectangles dont les hypoténuses forment un quintangle sphérique sont remplacées par une série unique de douze tétraèdres opposés deux à deux, et la substitution cyclique est remplacée par une substitution à trois cycles.

Rapports entre les volumes de deux quelconques des douze tétraèdres.

Postma (*O.*). — Encore quelques remarques sur la quantité H et la distribution de la vitesse d'après Maxwell. (498-506).

Dans son article précédent (t. XII, p. 602-611), l'auteur a critiqué les démonstrations de la distribution de Maxwell comme l'état le plus probable d'un gaz, données par L. Boltzmann et J.-H. Jeans. Ici il fait voir qu'une autre interprétation de l'analyse de ces savants lève les difficultés. Cette interprétation nouvelle s'accorde tout à fait avec les bases de la théorie de Gibbs dans ses *Statistical Mechanics;* elle permet, en outre, à l'auteur de corriger la démonstration du théorème analogue pour un gaz non réglé, donnée par L. Boltzmann dans son *Gastheorie,* d'une erreur indiquée par C.-H. Wind.

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Keesom* (*W.-H.*). — Contribution à la connaissance de la surface φ de Van der Waals. (507-517, 655-658).

XII. Le coulage à fond de la phase gazeuse dans la phase fluide chez les mélanges binaires.

XIII. Le coulage à fond et la réascension de la phase gazeuse, etc.

Van der Waals (*J.-D.*). — Quelques remarques sur la théorie de la surface ψ des mélanges binaires. (540-544).

Schoute (*P.-H.*). — Sur le lieu des points de rebroussement d'un système triplement infini de cubiques planes à six points de base. (570-580).

Dans la représentation connue de la surface cubique sur un plan, les sections planes de la surface correspondent à des cubiques passant par six points, tandis que la courbe parabolique p^{12} de la surface correspond point par point au lieu r^{12} des points de rebroussement du système de cubiques planes. A l'aide de cette correspondance, l'auteur trouve :

Le lieu r^{12}, qui consiste en dix traits en forme d'ovale, admet six points quadruples d'un caractère particulier, les six points de base A_i du système de cubiques; chacun de ces six points quadruples se compose de deux points de rebroussement, dont les tangentes coïncident avec celles des deux cubiques du système admettant un point de rebroussement en ce point de base, mais dont les pointes aiguës sont dirigées en sens opposé.

Étude du cas métriquement spécialisé où les six points A_i sont les cinq sommets d'un pentagone régulier et son centre, correspondant à la surface diagonale de Clebsch. Pour ce cas, l'équation de r^{12}

$$\rho^4 - 7\rho^6 + 20\rho^8 - 15\rho^{10} - 3\rho^{12} + 2P(1 - 3\rho^2 - 3\rho^4 + \rho^6) + 4P^2(2 - \rho^2) = 0,$$

où $\rho^2 = x^2 + y^2$ et $P = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$, est déduite à l'aide de considérations géométriques simples, basées sur les mouvements anallagmatiques du pentagone. Vérification de ce que la courbe n'admet comme points réels que six quadruples isolés et dix points doubles isolés (les dix ovales s'étant reduits à des points).

Considération de plusieurs autres cas particuliers plus ou moins remarquables :

1° Les six points de base sont les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet. Dans ce cas correspondant à une surface cubique à quatre nœuds, le r^{12} se compose des quatre côtés du quadrilatère comptés trois fois.

2° Les six points de base sont les sommets d'un hexagone régulier. Ici, on a affaire à une surface cubique spéciale à un nœud, projetée centralement de ce point comme centre sur un plan quelconque. Le lieu r^{12} se compose du cercle circonscrit compté trois fois et d'une rosace à six feuilles représentant avec le cercle six des dix ovales, les quatre autres s'étant réduits à des points.

3° Les cas des coïncidences (2, 2, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6) des six points de base A_i, ...

Schuh (*Fr.*). — Sur le lieu des couples de points communs de $n+1$ faisceaux de variétés V_{n-1} à $n-1$ dimensions dans l'espace E_n à n dimensions. (633-638).

Cette Communication contient l'extension des résultats principaux des deux Communications précédentes à l'hyperespace. L'auteur trouve :

La variété $(n-1)$*-dimensionale de contact d'un système* (μ, ν) *de* ∞^1 *variétés* $(n-1)$*-dimensionales, dont* μ *passent par un point donné et* ν *touchent une droite donnée, avec un système* (φ, ψ) *de* ∞^{n-1} *courbes, dont* φ *passent par un point donné et* ψ *touchent un* E_{n-1} *en un point d'une droite donnée de cet* E_{n-1}, *est de l'ordre* $\mu\psi + (\mu+\nu)\varphi$.

La variété $(n-1)$*-dimensionale de contact d'un nombre de* n *systèmes*

$$(\mu_1, \nu_1), \quad (\mu_2, \nu_2), \quad \ldots, \quad (\mu_n, \nu_n)$$

de ∞^1 *variétés* $(n-1)$*-dimensionales, c'est-à-dire le lieu du point* P *où les variétés des systèmes qui y passent admettent une tangente commune, est de l'ordre*

$$\mu_1\mu_2\ldots\mu_n\left(\frac{\nu_1}{\mu_1}+\frac{\nu_2}{\mu_2}+\ldots+\frac{\nu_n}{\mu_n}+n-1\right).$$

Ainsi, dans le cas de n faisceaux des ordres $r_1, r_2, \ldots, r_n$, où l'on a $\mu_i = 1$, $\nu_i = 2(r_i - 1)$, on trouve

$$2(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) - n - 1.$$

L'ordre du lieu cherché M *des couples de points communs est*

$$\sum_{i=1}^{n+1} [(a_i - 2)r_i + 1)],$$

où a_i *représente le nombre des points d'intersection libres de* n *variétés quelconques des autres faisceaux; ce lieu passe* $a_i - 1$ *fois par la base du faisceau à indice* i.

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Mlle Jolles* (*T.-C.*). — Contribution à la connaissance de la surface ψ de Van der Waals. (659-667, 4 pl.).

XIV. Déduction graphique des résultats des expériences de M. Kuenen sur des mélanges d'éthane et d'oxydants d'azote.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Prof. W.-H. Bakhuis Roozeboom. *In memoriam.* (681-685).

Van der Waals (*J.-D.*). — Contribution à la théorie des mélanges binaires. (686-704, 823-847, 915-939).

La théorie des mélanges binaires développée par l'auteur dans sa *Théorie moléculaire* a provoqué un grand nombre de recherches expérimentales et théoriques qui ont contribué beaucoup à la connaissance des phénomènes qui se présentent par rapport aux mélanges. Néanmoins, plusieurs questions importantes sont restées irrésolues ; ainsi, celle de la classification des groupes différents des surfaces Ψ. Quelques mélanges binaires admettent une surface Ψ dont le pli présente une forme bien simple, tandis que le pli de la surface d'autres mélanges binaires est assez compliqué ou que cette surface possède encore un second pli. Jusqu'à présent, on ne connaît pas la cause de cette différence; on ignore même comment la mettre en rapport avec d'autres propriétés saillantes de groupes particuliers de mélanges. Il est vrai, la théorie fait connaître l'équation de la courbe spinodale qui borne le pli, et la connaissance absolue de cette équation doit fournir à l'analyse les moyens de classifier les surfaces Ψ. Mais l'équation est très compliquée, et, ce qui est pis encore, pour le cas des petits volumes elle ne forme qu'une approximation assez grossière. Guidé par ces remarques, l'auteur a cherché une manière d'attaquer le problème, plus intuitive que la manière analytique; cette méthode nouvelle, sur laquelle il nous est impossible d'entrer en des détails ici, permet d'indiquer une cause dont dépendent les diverses formes du pli et fait donc apparaître sous un nouveau jour plusieurs phénomènes partiellement connus.

Van der Stok (*J.-P.*). — Sur le traitement des observations du vent. (704-720).

Kohnstamm (*Ph.*). — Sur la forme de la courbe des trois phases, solide, fluide, gazeuse, d'un mélange binaire. (732-742).

Kohnstamm (*Ph.*). — Sur les équilibres métastable et labile des phases solide-fluide. (742-754, 1 pl.).

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Keesom* (*W.-H.*). — Contribution à la connaissance de la surface de Van der Waals. (754-763, 1 pl.; 851-854, 1 pl.).

XV. Cas où l'une des deux composantes est un gaz sans attraction, à molécules admettant des dimensions. Miscibilité restreinte de deux gaz.

Julius (*W.-H.*). — Longueurs d'onde des maxima d'émission et d'absorption dans le spectre ultra-rouge trouvées antérieurement. (811-817).

Van Oss (*S.-L.*). — Équilibre de systèmes de forces et de rotations dans l'espace E_4. (818-823).

Démonstration des deux théorèmes :

Dans le cas de onze forces agissant suivant des droites fixes données, il n'y a, en général, qu'une distribution unique des rapports des intensités, de manière que le système des forces soit en équilibre.

Pour que n forces ($11 > n > 4$) *en équilibre n'admettent qu'une distribution unique des rapports des intensités, il faut et il suffit qu'elles appartiennent à* $21 - n$ *complexes linéaires.*

Rapport entre les théorèmes fondamentaux de la géométrie de l'espace E_9 et ceux de la théorie des vis de M. R. Stawell Ball.

Van der Waals (*J.-D.*). — La forme de l'isotherme empirique pendant la condensation d'un mélange binaire. (847-851).

Dans la position des axes coordonnés admise par l'auteur, l'isotherme empirique ne possède, en général, aucun point à tangente horizontale. Cas d'exception.

Wind (*C.-H.*). — Une hypothèse sur l'origine des rayons Röntgen. (855-859).

Julius (*W.-H.*), *Kapteyn* (*J.-C.*) et *Schreinemakers* (*F.-A.-H.*). — Rapport sur un Mémoire de M. A. Brester Jr., sous le titre : « Essai d'une explication du mécanisme de la périodicité dans le Soleil et les étoiles rouges variables ». (868-871).

Schoute (*P.-H.*) et *Cardinaal* (*J.*). — Rapport sur un Mémoire de M. Fr. Schuh, intitulé : « Sur le lieu des points du plan dont la somme des distances à *n* droites données est constante, et les questions analogues dans les espaces à trois et à plusieurs dimensions ». (871-873).

Van Laar (*J.-J.*). — Sur la forme de la ligne des points de plissement et des lignes spinodales, dans le cas où l'attraction mutuelle des molécules de l'une des composantes d'un mélange binaire de substances normales est petite. (939-952).

Tome XVI; mai 1907-avril 1908.

Van der Waals (*J.-D.*) — Contribution à la théorie des mélanges binaires (*suite*). (12-31, 143-161, 216-232).

De Sitter (*W.*). — Les orbites pérodiques du type Hestia. (35-44).

Il s'agit de quelques solutions du cas particulier suivant du problème des trois corps :

Deux points matériels S *et* J, *de masses* 1 *et* μ, *se meuvent, avec une vitesse angulaire constante* $n' = 1$, *sur des circonférences de cercles autour de leur centre de gravité commun. Trouver le mouvement d'un point matériel* P, *de masse infiniment petite, du même plan, sous l'influence des attractions de* S *et* J, *d'après la loi de Newton, la distance constante* SJ *étant considérée comme unité de longueur.* (Problème de M. G. Darwin, *Acta mathematica,* t. XXI, p. 99-242).

L'auteur s'occupe des cas particuliers où l'orbite périodique de P est une ellipse de petite excentricité, S étant un des foyers, le mouvement moyen n s'approchant de la valeur 3 pour $\lim \mu = 0$; il considère plusieurs cas étudiés par M. Darwin, du point de vue développé par M. Poincaré dans les Tomes I et II de ses *Methodes nouvelles.*

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Keesom* (*W.-H.*). — Contribution à la connaissance de la surface de Van der Waals. (59-66, 233-242, 1 pl.).

XV. Cas où l'une des composantes est un gaz sans attraction, à molécules admettant des dimensions. Miscibilité restreinte de deux gaz.

XVI. Le coulage à fond de la phase gazeuse dans la phase fluide chez les mélanges binaires, dans le cas où les molécules de l'une des deux composantes n'exercent qu'une attraction faible.

De Sitter (*W.*). — Quelques remarques sur la théorie des satellites de Jupiter. (110-122).

Aperçu sommaire de recherches qui paraîtront *in extenso* dans le n° 17 des *Publications du Laboratoire astronomique de Groningue.*

1. Théorie de la libration.
2. Les équations du centre.
3. Détermination de la libration à l'aide des observations.

Van Laar (*J.-J.*). — Sur les dernières remarques de MM. Kamerlingh Onnes et Keesom. (136-137).

Barrau (*J.-A.*). — L'extension de la configuration de Kummer aux espaces de $2l - 1$ dimensions. (205-212, 1 pl.).

1. Si l'on représente par S_1 et S_2 les schémas $\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$ et $\begin{matrix} c & d \\ d & c \end{matrix}$ de caractères et par T_1 et T_2 les schémas $\begin{matrix} + & + \\ + & - \end{matrix}$ et $\begin{matrix} - & - \\ - & + \end{matrix}$ de signes, les combinaisons $\begin{matrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{matrix}$

et $\begin{matrix} T_1 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{matrix}$ donnent les deux schémas

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{matrix}$$

En combinant successivement chacune des quatre lignes de quatre caractères avec chacune des quatre lignes de quatre signes, on obtient seize quadruples de quantités algébriques, représentant les coordonnées de points des seize sommets d'une configuration Cf. (16_6) de Kummer ou, si l'on veut, les coordonnées tangentielles des seize faces d'une Cf. (16_6).

2. L'auteur étend ce théorème connu, d'abord à l'espace E_7 à sept dimensions de la manière suivante :

Si l'on représente par U_1 *et* V_1 *les schémas de caractères et de signes de quatre lignes que nous venons d'indiquer et que* U_2 *et* V_2 *représentent des schémas analogues dont* U_2 *contient les caractères* e, f, g, h, *tandis que* V_2 *se déduit de* V_1 *par l'inversion de tous les signes, la combinaison analogue des schémas* $\begin{matrix} U_1 & U_2 \\ U_2 & U_1 \end{matrix}$ *et* $\begin{matrix} V_1 & V_1 \\ V_1 & V_2 \end{matrix}$ *à huit lignes mène à* 64 *octuples de quantités algébriques, pouvant être considérées comme les coordonnées de points des* 64 *sommets d'une configuration* Cf. (64_{28}) *de l'espace* E_7 *ou comme les coordonnées tangentielles des espaces* E_6 *d'une* Cf. (64_{28}).

3. Tout aussi comme les seize sommets de la Cf. (16_6) se décomposent en quatre quadruples de sommets, les sommets de quatre tétraèdres situés deux à deux en position de Möbius, les 64 sommets de la nouvelle Cf. (64_{28}) se décomposent en huit octuples de sommets de huit simplexes de E_7, doués entre eux, deux à deux, de la propriété analogue.

4. Comme l'exige l'analogie avec le groupe G_{32} (de Klein) en E_3, on trouve en E_7 un groupe géométrique G_{128} d'Abel, composé de l'identité, de 63 collinéations, de 28 systèmes focaux en involution et de 36 polarités.

5. En chacun des 64 espaces E_6 de Cf. (64_{28}) les 28 sommets se trouvent sur une variété quadratique V^2 à cinq dimensions.

6-7. Sommets communs à deux, trois, quatre et six espaces E_6.

Godeaux (*L.*). — Le théorème de Grassmann dans l'espace à *n* dimensions. (213-215).

Le théorème de Grassmann dans le plan est le suivant :

Le lieu d'un E_0 *tel que les* E_1 *qui le joignent à trois* E_0 *fixes rencontrent trois* E_1 *fixes en trois* E_0 *d'un même* E_1 *est une variété* V_1^2.

Dans l'espace ordinaire, on en connaît les deux généralisations :

Le lieu d'un E_0 *tel que les* E_2 *qui le joignent à quatre* E_1 *fixes rencontrent quatre* E_1 *fixes en quatre* E_0 *d'un même* E_2 *est une variété* V_2^4.

Le lieu d'un E_0 *tel que les* E_1 *qui les joignent à quatre* E_0 *fixes rencontrent quatre* E_2 *fixes en quatre* E_0 *d'un même* E_2 *est une variété* V_2^4.

Pour E_n, l'auteur trouve :

Le lieu d'un E_p *tel que les* E_{r_i+p+1} *qui le joignent à* k *espaces* E_{r_i} *fixes rencontrent* k E_{r_i} *fixes en* k $E_{r_i+s_i+p-n+1}$ *d'un même*

$$E_{\Sigma r_i+s_i+k(p-n+2)-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

est une variété $V^k_{(n-p)(p+1)-1}$.

Applications à la géométrie des droites.

Van der Stok (*J.-P.*). — Analyse des courbes de fréquence de la température de l'air. (248-260).

Van Everdingen (*E.*). — Rapport entre la mortalité des enfants et les hautes températures. (274-286).

Kapteyn (*W.*). — Sur un produit infini représenté par une intégrale définie. (325-329).

Pour $0 < u < 1$, l'auteur trouve

$$\prod_{s=0}^{s=\infty}\left[1+\frac{v^2}{(u+s)^2}\right]=\frac{\Gamma^2(u)\,\Gamma(2-2u)}{\pi^2}\left(e^{2\pi v}-2\cos 2\pi u-e^{-2\pi v}\right)\int_0^\infty \frac{\cos(2vt)\,dt}{(e^t+e^{-t})^{2-2u}}.$$

Étude de plusieurs cas particuliers, etc.

Postma (*O.*). — Mouvement de systèmes de molécules non soumis à l'action de forces extérieures. (332-349).

Les deux manières de démontrer qu'une masse de gaz non soumise à l'action de forces extérieures atteindra peu à peu, à cause des chocs mutuels, l'état d'une distribution homogène, celle de Boltzmann et celle de Boltzmann-Jeans.

Le problème des petites planètes de M. Poincaré comme introduction à la théorie des gaz. L'entropie de position, appelée quelquefois *entropie grossière*, et l'entropie par rapport aux vitesses.

Le cas de transition entre celui des planètes et celui des molécules de gaz : le gaz à une dimension, où les molécules se meuvent parallèlement entre deux parois parallèles normales à la direction du mouvement (de va-et-vient) des molécules.

Cas d'un ensemble de systèmes de n molécules se mouvant dans un vase de la forme d'un parallélépipède rectangulaire.

Schmutzer (*J.*). — L'extinction oblique des cristaux rhombiques. (362-380).

Stein (*J.*). — L'étoile β Lyræ comme étoile double. (380-405, 1 pl.).

Voigt (*W.*). — Ueber die krystallographisch zulässigen Zähligkeiten der Symmetrieaxen. (406-411).

Sur les nombres caractéristiques admissibles des axes de symétrie des cristaux.

Barrau (*J.-A.*). — L'analogue de la configuration de Kummer dans l'espace à sept dimensions. (457-463, 1 pl.).

Dans une Communication antérieure (p. 205-215), l'auteur a développé une méthode pour la génération de configurations dans les espaces à $2^p - 1$ dimensions, qui peuvent être considérées comme des généralisations de la configuration de Kummer, configurations déduites d'une tout autre manière par M. W. Wirtinger en 1889. Il entre dans des détails par rapport au cas spécial $p = 3$ de l'espace E; ici, la configuration Cf. (64_{28}) de ce cas est représentée par le symbole K^{VII}.

Si l'on omet de la configuration de Kummer un sommet quelconque et un plan qui ne contient pas ce point, les quinze éléments restants de chacune des deux espèces se décomposent en un groupe de six éléments incidents à l'élément omis de l'autre espèce et un groupe de neuf éléments. Chacun des deux sextuples forme avec les quinze éléments de l'autre espèce une Cf. $(6_5, 15_2)$ libre. Les deux nonuples forment ensemble une Cf. (9_4) identique à la Cf. $(9_4)^{III}$ de la classification de V. Martinetti.

De la même manière, on peut omettre de K^{VII} de 2304 manières différentes un sommet et un E_6 ne contenant pas ce point. Alors les 63 éléments restants de chaque espèce se décomposent en deux groupes G_{28} et G_{35} de 28 et 35 éléments. Ensemble, les deux groupes G_{28} forment un schéma (28_{12}), les deux groupes G_{35} un schéma (35_{16}), tandis que deux groupes opposés G_{28}, G_{35} mènent à un schéma $(28_{15}, 35_{12})$. Étude de ces schémas.

Schoute (*P.-H.*). — La section du polytope de mesure M_n de l'espace E_n à n dimensions par l'espace central E_{n-1} normal à une diagonale. (467-481, 1 pl.).

a. La projection de M_n sur une diagonale.

1. *Les sommets de* M_n *se projettent sur la diagonale* AA′ *en* $n+1$ *points, aux deux extrémités* A, A′ *et aux* $n-1$ *points* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ *divisant* AA′ *en* n *parties égales; dans ces points se projettent successivement* $1, n, \frac{1}{2}n(n-1), \ldots, \frac{1}{2}n(n-1), n, 1$ *sommets.*

2. *Les sommets de chaque* M_p *limitant de* M_n $(p \leq n)$ *se projettent sur* AA′ *en* $p+1$ *points de division adjacents; dans ces points se projettent successivement* $1, p, \frac{1}{2}p(p-1), \ldots, \frac{1}{2}p(p-1), p, 1$ *sommets.*

Si l'on représente par le symbole $p'(M_p)$ la section d'un polytope de mesure M_p par un E_{p-1} de son E_p normal à une diagonale centrale en un point dont la distance à l'extrémité est p' fois la diagonale, on a :

Pour n pair, un polytope limitant M_p *de* M_n *est coupé par l'espace central* E_{n-1} *normal à la diagonale de* M_n *suivant un* $\frac{a}{p}(M_p)$, *a désignant une des valeurs* $1, 2, \ldots, \frac{p}{2}$ *pour p pair et* $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ *pour p impair.*

Pour n impair, M_p *est coupé sous les mêmes circonstances suivant un* $\frac{2a-1}{2p}(M_p)$, *a désignant une des valeurs* $1, 2, \ldots, \frac{p}{2}$ *pour p pair et* $1, 2, \ldots, \frac{p+1}{2}$ *pour p impair.*

3. L'étude des cas particuliers $n = 4, 5, 6, 7, 8$ fait trouver :

Les sommets de la section sont des sommets de M_n *pour n pair, des milieux d'arêtes de* M_n *pour n impair.*

La longueur des arêtes de la section est $\sqrt{2}$ *pour n pair,* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ *pour n impair; toutes ces arêtes sont de même espèce.*

Les faces sont des triangles équilatéraux pour n pair, des hexagones réguliers et des triangles équilatéraux (plus petits) pour n impair.

Les corps limitants sont des octaèdres et des tétraèdres pour n pair, des octaèdres tronqués et des tétraèdres (plus petits) pour n impair.

Les polytopes quadridimensionaux limitants sont des cellules régulières C_5 *tronquées jusqu'aux milieux des arêtes et des* C_5 *pour n pair, des* C_5 *tronquées jusqu'aux tiers des arêtes et des* C_5 *(plus petites) pour n impair.*

Etc., etc.

b. La projection de M_n sur un plan central par deux arêtes parallèles.

4. *La projection de* M_n *est un rectangle dont les côtés, exprimés en longueurs d'arête, sont* 1 *et* $\sqrt{n-1}$, *divisé en* $n-1$ *rectangles égaux par* $n-2$ *segments de droites parallèles égaux aux arêtes.*

5. Si l'on représente la section cherchée et son centre par D_{n-1} et O, on a :

Chaque droite par O *parallèle à une arête de* D_{n-1} *a en* D_{n-1} *une longueur* $\sqrt{2}$, *chaque plan par* O *parallèle à une face de* D_{n-1} *coupe* D_{n-1} *suivant un hexagone régulier à côtés* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, *chaque espace par* O *parallèle à un espace limitant de* D_{n-1} *coupe* D_{n-1} *suivant un octaèdre régulier à arêtes* $\sqrt{2}$, *etc.*

6. Considérons le polytope de mesure $M_{n-1}^{(1)}$ de l'espace E_{n-1} à des arêtes égales à l'unité et sa section D_{n-2}. Transformons ce polytope en un *rhombotope,* en multipliant les distances des points de ses espaces limitants E_{n-2} à l'espace E_{n-2} de D_{n-2} par $\sqrt{n}$, ce qui entraîne que la diagonale $\sqrt{n-1}$ normale à l'espace E_{n-2} de D_{n-2} s'allonge à un axe de longueur $\sqrt{n(n-1)}$ et de la période $n-1$. Tronquons ce rhombotope par deux espaces E_{n-2} normaux à cet

axe, et donc parallèles à D_{n-2}, enlevant de part et d'autre de D_{n-2} des parties de cet axe représentées par r, la longueur de l'axe étant l'unité. Représentons ce rhombotope tronqué par le symbole $Rh_{n-1}[\sqrt{n(n-1)}, r]$. Alors on a le théorème :

La section D_{n-1} *est un* $Rh_{n-1}\left[\sqrt{n(n-1)}, \frac{n-2}{2(n-1)}\right]$.

c. Explication du rapport intime entre D_{n-1} et les simplexes réguliers et régulièrement tronqués.

7. Considérons en E_n un système de coordonnées rectangulaires à origine O et aux axes OX_1, OX_2, ..., OX_n. Désignons la partie 2^n-ième de E_n formant le lieu des points à coordonnées non négatives comme la n-arête $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$. Soient A, A′ deux sommets opposés de M_n et représentons par AA_1, AA_2, ..., AA_n les arêtes passant en A, par $A'A'_1$, $A'A'_2$, ..., $A'A'_n$ les arêtes parallèles de sens opposé passant en A′. Alors M_n est la partie en E_n commune aux deux n-arêtes $A(A_1 A_2 \ldots A_n)$, $A'(A'_1 A'_2 \ldots A'_n)$. La section d'une n-arête par un espace coupant les côtés à des distances égales de l'origine étant un simplexe régulier, on trouve :

La section de M_n *par un espace quelconque* E_{n-1} *normal à une diagonale est la partie de cette* E_{n-1} *commune à deux simplexes réguliers bien déterminés, concentriques et d'orientations opposées.*

8. Si l'on indique le simplexe régulier de E_n à arêtes a par $S_n(a)$, on trouve :

Si l'on meut un M_n, *dont la diagonale* AA′ *est perpendiculaire à un espace* E_{n-1} *donné, à travers cet* E_{n-1} *dans la direction de cette diagonale, de manière que chaque point de* M_n *décrit une normale sur* E_{n-1}, *la section de* M_n *par* E_{n-1} *est à chaque instant la partie de* E_{n-1} *commune à deux simplexes concentriques et d'orientations opposées*

$$S_n(p\sqrt{2n}) \quad et \quad S'_n(p'\sqrt{2n}),$$

où p *et* p' *satisfont la relation* $p + p' = \sqrt{n}$. *Pendant ce mouvement, le barycentre commun des deux simplexes ne bouge pas. Tandis que* $S_n(p\sqrt{2n})$ *se dilate d'un point à un* $S_n(n\sqrt{2})$, $S'_n(p'\sqrt{2n})$ *se rétrécit d'un* $S'_n(n\sqrt{2})$ *à un point.*

Au moment où ce mouvement s'est fini à moitié, on a :

La section D_{n-1} *est la partie de* E_{n-1} *commune à deux simplexes égaux, concentriques et d'orientations opposées,* $S_n(\frac{1}{2}n\sqrt{2})$, $S'_n(\frac{1}{2}n\sqrt{2})$.

9. *Dans le mouvement de* M_n *à travers* E_{n-1} *les sommets, les arêtes, les faces, etc., de* S_n *se dégagent successivement entièrement de* S'_n *aux moments où le point d'intersection* P *de la diagonale* AA′ *de* M_n *avec* E_{n-1} *coïncide avec les points de division* A_1, A_2, ..., A_{n-1}.

Etc., etc.

Mme Boole Stott (*A.*) et *Schoute* (*P.-H.*). — Sur cinq couples de cellules quadridimensionales dérivées de la même source. (Première Partie). (482-486).

Introduction. — Considérons une quelconque des six cellules régulières C_5, C_8, C_{16}, C_{120}, C_{600} de l'espace E_4 et en déduisons deux cellules nouvelles. La première de ces deux cellules est engendrée par une troncature régulière de la cellule régulière aux sommets étendue jusqu'aux points milieux A_0; les points A_0 sont donc les sommets de cette cellule nouvelle. La seconde des deux cellules nouvelles est la forme polaire réciproque de la première par rapport à l'hypersphère des points A_0. Comme les deux cellules déduites de cette manière de la cellule régulière C_{16} sont des cellules régulières C_{24}, on ne trouve que cinq couples de cellules nouvelles.

Considérations générales. — Si l'on représente par s, a, f, e, p, q, s', a', f' successivement les nombres des sommets, des arêtes, des faces, des espaces limitants, des espaces limitants par une arête, des espaces limitants par un sommet et des sommets, des arêtes, des faces des corps limitants, les six cellules régulières donnent lieu au Tableau :

s.	a.	f.	e.	p.	q.	s'.	a'.	f'.
5	10	10	5	3	4	4	6	4
8	24	32	16	4	8	4	6	4
120	720	1200	600	5	20	4	6	4
16	32	24	8	3	4	8	12	6
24	96		24	3	6	6	12	8
600	1200	720	120	3	4	20	30	12

Pour la première des couples de cellules nouvelles, on trouve le Tableau :

	s.	S.	A.	F.	E.	P.	Q.
C_5.....	5	10	30	30	10	3	5
C_8.....	16	32	96	88	24	3	5
C_{24}.....	24	96	288	240	48	3	5
C_{600}.....	120	720	3600	3600	720	3	7
C_{120}.....	600	1200	3600	3120	720	3	5

Schoute (*P.-H.*). — Sur les réseaux quadridimensionaux et leurs sections tridimensionales. (Première Partie). (526-537).

1. Transformation du réseau des cellules de mesure $C_8^{(2)}$ de E_4 dans le réseau formé par trois groupes équivalents de cellules $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$. Les points aux coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ sont les sommets d'une $C_8^{(2)}$. Si on les arrauge en deux groupes de huit points, dont l'un contient les points à un produit positif des coordonnées, l'autre les points à un produit négatif des coordonnées, on a obtenu les coordonnées des deux cellules $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ inscrites en $C_8^{(2)}$ dont la première s'appelle la *positive,* la seconde la *négative.* Si l'on suppose que le réseau (C_8) est formé de cellules $C_8^{(2)}$ blanches et noires de manière que deux cellules C_8 admettant un cube limitant commun diffèrent en couleur et que l'on inscrit dans chaque C_8 blanche une C_{16} positive, dans chaque C_8 noire une C_{16} négative, on trouve le réseau (C_{16}) formé par trois groupes équivalents de cellules $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$, les cellules C_{16} positives, les cellules C_{16} négatives et les cellules C_{16} neutres remplissant la partie restante de l'espace E_4.

2. Transformation du réseau (C_8), de deux manières différentes, en un réseau (C_{24}) de cellules C_{24}. Dans la première méthode, on s'imagine encore

que le réseau (C_8) est composé de cellules blanches et noires comme un damier quadridimensional, pour décomposer chacune des cellules noires en huit pyramides congruentes ayant pour sommet commun le centre de la cellule, pour bases les huit cubes limitants de la cellule. En ajoutant à chaque cellule blanche les huit pyramides noires adjacentes, on obtient le réseau des $C_{24}^{(2)}$. Dans la seconde méthode, on divise chaque cellule $C_8^{(2)}$ en seize cellules $C_8^{(1)}$ ayant le centre O de $C_8^{(2)}$ pour sommet commun, on bissecte chacune des seize cellules $C_8^{(1)}$ d'une $C_8^{(2)}$ par l'espace tridimensional normal à la diagonale qui se termine en O, et l'on réunit les seize parties autour des centres et celles autour des sommets des $C_8^{(2)}$ à des cellules $C_{24}^{(\sqrt{2})}$.

3. Les réseaux (C_8), (C_{16}), (C_{24}) sont les seuls réseaux possibles. Il n'y a pas de réseaux mixtes composés de cellules régulières.

4. Les *assemblages de Bravais* quadridimensionaux formés par les centres des cellules des réseaux et par les sommets de ces cellules.

5. On s'imagine qu'un des trois réseaux est animé d'une translation rectiligne à travers E_4, et l'on veut savoir comment se déforme la section de ce réseau par un espace fixe E_3 pendant ce mouvement. Comment ces *images de transformation* des réseaux (C_{16}), (C_{24}) sont-elles liées à celle du réseau (C_8) dont la nature est assez simple? La réponse à cette question se simplifie aussitôt que l'on connaît pour chacun des trois groupes de cellules C_{16} et pour le groupe des C_{24} la position de la cellule par rapport à la plus petite boîte de la forme d'une C_8 dont les arêtes sont parallèles aux arêtes des cellules C_8 du réseau original C_8; ces boîtes sont des $C_8^{(2)}$ pour les $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ positives et négatives et les $C_{24}^{(\sqrt{2})}$ de la seconde transformation, des $C_8^{(4)}$ pour les $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ neutres. De plus, tandis que les $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ positives et négatives et les $C_{24}^{\sqrt{2}}$ sont *corporellement* inscrites, les $C_{16}^{(2\sqrt{2})}$ neutres sont *polairement* inscrites dans leurs boîtes.

6. Rapport entre les systèmes des axes des cinq groupes de cellules.

Bouman (*Z.-P.*). — Contribution à la connaissance des surfaces à courbure moyenne constante. (537-550).

La difficulté de l'étude des surfaces à courbure moyenne constante consiste dans l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -\sin h\,\theta \cos h\,\theta.$$

Dans cette Communication, l'auteur en déduit les deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré

$$2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + (v-u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \tau_1} = 0, \qquad 2\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \tau_1} + (u-v)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \tau_1} = 0.$$

Réduction de ces équations au système

$$\left(\frac{\partial s_1}{\partial \tau_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial s_2}{\partial \tau_1}\right)^2 - 2\,Q\,s_1^2, \qquad \left(\frac{\partial s_1}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial s_2}{\partial \xi}\right)^2 + 2\,Q\,s_1^2.$$

Kluyver (*J.-C.*). — Sur la surface cyclique minima. (554-562).

Enneper a démontré (*Zeitschrift der Math. und Phys.*, t. XIV) l'existence d'une surface minima contenant un système de circonférences de cercles situées en des plans parallèles, le lieu des centres étant une courbe plane. Ici, M. Kluyver se pose la question suivante : *Deux cercles égaux se trouvent en deux plans parallèles; sous quelles conditions est-il possible de faire passer par ces deux cercles une surface cyclique minima?* Soient le rayon des cercles l'unité, le milieu de la distance des centres l'origine des coordonnées, le plan XOY parallèle aux plans des cercles, et supposons que les centres se trouvent dans le plan XOZ. On trouve que ces deux centres $(x, 0, z)$, $(-x, 0, -z)$ doivent être situés à l'intérieur d'une courbe transcendante pour que la surface soit possible. Alors il y a deux solutions, et c'est toujours la surface la plus oblique qui représente la solution stable; ces deux solutions coïncident, si les centres se trouvent sur la courbe transcendante.

Cardinaal (*J.*). — Quelques constructions déduites du mouvement d'un système plan. (566-571).

1. Énoncés de deux principes connus :

a. Si A, B, C, ... sont des points mobiles et α, β, γ, ... les centres de courbure de leurs trajectoires, il existe entre les deux systèmes A, B, C, ..., (S) et α, β, γ, ..., (Σ) une correspondance quadratique jouissant de la propriété que A, B, C, ... sont les centres de courbure des trajectoires de α, β, γ, ...

b. Soient P le pôle du mouvement et I le pôle d'inflexion. Soit A un point quelconque. Alors le point α correspondant se détermine de la manière suivante : Soit Q le point d'intersection de AI avec la normale en P à AP; la parallèle à IP menée par Q coupe AP en α.

2. Application au mouvement elliptique. Construction de la conique λ^2 correspondant à une position quelconque de la droite AB dont les extrémités A, B glissent le long des deux axes rectangulaires IX, IY. Ces coniques forment un système (6, 12). Le centre de λ^2 est le pied de la normale abaissée du pôle P sur AB; le lieu de ce centre est donc l'astroïde.

3. Application au mouvement cardoïdal. Construction de la conique λ^2 correspondant à une position quelconque de la droite AC passant par le point fixe C dont un point A parcourt un cercle par C, etc.

Kapteyn (*W.*). — Sur la multiplication de séries trigonométriques. (571-576).

1. Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont finies et continues entre les limites $x = 0$ et $x = \pi$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \frac{1}{2} a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + \frac{1}{2} a'_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin nx,$$

$$f(x)\,\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \frac{1}{2} A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx.$$

L'auteur détermine les coefficients A_n et B_n en fonction des autres. Il trouve

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_0^n a'_m a_{m-n} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a'_m a_{m+n} + a_m a'_{m+n})$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_1 b'_m b_{n-m} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (b'_m b_{m+n} + b_m b'_{m+n}),$$

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_0^n a'_m b_{n-m} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a'_m b_{m+n} - b_m a'_{m+n})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n b'_m a_{n-m} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_m b'_{m+n} - b'_m a_{m+n}).$$

2. Développement de $f(x)f(x)$ ou $f^2(x)$.
3. Déduction du théorème de Parseval.
4. Déduction de plusieurs formules de la forme

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}.$$

Etc.

De Sitter (*W.*). — Sur les masses et les éléments des trajectoires des satellites de Jupiter (et sur la masse du système). (579-599, 709-738). (*A suivre*).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXII; 1908. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3e série, T. XXIV, 1907. — 94-105.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXXV, 1907. — 16-34.

Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences. T. CXLIV-CXLV, 1907. — 45-58.

Memorie delle Societa italiana delle Scienze. T. I-VII, 1862-1890. — 59-78.

Messenger of Mathematics (The). T. XXXIII-XXXIV, 1903-1905. — 78-94; T. XXXV, 1905-1906. — 105-109.

Philosophical Transactions of the Royal Society. T. CLXXXVI-CXCIV, 1895-1900. — 5-15; T. CXCV-CXCVIII, 1901-1902. — 34-45.

Verslag van de gewone Vergaderingen der Wis-en Naturkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. T. XIII-XVI, 1904-1908. — 110-160.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Académie des Sciences. 57.
Anglin. 81.
Appell (P.). 23.
Auric. 22.
Bagnera (G.). 55.
Baire (R.). 47.
Barnes (E.). 36, 80, 90.
Barrau (J.). 151, 154.
Barré (G.). 22, 48, 49, 50, 51, 52, 53.
Bateman (H.). 86.
Bates (G.). 84.
Bauman (Z.). 130, 156.
Bellavitis (G.). 59, 69.
Bennett (T.). 91.
Benoît (R.). 51.
Bernstein (S.). 51.
Bertin (L.). 57.
Bes (K.). 126.
Betti (E.). 62.
Bianchi (G.). 59, 60.
Bioche (C.). 19, 28.
Blok (S.). 118.
Blum (G.). 47.
Blumenthal (O.). 27.
Blythe (W,). 92.
Boekwinkel (H.). 136.
Boggio (T.). 45, 55.
Boole Stott (Mme A.). 156.
Boussinesq (J.). 48, 49, 53.
Boutroux (P.). 47, 53, 55, 58.
Boys (C.). 5.
Bréguet (J.). 54.
Bréguet (L.). 54.
Brillouin (M.). 52.
Bromwich (T.). 105, 108.
Brouwer (L.). 140, 141, 143.
Brunhes (B.). 50.
Bryan (G.). 36.
Buhl (A.), 49, 55, 57.
Burbury (S.). 8.
Burnside (W.). 83, 84, 106, 109.
Caratheodory (C.). 52, 53.
Canovetti. 51.
Cardinaal (J.). 114, 117, 123, 150, 159.
Cartan (E.). 51, 58.
Chazy (J.). 54, 58.
Claude (G.). 54.
Cosserat (E.). 57, 58.
Cosserat (F.). 57, 58.
Crémieu (V.). 50.
Crussard. 47, 48.
Cunningham (A.). 82, 84, 88, 90, 92, 94, 105, 109.
Cunningham (E.). 92, 93, 109.
Dalfsen (B. von). 112.
Darboux (G.). 56, 57.
Darwin (G.). 41, 43.
Dautriche. 51.
Delassus (E.). 55.
Denjoy (A.). 53.
Dickson (A.). 35.
Dickson (L.). 84.
Dini (U.). 60, 63, 66.
Dixon (A.). 6, 85, 86.
Duhem (P.). 46.
Dulac (H.). 56.

Easton (C.). 113.
Edwards (R.). 91.
Egorov (D.). 58.
Elliott (E.). 79, 83.
Emery (G.). 77.
Escott (E.). 80.
Everdingen (E. van). 153.
Fabry (C.). 51.
Fabry (E.). 53.
Fawcett (Mlle C.). 41.
Fejér (L.). 53, 54.
Fergola (F.). 71.
Ferrer (F.). 46, 49.
Fey (Mlle A.). 41.
Filloux (L.). 52.
Filon (L.). 13, 43.
Fischer (E.). 51, 52.
Fontené (G.). 16.
Forsyth (A.). 11.
Franchis (de). 55.
Fréchet (M.). 46, 52.
Gambier (B.). 49, 50.
Garnier (R.). 54.
Gasparis (A. de). 69.
Geest (J.). 123.
Geöcze (Z. de). 46.
Genocchi (A.). 67, 71, 72.
Glaisher (J.). 78, 79, 106, 109.
Godeaux (L.). 152.
Godfrey (C.). 35.
Goldziher (C.). 50.
Gosset (T.). 93.
Goursat (E.). 20, 25, 52, 55.
Guldberg (A.). 106.
Gwyther (R.). 82.
Hadamard (J.). 51, 98.
Hardy (G.). 80, 81, 84, 87, 90, 91, 93, 108, 109.
Hearson (T.). 8.
Heywood (B.). 56.
Hicks (W.). 14.
Hill (M.). 83, 106.
Hilleret (G.). 48.
Hilton (H.). 85, 90, 92, 93, 107.
Hobson (F.). 9.
Holden (H.). 106, 107.
Holmgren (E.). 58.
Hough (S.). 6, 8, 10, 12.
Hudson (R.). 80.
Humbert (G.). 50, 53, 55, 56.
Hurwitz (A.). 45.
Jackson (F.). 88.
Jacob (A.). 46, 50, 58.
Jaeger (F.). 138.
Jeans (J.). 37.
Jolles (Mlle T.). 148.
Jolliffe (A.). 80, 81.
Jouguet. 47, 48, 54.
Jourdain (E.). 81, 85, 106.
Julius (W.). 149, 150.
Kamerlingh Onnes. 113, 147, 148, 149, 151.
Kapteyn (W.). 107, 117, 118, 131, 135, 137, 143, 150, 153, 159.
Keesom (W.). 147, 149, 151.
Kluyver (J.). 113, 131, 144, 159.
Kœnigs (G.). 46, 47.
Kohnstamm (P.). 127, 149.
Korn (A.). 52, 53, 94.
Korteweg (D.). 110, 115, 132.
Krebs. 49.
Krigowski (Z.). 50.
Laar (J. van). 123, 125, 128, 129, 135, 137, 139, 143, 150, 151.
Lalesco (T.). 19, 30, 48, 56, 57.
Landau (E.). 97, 110.
Larmor (J.). 7, 11.
Lasker (E.). 37.
Lebesgue (H.). 26, 46, 48.
Lecornu (L.). 16, 21, 45, 48.
Lee (Mlle A.). 11, 15, 35, 36, 41.
Lees (C.). 109.
Levi-Cività (T.). 54.
Lévy (M.). 56.
Lorentz (H.). 120, 132, 134.
Lorgna (A.). 73.
Love (E.). 40.
Lucas (F.). 17.
Mac-Mahon (P.). 9, 15.
Maillet (E.). 17, 47, 51, 56, 58.
Mainardi (G.). 59.
Mallock (A.). 8.
Marianini (P.). 59.
Massau (J.). 54.
Mathews (G.). 82.
Mehmke (R.). 125.
Maczyng (G.). 45.
Merlin (E.). 97.
Michel (C.). 50.
Miller (G.). 85, 90.
Minich (S.). 69.
Montel (P.). 56, 98.

Muir (T.). 92, 107.
Myller (K.). 56.
Nanson (E.). 79, 81, 86, 88, 108.
Nielsen (N). 47.
Niewenglowski (B.). 23.
Ocagne (M. d'). 26, 46, 50, 51.
Ornstein (L.). 136.
Oss (S. van). 150.
Oudemans. 142.
Ovidio (E. d'). 71, 72.
Padé (H.). 101, 103.
Painlevé (P.). 56.
Paolis (R. de). 77.
Pearson (K.). 6, 8, 11, 13, 15, 34, 35, 36, 40, 41.
Pellet (A.). 19, 31.
Perot (A.). 51.
Picard (E.). 51, 56, 100.
Pocklington (H.). 7.
Poincaré (H.). 24, 44, 56.
Popovici (C.). 49, 55.
Postma (O.). 135, 146, 153.
Raffy (L.). 31, 34.
Rémoundos (J.). 31, 45, 54.
Rémy (L.). 18, 47, 48.
Reynolds (O.). 9.
Richet (C.). 54.
Riesz (F.). 48, 49, 52, 55.
Riquier (C.). 57, 104.
Roberts (H.). 91, 94.
Routh (E.). 7.
Rubini (R.). 69.
Rücker (A.). 10.
Saint-Robert (P. de). 68.
Saltykow (N.). 58.
Sande Backuysen (H. van de). 145, 149.
Schiaparelli (G.). 60.
Schmutzer (J.). 153.
Schœnflies (A.). 45.
Schoute (P.). 114, 115, 119, 123, 134, 137, 147, 150, 154, 155, 156, 157.
Schreinemakers (F.). 150.
Schuh (F.). 110, 111, 112, 143, 145, 148.
Secchi (A.). 60, 62, 66, 67.
Segre (C.). 72.
Seguier (de). 54, 58.
Seux (E.). 45.
Sheppard (W.). 14.
Siacci (F.). 68, 71.
Sissingh (R.). 132, 134.
Sitter (W. de). 138, 151, 166.
Smits (A.). 130, 135, 139.
Sommerfeld (A.). 117.
Sparre (M. de). 24.
Stekloff (W.). 49, 52.
Stein (J.). 154.
Stephenson (A.). 80, 81, 85.
Stok (J. van der). 110, 130, 134, 149, 153.
Tarazza (D.). 60.
Tardy (P.). 60.
Taylor (H.). 92, 107.
Thorpe (E.). 10.
Torelli (G.). 76.
Tortolini (B.). 59.
Traynard (E.). 96.
Tsoucalas (P.). 46.
Tzitzeica (G.). 52, 57.
Verschaffelt (J.). 137.
Versluys (W.). 113, 128, 129, 133, 143.
Vladavas (J.). 46.
Voigt (W.). 154.
Volterra (V.). 73, 102.
Vries (J. de). 114, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 136, 139, 142.
Waals (J. van der). 112, 124, 129, 130, 134, 147, 149, 150.
Warren (E.), 41.
Webb (H.). 80, 89.
Weeder (J.). 114, 127, 129.
Weill (M.). 26.
Wertheim Salomonson (J.). 143.
Whitaker (F.). 13.
Wind (C.). 150.
Wœlsch (E.). 46, 58.
Woodall (H.). 90, 94.
Wytholf (W.). 146.
Young (W.). 83, 93.
Yüle (G.). 15, 41.
Zeeman (P.). 123, 138.
Zwiers (H.). 136, 143.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
43040 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v.43

Bulletin des sciences
mathématiques

Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~
Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY